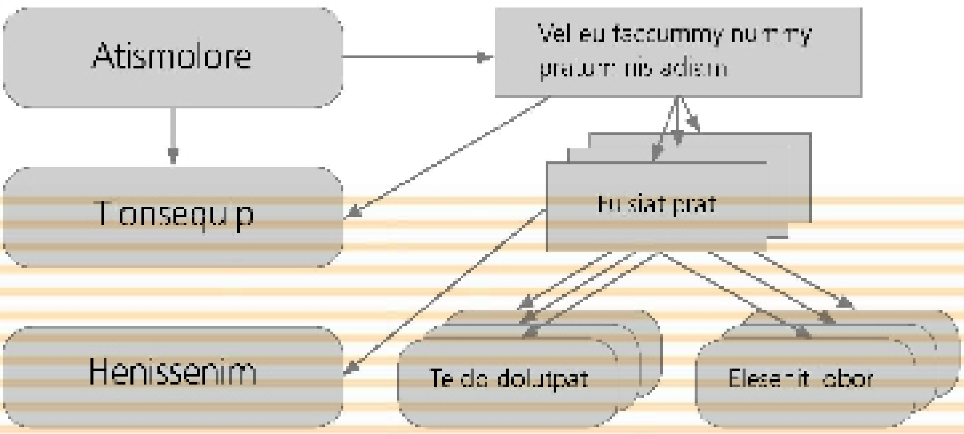
document de travail

07.1002
DÉCEMBRE 2007

Vers un modèle formel de classification de problèmes mathématiques et son usage dans la définition de compétences mathématiques

Luc-Olivier Pochon



irdp
Institut de recherche et de documentation pédagogique

Vers un modèle formel de classification de problèmes mathématiques et son usage dans la définition de compétences mathématiques

Luc-Olivier Pochon

IRDP
Faubourg de l'Hôpital 43
Case postale 556
CH-2002 Neuchâtel

Tél. (41) (0) 32 889 86 18
Fax (41) (0) 32 889 69 71

E-mail: documentation@irdp.ch
http://www.irdp.ch

Dans la même série

Connaissance, théorie de l'information et hypertextes : histoire d'une lecture sélective

Luc-Olivier Pochon & Alain Favre

De la possibilité d'usage d'ontologies pour la gestion de contenus mathématiques.

Luc-Olivier Pochon

Série «Ermitage»

Un projet d'auto-formation assistée : éléments de statistiques et pratique du tableur

Alain Favre

Regard sur des activités mathématiques «supportées» par les TIC

Luc-Olivier Pochon & Anne Maréchal

Outils informatiques et nouveaux moyens d'enseignement de mathématique : l'accueil des enseignants. Une recherche exploratoire

Ismaël Ghodbane

http://www.irdp.ch sous « publications »

ou IRDP, Secteur Documentation
Fbg de l'Hôpital 43 - Case postale 556 - 2002 neuchâtel
tél. +41 32 889 86 18 - email documentation@irdp.ch

Cette publication est également disponible sur le site IRDP :

http://www.irdp.ch/

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements à Jacques-André Calame, Viridiana Marc et Martine Wirthner pour leurs remarques et à Corinne Martin pour sa relecture attentive.

Introduction

Ce document est établi dans le cadre d'un projet de mise sur pied sur le plan romand d'épreuves de référence. Il fait une proposition d'approche pour la classification des tâches en vue de la création d'une base de problèmes. Il traitera plus particulièrement du domaine des mathématiques. Cette réflexion est-elle nécessaire ? En effet, on peut concevoir qu'un tel travail est inutile ; que les usages établis sont suffisants pour assurer la création de cette base ? Ce n'est pas impossible. Toutefois, comme le projet doit pouvoir être poursuivi à long terme, il s'agit de s'assurer que plusieurs des alternatives possibles issues d'expériences diverses ont été prises en compte, sinon toutes.

C'est à quoi devrait servir avant tout cette étude exploratoire[1], qui commence par mettre le travail en perspective avec les approches actuelles de description des savoirs, lesquelles reposent sur la notion de compétence, en articulant cette notion avec les « tâches » qui peuvent être proposées dans des épreuves. Dans la rubrique suivante elle examine un cas pratique qui montre la relative complexité que peut revêtir cette activité de description. Elle présente ensuite le modèle EVAPM (Évaluation des Apprentissages Mathématiques). L'étude se termine par une première liste de critères de description avec une proposition qui, en prévision des connexions et migrations ultérieures, s'inspire du langage des ontologies afin de profiter ultérieurement des concepts et des outils de cette approche.

[1] De fait, elle reprend une lignée de travaux interrompue qui avait culminé avec la gestion d'une « testothèque » (Cardinet, Knopf & Weiss, 1985 ; Margot, 1984).

A propos de tâches et de compétences

Les programmes de mathématiques actuels, comme les opérations d'évaluation menées à grande échelle sur le plan suisse ou international (PISA ; HarmoS), introduisent les compétences comme « produits » des apprentissages scolaires. En accord avec Weinert (2001 :27), repris par Klieme & al (2004), il faut entendre par compétences « les capacités et les savoir-faire cognitifs dont un individu dispose ou qu'il peut acquérir pour résoudre des problèmes spécifiques, ainsi que les dispositions et les capacités motivationnelles, volitives et sociales qui y sont liées, pour appliquer les solutions aux problèmes avec succès et de manière pleinement responsable dans diverses situations ». D'autres définitions existent qui, à des nuances près, correspondent à celle-ci (Jonnaert, 2002 ; Le Boterf, 1994).

Cette notion, issue principalement de la description des capacités d'action dans le monde professionnel, est difficile à cerner au niveau de la scolarité obligatoire. Elle provoque de nombreuses discussions[2] liées à ses utilisations tous azimuts, sans que le concept relativement pragmatique se rattache vraiment à une théorie de l'apprentissage bien identifiée : « une caverne d'Ali Baba conceptuelle » selon Crahay (2006), qui lui reconnaît toutefois le mérite de remettre l'accent sur la globalité de l'apprentissage. Les discussions menées dans le monde professionnel qui tendent à centrer les compétences sur les fonctions et non sur les personnes (Defelix, 1999) ont également des répercussions sur l'accueil fait à cette notion au niveau de l'éducation en général. Il est toutefois possible, ainsi que le fait Perrenoud (1994, 2000), d'analyser cette notion dans ses contextes d'utilisation. On pourrait se contenter d'une forme faible de ce concept, au niveau de la manifestation de la compétence, sans entrer dans la caverne de la « pédagogie par compétence ».

Ainsi, au niveau de l'école élémentaire, il s'agirait de distinguer les compétences générales de l'écolier (où entrent des savoir-faire mathématiques) et les compétences mathématiques qui vont nous intéresser plus particulièrement.

A ce propos, il s'agit de lever un malentendu et de se distancier de la pédagogie de l'extrême dénoncée par Crahay comme une pédagogie qui exclut les situations courantes, quotidiennes, répétitives[3].

---

[2] Un cahier des Sciences de l'éducation (anciennement du « Service de pédagogie expérimentale ») de l'université de Liège est consacré au sujet (21-22 de 2005, Les compétences : concepts et enjeux). Ce cahier débute par l'article très critique de M. Crahay repris dans la Revue Française de pédagogie (Crahay, 2006). Le site http://educmath.inrp.fr consacre une rubrique « En débat » à ce sujet qui donne la parole à Y. Matheron, B. Schneuwly et A. Sierpinska à propos de la citation de M. Crahay : « les compétences : une mauvaise réponse à un vrai problème ». L'Educateur consacre également un dossier au sujet (4/2007, mars).

[3] Mais la situation est vraisemblablement plus complexe que l'exemple qu'il donne du chirurgien ne le laisse penser. En effet, Pierre Arni, Directeur médical-adjoint de l'Hôpital neuchâtelois précise : « Pour être bons dans

En effet, si, dans une certaine mesure, les programmes « modernes » de mathématiques mettent l'accent sur la résolution de problèmes « complexes », c'est qu'ils visent à développer la capacité de s'approprier un problème, et par là à éviter une routinisation basée sur des mots-clés déclencheurs, avec perte du sens de l'activité menée. Si des problèmes nouveaux sont proposés dans des évaluations, c'est pour évaluer cette capacité de prise en charge. Il faudrait évidemment que les critères d'évaluation soient cohérents avec cette visée, ce qui n'est pas toujours le cas.

La liste proposée par Rey (2007) concernant trois degrés de compétences (compétences spécifiques) semble satisfaire aux exigences d'une pédagogie de l'équilibre et nous permet de nous retrouver en terrain connu.

1er degré — Savoir exécuter une opération (ou une procédure, suite prédéterminée d'opérations) en réponse à un signal.

2e degré — Posséder toute une gamme de ces procédures et savoirs[4] ; dans une situation inédite, choisir celle qui convient.

3e degré — Posséder toute une gamme de ces procédures et savoir ; dans une situation inédite et complexe, choisir celles qui conviennent.

Une situation complexe est une situation qui devra faire appel de façon conjointe à plusieurs procédures.

Dans le cas des mathématiques, il s'agit de noter que parmi les procédures se trouvent à la fois des outils classiques (les algorithmes des opérations, par exemple), mais également des procédures relevant du domaine même de la résolution de problème (essai, recherche de cas particuliers, etc.).

les cas courants, ces personnes (médecins, assistants, infirmières) doivent régulièrement être confrontées à des situations complexes » (cité par Santi Terol, L'Express, 22 août 2007, p. 3).

[4] Faudrait-il dans une perspective plus empirique remplacer ce terme de savoir par pouvoir ?

Des compétences aux tâches

Dans les opérations PISA et HarmoS, les compétences semblent souvent être, pour paraphraser Binet, ce que mesurent les tests. Jusqu'à un certain point, il est d'ailleurs impossible d'y échapper. Pour revenir aux sources, les compétences sont mesurées à travers la réalisation de tâches, « travail déterminé qu'on doit exécuter » dit le Robert.

Quelles sont les tâches de l'écolier ? Certaines sont générales : faire ses devoirs ; d'autres plus spécifiques : mémoriser certains faits et s'exercer au calcul mental ou remplir des fiches de calcul raisonné. En mathématiques, une tâche particulière[5] est de mettre en œuvre des techniques pour résoudre des problèmes selon certains procédés et avec certaines contraintes. Les compétences en mathématiques se mesurent donc à la capacité de mener à bien ces résolutions (totales ou partielles[6]), certaines totalement internes au domaine (trouver la somme de deux nombres, le produit vectoriel de deux vecteurs, etc.), et d'autres nécessitant une certaine mathématisation (voir le problème « Le potager d'Aloys » ci-dessous).

La question du caractère inédit du problème à résoudre en situation d'évaluation[7] est délicate. Elle ne peut pas être discutée indépendamment des critères d'évaluation adoptés, des buts de l'évaluation, etc. Le caractère même de l'inédit est une question en soi qui demande une étude attentive des activités proposées et dépend de caractéristiques objectives des sujets (cursus, parcours de vie) mais aussi de leur « état d'esprit » du moment. Cette question nous ramène à mesurer la distance entre des problèmes et à étudier des champs de problèmes (Pochon, 2006a).

Afin d'assurer la possibilité de réaliser de véritables familles de problèmes équivalents, une description fine est nécessaire. C'est l'objet de ce document. Cette description rejoint dans un certain sens l'approche « C-bar » (Bonnet, Daems, Horner & al, 2003 ; Bonnet, 2004) dans la mesure où l'équivalence des problèmes soumis dans une épreuve pourrait être jugée sur la base d'une description assez fine[8]. Un travail ultérieur sera de soumettre cette hypothèse d'équivalence à

[5] Ce point justifie le fait que nous préférerons par la suite les termes de problème ou activité, voire exercice ou question, à celui de tâches souvent trouvé dans la littérature. Tâche pourra parfois paraître comme synonyme ou lorsque l'activité à mener est décrite dans la consigne. A ce propos voir aussi Brousseau, G. (s.d.) qui rappelle que le terme « tâche » à pris la place de celui de « problème » sous l'influence des psychologues expérimentalistes.

[6] Une compétence partielle telle que « trouver un cas particulier » peut se mesurer sur un problème complexe qui, lui, ne sera pas forcément résolu entièrement.

[7] L'usage de la situation inédite dans l'apprentissage relève du registre de la didactique.

[8] Une autre voie possible serait d'analyser les énoncés de problèmes selon un modèle « schankien ». Cette voie avait été explorée lors d'un séminaire conjoint de l'IRDP et du Centre de Sémiologie (prof. J.-B. Grize) de l'Université de Neuchâtel.

une vérification empirique qui pourrait s'inspirer d'une partie des propositions de De Ketele & Gérard (2005).

Une compétence pourra ainsi être rattachée à une famille ou sous-famille (en pensant à une structure de classification hiérarchique) de problèmes et décrite par elle, et mesurée par la possibilité de résoudre un certain nombre de problèmes de la famille. Dans un cadre scolaire, si l'on veut garder un certain sens aux tâches, alors les compétences en mathématiques se mesurent à la capacité de résoudre des problèmes significatifs d'un certain nombre de familles. Dans cette vision, certains problèmes « trop » complexes jouent un rôle particulier. Examinés de façon particulière lors de la correction, ils permettent de jauger des compétences partielles telles que la prise en charge du problème.

Un exercice pratique de description

Classer des problèmes de mathématiques n'est pas une mince affaire. La pyramide additive va nous servir d'exemple pour amorcer le processus de recherche de caractérisation d'un problème. Quatre problèmes sont basés sur cette « pyramide ». Le premier (figure 1) est tiré du système Ermitage[9] et a été utilisé dans le cadre d'une recherche à propos de la formation en mathématiques des futurs enseignants (Pochon & Maréchal, 2006). Le deuxième (figure 2) est extrait d'une version préparatoire de test standardisé (projet HarmoS). A partir de ce dernier exemple, deux variantes peuvent être imaginées sur la base de la même situation, mais en modifiant la consigne. L'une demande de prouver que, par exemple 17, ne peut jamais figurer au sommet de la pyramide, l'autre demande d'énumérer les nombres qui peuvent apparaître au sommet. Par la suite, ces problèmes seront notés P1, P21, P22 et P23.

Question : ces quatre problèmes sont-ils à classer dans la même famille ?

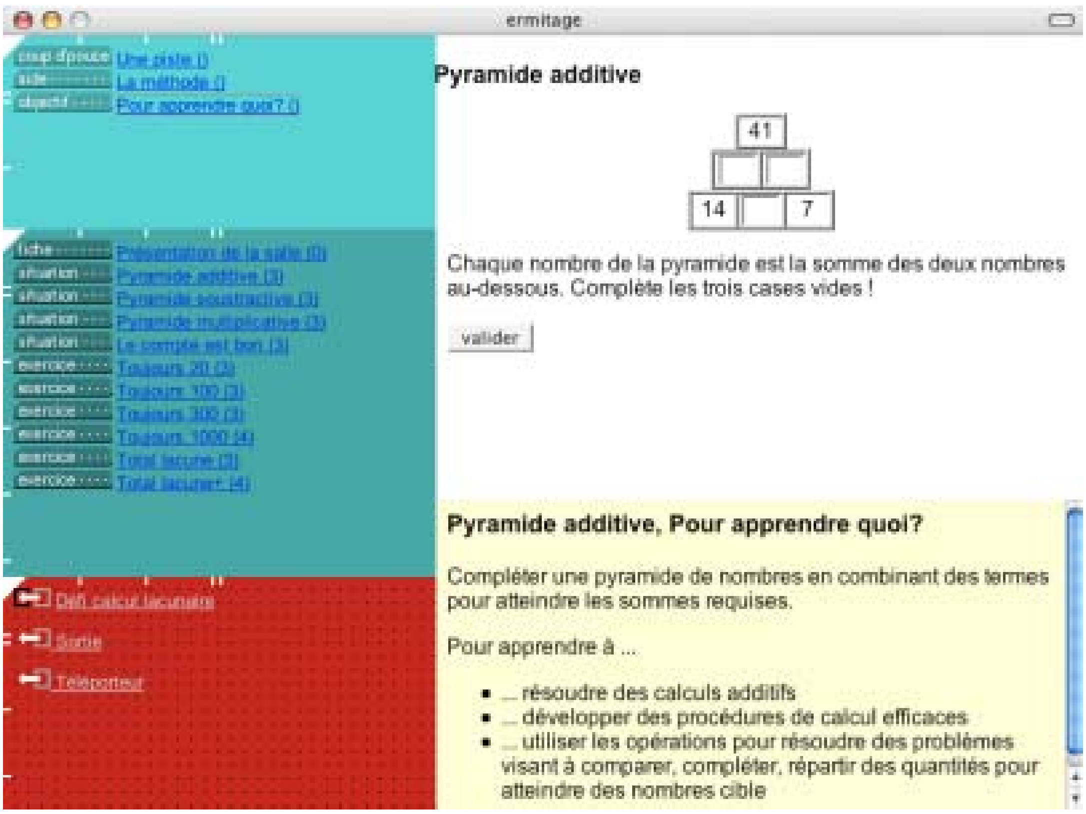


Figure 1. La pyramide additive dans sa version informatisée dans le projet Ermitage (problème P1)

[9] http://www.projet-ermitage.org

1) Les quatre problèmes font intervenir des pyramides additives de nombres. C'est ce qu'on pourrait appeler l'habillage, ici de type relativement structuré ou formalisé. Il existe d'autres problèmes avec une disposition géométrique de nombres (carrés magiques, par exemple). Il y a également dans cette formulation, mais le trait est plus subjectif, un relent d'énigme ou de casse-tête (voir à ce propos Pochon & Maréchal, 2006).

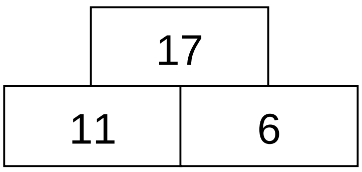
2) Support : P1 est sur support informatisé, les autres problèmes sont de type « papier crayon ». A noter que dans le cas informatisé, le travail de résolution peut aussi être mené, selon le contexte, avec du papier et un crayon. Dans le cas du support informatisé, la tâche est proposée avec un environnement d'aide. Le système autorise des essais (en nombre limité ou non selon le contexte).

3) Les données (l'énoncé de la situation) : elles sont sobres dans le cas informatisé, plus détaillées dans les autres cas. Il y a chaque fois un schéma de la pyramide.

4) La formulation de la question (consigne, énoncé de la tâche à effectuer) : elle figure après l'énoncé de la situation dans le cas informatisé (la question est quasiment implicite), elle est insérée dans l'énoncé dans les autres cas. Dans le cas des problèmes P2, la consigne, en proposant une démarche (suite de sous-tâches), prend en charge une partie de la solution.

5) La démarche induite : P1 propose une « tâche » globale, les autres décomposent la démarche à suivre en une liste de sous-tâches hiérarchisées (afin d'aider à une bonne représentation de la tâche et à préciser la demande de justification). Des variantes pourraient également être imaginées en changeant les consignes intermédiaires (supprimer la première partie de P21, par exemple).

Avec des pyramides de nombres



Dans une telle pyramide de nombres (de deux étages), une brique qui repose sur deux autres contient un nombre qui est la somme des nombres de ces briques.

a) Construis une pyramide à 4 étages. Tu dois placer dans les briques de la base de la pyramide chacun des nombres 1, 2, 3, 4, chacun une fois.

b) Trouve le plus grand nombre qu'on peut avoir au sommet lorsque tu utilises les nombres 1, 2, 3, 4, chacun une fois à la base de la pyramide.

c) Explique ta démarche et dis pourquoi c'est le nombre que tu as trouvé qui est le plus grand possible au sommet de la pyramide.

Figure 2. La pyramide additive dans une version préparatoire de tests standardisés (problème P21)

6) Forme des réponses : P1 propose un « moule » pour la réponse (3 nombres à placer dans des lacunes), dans les autres cas les trois sous-tâches induites demandent des types de réponses différents : pour a) production libre d'un schéma ; pour b) réponse courte chiffrée; pour c) réponse longue avec texte et symboles, voire des schémas.

7) Analyse a priori de l'activité : en prévision de la discussion finale, notons que les démarches de résolution dépendent du type d'approche. Par ailleurs l'expérience (celle acquise à travers les multiples évaluations individuelles menées par l'IRDP, par exemple) montre qu'il est difficile de prétendre à l'exhaustivité des démarches possibles. L'analyse des travaux d'élèves révèle des démarches hybrides voire parfois totalement originale.

Problème P1[10] :

1. Par tentatives plus ou moins dirigées par l'erreur (l'évaluation des essais pouvant s'effectuer par calcul ou par l'ordinateur).
2. Méthode de la fausse position : l'erreur commise sur le résultat est utilisée pour ajuster la réponse.
3. Calcul lacunaire mental à plusieurs étapes (ou par observation d'autres exemples) : ((41 – (14+7))/2 .
4. Découverte d'une règle pour trouver la case centrale de la rangée inférieure : la case du haut est la somme de cases du bas avec celle du centre comptée deux fois (14 + 7 = 21 ; il manque 20 pour aller à 41, d'où la case centrale contient 10).
5. Démarche littérale : la règle précédente est établie à l'aide d'un calcul littéral.
6. Démarche algébrique : établissement des contraintes (équations) de chaque case et résolution (3 équations simples à 3 inconnues).

Questions P21a, P22a, P23a :

Production d'une pyramide et addition de nombres selon la consigne

Question P21b :

1. Démarche systématique : recherche des 24 (12 en tenant compte de la symétrie) « socles » possibles.
2. Démarche heuristique : on peut constater que les nombres du centre du « socle » vont apparaître plus de fois que les autres dans la somme finale. Cette démarche heuristique peut se prolonger vers une perception plus claire du facteur de pondération (3).
3. Démarche littérale : établissement de la formule et usage de cette formule selon les démarches 1 ou 2 (en notant a, b, c, d les valeurs des cases du « socle », la valeur au sommet est : a +3b + 3c + d).

[10] A noter que si la graduation adoptée correspond en une augmentation des compétences en calcul littéral, la démarche 4 correspond à un degré « d'astuce » et d'habileté mentale supérieur à celui les démarches 5 et 6 mieux adaptées pour des pyramides plus grandes.

Question P22b :

1. Démarche systématique, tous les cas sont calculés.
2. Démarche heuristico-déductive : il faut un nombre pair et un impair au niveau 3 (disposition par exemple P/I) ; au niveau 2 on doit avoir une disposition du type P/P/I ou I/I/P ; au niveau du socle : P/P/P/I, I/I/I/P, I/P/P/I, P/I/P/P, ce qui n'est pas possible.
3. Démarche littérale avec calcul pour tous les cas ou déduction sur la parité.

Question P23b :

1. Démarche systématique, tous les cas sont calculés.
2. Démarche synthétique (en partant de la valeur minimum, 16, on peut voir les cas qui mènent à la valeur maximum, 24, en échangeant les valeurs des cases qui font évoluer la valeur de la case supérieure de 2 en 2).
3. Passage par une formule littérale avec calcul pour tous les cas ou déduction (partielle).

Question P21c, P22c, P23c :

Écriture de la démarche avec, le chas échéant, formulation d'hypothèse puis justification à l'aide de texte, formule, schéma

8) Famille (structure sous-jacente)

P1 calcul lacunaire additif avec un degré de déduction (une inconnue et une contrainte).

P21 recherche de combinaison avec évaluation (recherche du maximum).

P22 appartenance d'un nombre à une famille donnée par des contraintes (suite générée à partie de quatre « germes »).

P23 énumération d'une famille donnée par des contraintes (suite à quatre germes).

9) Les notions et techniques qui peuvent être impliquées

P1 notions : nombres entiers, addition, calcul littéral, équation

P1 techniques : addition de nombres entiers, fausse position, résolution d'équations

P21 notions : nombres entiers, addition

P21 techniques : addition de nombres entiers, recherche des permutations, calcul littéral

P22 notions : nombres entiers, addition, parité

P22 techniques : addition de nombres entiers, recherche des permutations, calcul littéral, calcul de parité

P23 notions : nombres entiers, addition, parité

P23 techniques : addition de nombres entiers, recherche des permutations, calcul littéral, calcul de parité

10) L'instrumentation : P1 organise le travail sur ordinateur et fournit un feed-back. Les problèmes P2 sont des problèmes papier-crayon sans instrument autre que le schéma de la pyramide.

11) Les prises d'information : pour P1, un simple résultat est disponible duquel on peut inférer une compétence globale. Une version papier-crayon de ce problème avec un examen des traces permettrait d'examiner la démarche adoptée. Pour P2i, on peut juger de façon plus précise : la compréhension de données, le niveau de mathématisation (formalisation) utilisé, l'usage de techniques, des aspects de déduction et de communication (explicitation de démarche, écriture symbolique, schéma).

12) Finalité (se prête à) : selon le cas, ces problèmes peuvent aussi bien se prêter à une application de technique, de l'exercisation, de l'évaluation que fournir une situation-problème. Par exemple, la tâche P21 est prévue pour être intégrée à un test, mais pourrait également servir de situation-problème.

13) Ce que les solutions montrent : selon les traces à disposition, les solutions montrent différents type de compétences : prise en charge de la tâche, calcul, techniques utilisées, utilisation des instruments, capacité de modélisation mathématique, réflexion (déduction), invention de la démarche, communication.

Discussion

L'analyse des problèmes montre que les critères de classements sont multiples. Ils concernent aussi bien des aspects visibles – contenus, l'habillage, la présentation, le mode de présentation des réponses – que des aspects invisibles (mode de résolution) ou encore de contexte : possibilités d'usage, publics possibles.

Ce qu'on voit : habillage, forme des données, forme des réponses.

Ce qu'on induit :

- les notions mathématiques et les démarches. Certaines sont inévitables. Mais d'autres peuvent dépendre du niveau et de l'angle d'attaque. Une analyse a priori permet de faire des hypothèses à ce propos sans toutefois prétendre à un recueil exhaustif des cas possibles. Les analyses devraient pouvoir être revues et enrichies régulièrement. De plus, il resterait à choisir si les notions et les actions qui interviennent dans les démarches de résolution sont à énumérer globalement ou à répartir selon les approches ;

- les pré-requis nécessaires pour mener à bien la tâche ;

- les différents types de réponses qui seront produites et à partir desquelles des niveaux ou des classes de compétences pourront être mis en évidence sur la base, par exemple, d'une grille d'analyse.

Par ailleurs, en ce qui concerne la famille, l'expérience, notamment celle du RMT (Charnay, 2006), montre qu'il est possible de procéder à une classification grossière des problèmes. Il resterait à vérifier le degré de fidélité avec lequel se fait cette classification, notamment en raison des différents degrés de « granularité » possibles.

Ces aspects seront passés systématiquement en revue. Pour cela, nous utiliserons, à un niveau élémentaire, le langage des ontologies que nous présentons rapidement en annexe. (voir aussi Pochon 2006b[11]).

[11] Dans ce document, il est suggéré, à la suite d'autres auteurs, un lien relativement ténu entre la notion d'ontologie utilisée en intelligence artificielle et celle des philosophes. Cette vision est liée a une connaissance très superficielle des travaux des philosophes à ce propos, qui ont amené des développements d'une très haute technicité « opératoire » à propos de ce thème (voir notamment Schneider, 2006).

Le modèle du Consortium mathématique HarmoS

Dans le cadre du projet HarmoS, un modèle général des compétences a été proposé sous la forme d'une grille « domaine x aspect » à laquelle s'ajoute un indice de difficulté a priori lié à la présentation du problème, la complexité de la démarche, la proximité à des choses scolaires pratiquées (Antonietti, Moreau, Moser & Ramseier, 2006). Chaque groupe impliqué dans le projet HarmoS, a exploré cette matrice à sa manière Le groupe romand du consortium de mathématiques a proposé une grille d'analyse des problèmes mathématiques. La figure 3 donne un exemple d'utilisation de cette grille pour analyser le problème « Le potager d'Aloys » (Chastellain, Calame & Brêchet, 2003) dont l'énoncé figure dans l'encadré 1 (dans le manuel, le texte est accompagné d'une illustration).

> **Le potager d'Aloys**
>
> Comme chaque printemps, Aloys modifie l'emplacement de son jardin potager.
>
> Cette année, il décide de l'implanter le long de la façade sud du rural, de façon qu'il soit rectangulaire.
>
> Pour y parvenir, il dispose d'une clôture de 22 m.
>
> A quelle distance de la façade va-t-il planter ses deux piquets d'angle pour obtenir une aire maximale ?

Encadré 1. Le potager d'Aloys

La volonté du groupe était de ne pas situer l'analyse d'emblée au niveau des compétences mais de préciser préalablement le contenu des problèmes. On note toutefois une certaine difficulté à s'en tenir à l'aspect purement descriptif. Des éléments sont introduits qui relèvent de la démarche supposée de résolution, de même que des aspects qui vont dépendre de ce qui pourrait être observé de l'activité. C'est notamment le cas de la rubrique « communication » qui peut dépendre du degré de précision de la demande formulée dans la consigne et du mode de dépouillement des réponses.

On notera aussi la nécessité d'introduire une colonne hors contenu mathématique pour tenir compte d'aspects langagiers généraux qui, en fait, appartiennent à une autre dimension de description. Ce fait, lié à d'autres du même type, montre l'aspect réducteur d'une caractérisation des tâches selon une matrice bi, voire tridimensionnelle[12]. Outre le problème du nombre de dimensions trop réduit, toutes les tâches ne s'accordent pas de la même manière à ces dimensions.

[12] Le problème de la nature bi ou tri-dimensionnelle du modèle de compétences proposé par la méthodologie HarmoS est à la fois plus simple ou plus complexe selon le degré de finesse avec lequel cette notion de modèle est définie.

Le potager d'Aloys (niveau de référence 8)	01. Géométrie 1. Géométrie synthétique 2. Propriétés des figures 3. Transformations	02. Nombres et opérations 4. Ensembles 5. Propriétés et priorités des opérations 6. Algorithmes 7. Arithmétique	03. Grandeurs & mesures 8. Calcul de dimensions 9. Pythagore 10. Trigonométrie du triangle rectangle 11. Grandeurs fondamentales et composées	04. Fonctions et calcul littéral 12. Proportionnalité 13. Etude de fonctions 14. Représentation de fonctions 15. Equations	05. Analyse de données 16. Lecture, organisation et tri 17. Critiques 18. Représentations	06. Hors contenu
A. Appropriation			A.03 (1)			
A1. Terminologie						
A2. Ecriture						
A3. Langage						A3.06 (2)
B. Modélisation	B.01 (1)			B.04 (2)		
C. Raisonnement						
C1. Invention						
C2. Cheminement				C2.13 (1)		
C3. Déduction						
D. Utilisation de techniques				D.13 (2) D.15 (1)		
E. Instrumentation						
E1. Outils traditionnels						
E2. Aide-mémoire						
E3. Calculette						
E4. Ordinateur						
F. Interprétation et critique des résultats	F.01 (1)			F.13 (2)		
G. Communication						
G1. Terminologie mathématique						
G2. Ecriture math.						
G3.Structure						

Figure 3. Une grille de description de problèmes appliquée au « potager d'Aloys »

A noter encore qu'il est difficile de stabiliser les attributs du découpage. Certains sous-domaines devraient pouvoir figurer à cheval entre différents domaines (le théorème de Pythagore, par exemple). De même, il est nécessaire de préciser le niveau (degré scolaire) auquel le problème s'adresse. Un *pattern* (remplissage du tableau) existe pour chaque niveau possible. Le problème du potager d'Aloys (sans l'habillage) se retrouve également dans les problèmes élémentaires de calcul de maximum en calcul différentiel, il appartient alors à un autre champ de problèmes dont fait partie également le problème de la plus grande boîte avec ou sans couvercle réalisable par pliage d'un rectangle donné ou de surface donnée, etc.

De même, le profil du problème de la pyramide additive (P1) peut être donné par : A.02 (1) ; A3.06(1) ; D.02 (1) ; C3.5(1), ceci pour le niveau considéré (élèves de 10 ans scolarisés en Suisse romande). Mais un autre profil pourrait être considéré en pensant à une résolution par l'algèbre (avec une pyramide comportant davantage d'étages).

Moyennant quelques ajustements, ce modèle de description des problèmes pourra toutefois être utilisé pour résumer une description plus détaillée.

Le problème de la dimension complexité

Bien que relevant d'un domaine différent à un autre niveau de formation, l'étude que Nadolski, Kirschner, van Merriënboer & Wöretshofer (2005) ont consacrée la caractérisation de la complexité d'une tâche peut être utile ici. D'une part ils passent en revue plusieurs méthodes de mesure de la complexité, d'autre part ils expérimentent plus largement une méthode économique. Cette méthode utilise des tâches de références (*anchor tasks*) qui conviendraient bien à un travail où des familles de problèmes sont considérées. Toutefois, l'approche proposée ne tient compte que d'une mesure unidimensionnelle. Dans la conclusion les auteurs remarquent (!) que la complexité est probablement (!) un concept multidimensionnel et ils proposent une adaptation de leur procédure de mesure qui permet une meilleure analyse des tâches d'ancrage.

Le modèle du projet EVAPM[13]

Le projet EVAPM, en France, a pour mission l'observation continue des différentes facettes du curriculum mathématique des lycées et des collèges (curriculum souhaité, curriculum réel et curriculum atteint), et la mise en relation de ces facettes de façon tant synchronique que diachronique.

Il consiste en un dispositif continu d'observation et de recherche, développé depuis 1986 dans le cadre de l'APMEP (association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), et mis en œuvre par une équipe qui se renouvelle en fonction des projets en cours. Depuis la création de l'Observatoire EVAPM, une centaine d'enseignants ont ainsi été membres des équipes successives.

L'équipe EVAPM est associée à l'INRP. Au fil des années, elle a collaboré avec plusieurs IREM (Institut de recherche en enseignement mathématique) et en particulier avec l'IREM de Besançon qui lui apporte, depuis sa création, un appui logistique essentiel. Par ailleurs, EVAPM bénéficie de la reconnaissance et du soutien de plusieurs institutions (Inspection Générale, inspections pédagogiques régionales, etc.).

Chaque année, ou une année sur deux, EVAPM organise une étude à grande échelle, portant sur un ou plusieurs niveaux scolaires. Les études comportent invariablement un volet relatif aux acquis des élèves et un volet relatif aux opinions et conceptions des enseignants. Une vingtaine d'études ont ainsi été conduites depuis 1986, portant sur des milliers de classes de tous les niveaux, de la sixième aux classes terminales des lycées.

Des bases de données sont mises à disposition sur Internet[14] et sous forme de CD-ROM. Il y en a trois :

1) La base de données statistiques : toutes les données statistiques sont organisées et conservées pour des utilisations ultérieures. Ces données sont régulièrement utilisées dans des recherches : celles de l'équipe, comme celles de chercheurs qui utilisent les données EVAPM.
2) La base EVAPMIB : base multicritère regroupant près de 2000 questions d'évaluation utilisées dans les études à grande échelle d'EVAPM, mais aussi dans d'autres études telles que celles de la Direction de l'enseignement public (DEP), de TIMSS, de PISA et dans

[13] Evaluation des Apprentissages Mathématiques
[14] http://ctug48.univ-fcomte.fr/evapm, description que l'on retrouve dans Bodin & Couturier (1993).

certaines études étrangères. Toutes les questions de cette base sont accompagnées des résultats de diverses passations, et, aussi souvent que possible, d'analyses didactiques.

3) La base EVAPM_Tex de questions et d'épreuves : base interactive construite en langage Tex (mais rendue transparente et interactive pour l'utilisateur). C'est à la fois un outil de travail pour l'équipe (mise au point de nouvelles études) et de communication avec les enseignants.

La base de données statistiques est ouverte aux chercheurs, tandis que les bases de questions et d'épreuves sont accessibles, sur Internet, à l'ensemble des enseignants.

Vocabulaire

Les termes composant la structure de chaque question des bases EVAPMIB et EVAPM_Tex sont les suivants[15].

Thème : il apparaît que seul le thème EVA est utilisé. Il est vraisemblable que ce critère concerne les possibilités d'usage du problème.

Âges : les âges donnés indiquent simplement que la question a été utilisée avec des élèves de ces âges. Comme les programmes sont périodiquement modifiés, il faut bien penser à tenir compte de l'année d'obtention des résultats indiqués. Les âges plutôt que les niveaux sont utilisés puisque les études peuvent se situer dans d'autres pays qui n'utilisent pas la même répartition des classes que la France.

Capacités (Contenu et capacités visées) : dans la base EVAPMIB ce terme renvoie d'une part aux capacités ou « compétences » telles qu'elles sont présentées, depuis 1986, dans les programmes officiels français, en particulier dans les programmes du Collège ; d'autre part, il s'agit de formulations complémentaires élaborées pour les spécifications utilisées dans le cadre d'EVAPM ou pour les besoins de classification d'EVAPMIB. Cette capacité est aussi appelée code EVAPMIB, et à ce dernier peut correspondre un code APMEP (code d'identification des capacités utilisées dans le cadre des études EVAPM). Par exemple A013 : « Savoir tester une factorisation d'une expression littérale par des substitutions de valeurs numériques à la variable en jeu ».

Clé : Il s'agit d'un numéro unique qui permet d'identifier les questions sans ambiguïté.

[15] Ce sont les termes utilisés dans le masque de saisie. Entre parenthèses, on a indiqué la façon dont la rubrique est signalée dans l'affichage des fiches lorsqu'elle est différente. Son absence sur la fiche est signalée par un tiret (–).

Complexité (Complexité cognitive) : le critère « complexité » renvoie à un numéro qui correspond à la taxonomie de complexité cognitive établie par R. Gras (Gras, 2002 ; Bareil & Bodin, 2002).

Durée estimée (Temps nécessaire) : le temps proposé est une estimation moyenne du temps à attribuer à la résolution de la question.

Facilité : l'indice de facilité utilisé est gradué de 10 en 10 sur une échelle allant de 0 à 100. Il s'agit seulement d'une estimation, et parfois il faut faire une moyenne quand cet indice est trop différent sur plusieurs épreuves. Dans Bodin & Couturier (1993) on précise que cet indice de facilité est lié à l'IRT[16] mais actuellement calculé comme le pourcentage de réussite au premier niveau où la question peut être exigible. D'autres indices sont également signalés dans ce même article : l'indice de discrimination (basé sur l'IRT) et l'indice de généralisation (basé sur l'analyse implicative).

Forme (–): les questions sont classées selon leur forme : Fermée, semi-ouverte (QROC) ; Question à choix multiples (QCM) ; Question à réponse rédigée (QRR) ; Question à support matériel autre que papier crayon et calculatrice.

Mots-clés : la liste de mots clés évolue en même temps que la base EVAPMIB. Elle est révisée le plus souvent possible. Les mots-clés se réfèrent aux notions mathématiques que le problème fait intervenir.

Origine (Origine de la question) : ce critère permet de savoir qui est à l'origine de la question (l'auteur est en général collectif), par exemple : APMEP, IREM, etc.

Sens (–) : le sens détermine ce que l'élève fait travailler intellectuellement pour résoudre la question. Il y a quatre niveaux différents : La communication, L'objet, L'outil, La représentation. Cette taxonomie, due à Antoine Bodin, est d'un usage délicat. L'annexe 1 la présente à partir d'un document produit par son auteur.

Type d'activité (–) : le type d'activité détermine l'activité de la question vis-à-vis de l'élève. Ces activités sont de type : Calculatoire, Classificatoire, Créatif, Critique, Heuristique, Logique, Prédictif, Réinvestissement, Technique, Traductif.

Auteur (Auteur de la fiche) : il s'agit de la personne qui a écrit la question.

Processus PISA : ce numéro est la concaténation de plusieurs chiffres de processus PISA. Il existe huit critères : 1) La pensée mathématique, 2) Le raisonnement mathématique, 3) La modélisation mathématique, 4) Poser et résoudre des problèmes, 5) La représentation, 6) Le langage symbolique

[16] *Item Response Theory*.

et formel, 7) La communication, 8) Les outils et les instruments. Ainsi, par exemple, le nombre 4768 signifie que la question appartient aux concepts 4, 7, 6, et 8.

Classe de compétences : ce numéro renvoie à un niveau de compétence mathématique. Ces niveaux sont au nombre de trois :

- Compétences de classe 1 : Reproduction, définitions et calculs.
- Compétences de classe 2 : Mise en relation et intégration pour résoudre des problèmes.
- Compétences de classe 3 : Mathématisation, pensée mathématique, généralisation et compréhension en profondeur.

Épreuve(s) (–) : une épreuve est l'équivalent d'un sujet d'examen.

Question(s) voisine(s) : ce critère permet de comparer les questions.

Utilisation de la question : il s'agit d'un ensemble d'épreuves regroupées par année et par classe.

Date : celle d'origine et celle de la mise à jour sont indiquées.

Les informations « ouvertes » sont l'énoncé, les consignes de codage, l'analyse de la tâche et des remarques diverses (dont les résultats de passations)

Discussion

La particularité de la base EVAPM est de contenir presque exclusivement des questions de mathématiques. Il serait donc difficile de caractériser des problèmes tels que ceux utilisés dans le RMT, par exemple, où « l'habillage » joue un rôle important. En particulier la rubrique « mots-clés » concerne uniquement du vocabulaire mathématique.

La rubrique des questions voisines semble difficile à tenir à jour, et on peut se demander si ce voisinage ne pourrait pas être déduit de façon automatique à partir des autres critères.

Définition de critères globaux

En se basant sur les cas précédents, l'expérience aidant à défaut d'une théorie fondatrice, nous pouvons faire une première tentative pour établir des critères dans un niveau de description moyen.

Les critères de classification de problèmes sont subdivisés en trois catégories : description de l'activité proposée, analyse (a priori), documentation.

Description de l'activité

Registre : il peut s'agir d'une activité interne aux mathématiques (calcul du produit de deux vecteurs) ou alors d'une activité habillée dans un registre pratique (calcul d'intérêts) plus ou moins fictif. Les problèmes de pyramide additive relèvent d'un registre caractérisé par une donnée d'un certain niveau d'abstraction et une certaine organisation mathématique. Abusivement, on nomme parfois ces problèmes : situation-problèmes. Ce critère indique également un certain degré d'ouverture du problème, degré qui va être complété par la consigne et la forme de la réponse[17]. Les autres éléments de description peuvent dépendre de ce premier critère.

Énoncé : ce critère de réfère à la longueur du texte proposé, à sa difficulté, à la présence d'illustration (dont on peut distinguer le rôle), aux instruments proposés. Des énoncés peuvent aussi prendre en charge une partie de la solution soit en indiquant un exemple[18], soit en décomposant la tâche en sous-tâches.

Contenu (habillage) : il s'agit des éléments hors mathématiques (de quoi ça parle) sous forme de mot-clés. Ce critère peut s'avérer important du point de l'élève pour mobiliser la famille de tâches[19]. Un index peut être produit automatiquement à partir des énoncés.

Consigne (tâche) : ce critère résume la tâche qui est demandée (résoudre, expliquer, etc.). Ce point rejoint la rubrique « type de l'activité » de EVAPM.

[17] Les possibilités naturelles de choix de la démarche et de l'outillage peuvent être limitées par une consigne qui impose une démarche et des techniques. Dans le cas d'une ouverture importante, des outillages hors mathématique pourraient être envisagés.

[18] Voir l'exemple du « taquin » dans la plaquette de présentation des moyens d'enseignement de mathématique (Groupe de travail « Information », 1996).

[19] Dans une ancienne recherche exploratoire menée dans le cadre du séminaire déjà mentionné, conduit par l'IRDP et le centre de Sémiologie de l'Université de Neuchâtel, on constatait que des élèves de 10 ans, à propos de problèmes additifs et multiplicatifs liés à des fruits et légumes, avaient recours aux types de légumes pour constituer des familles et non aux opérations à effectuer.

Forme des observables : ce critère indique la façon dont les réponses seront données (réponse à choix multiple, réponse ouverte, etc.).

Aspect mathématique : ce critère se réfère à la description du domaine tel que contenu dans l'énoncé. Dans certains cas, le contenu mathématique visible dans la donnée peut être inexistant.

Classification selon le domaine (mathématique)

Famille *a priori* : par exemple problème d'intérêt, lieux géométriques de points[20]. À noter que les activités proposées par « Cherche le lieu (géométrique) des points … » et « La girafe » (Chastellain, Calame & Brêchet, 2003, activité 84, p. 41) font partie de la même famille[21]. Un problème peut appartenir à plusieurs familles. La dénomination des familles peut-être délicate selon qu'on se réfère à une structure mathématique principale sous-jacente, notre préférence, ou à un habillage « standard ». Ainsi des groupes de problèmes sont à la fois des « problèmes de robinets »[22], des « problèmes de débit » ou encore des « problèmes basés sur la structure d'une moyenne harmonique », famille incluse dans les problèmes de proportionnalité inverse. Dans cette dernière formulation (et aussi en partie dans la précédente), on trouve également les « problèmes de production » (par exemple lorsque des machines ou des ouvriers dont on connaît la production individuelle, se regroupent pour un travail). Un autre exemple est donné par les « problèmes de mélanges », dont le correspondant structurel serait représenté par les « problèmes de moyennes pondérées ».

Famille calculée : ce critère est déduit des autres critères. Il peut remplacer le critère indiquant les questions voisines de EVAPM.

Paramètres : certaines activités sont génériques et peuvent être instanciées si l'on donne différentes valeurs à des paramètres. Ces paramètres sont d'autant plus importants que l'on prévoit de générer, voire d'administrer les épreuves à l'aide de systèmes informatisés, auquel cas les autres critères sont des fonctions de ces paramètres.

---

[20] Dans le cas particulier, c'est aussi un concept.

[21] Ces deux activités vont se distinguer notamment par le registre et l'habillage.

[22] Dans les anciens ouvrages, les indications sur les objectifs poursuivis à travers ces résolutions sont rares. Dans le cas des problèmes de « robinets » (contrairement à ceux de production ou de mélange) il n'y a pas d'applications pratiques immédiates. Il est vraisemblable que ces problèmes étaient proposés pour donner l'occasion d'aborder plusieurs types de situations proportionnelles et inversement proportionnelles. Des idées de transfert peuvent être implicites. Dans une reprise, maintenant que le temps a supprimé les anciens souvenirs désagréables, ces situations pourraient être considérées comme des introductions à des opérations « abstraites » ou à des « obstacles » qui permettent de dépasser des situations proportionnelles.

Niveaux : il s'agit du niveau de référence (voir EVAPM) et d'autres niveaux possibles. La classe[23] des niveaux peut contenir diverses échelles : âges, niveaux scolaires, niveaux taxonomiques, etc.

Angle d'attaque : un problème peut être résolu de plusieurs façons, selon les ressources à disposition et des préférences personnelles.

Analyse (selon angle d'attaque et niveau) : cette catégorie de critère est liée à une analyse *a priori*. Elle a été largement explorée dans la description des problèmes élaborés pour le rallye mathématique transalpin[24].

Mathématique : ce critère indique de façon générale les notions, les objets et les techniques mathématiques mis en œuvre dans la résolution.

Instruments : ce critère indique les outils (compas, équerre, calculatrice) proposés ou autorisés.

Aspect RP : indique les opérations de résolution (techniques) et les opérations intellectuelles à effectuer, et les démarches mises en œuvre. Exemples : « utiliser les techniques de calcul », « construire le symétrique d'une figure ». Certaines peuvent prendre une connotation d'opération mentale : « Se représenter mentalement des transformations », « Reconnaître une figure symétrique[25] ». Ces opérations sont hiérarchisées, certaines sont générales, d'autres plus spécifiques. Ce critère correspond aux « capacités » de EVAPM.

Compétences : cette rubrique résume, selon un modèle à préciser, ce que la résolution de l'activité (totale ou partielle) permet d'induire du point de vue des compétences de celui qui a mené la tâche à bien. Selon la vision des compétences exposée précédemment cette rubrique est dépendante (voire totalement déduite) de la famille du problème. Cette rubrique peut être imaginée dans sa forme par une matrice extraite du modèle de la figure 3. A cette matrice analytique peut correspondre une formulation synthétique, par exemple : « résoudre une situation dont certains éléments sont donnés par des nombres ».

Points attribués : ils sont liés à un usage standard, « clé en main », du problème.

[23] Voir l'annexe 2 pour une précision concernant l'usage de ce vocable.

[24] http://www.rmt-sr.ch. Des questions sont également visibles sur le site et dans le système Ermitage (http://www.projet-ermitage.org).

[25] Voir http://www.projet-ermitage.org/concours.pdf.

Documentation

Historique et références : l'expérience montre que les problèmes ont une longue vie, faite d'alternatives et de variantes[26]. Cette rubrique, en partie à caractère culturel, contribue à rendre à César ce qui lui appartient. Elle permet aussi de diriger la mise au point d'autres versions du problème en fonction des objectifs poursuivis.

Auteur, institution : cette rubrique concerne la version du problème.

Participation à des évaluations et résultats : les épreuves auxquelles le problème a été associé sont indiquées. Ce critère permet de reconstituer les épreuves. Certains indices sont liés à cette rubrique. Ce point souligne la question de savoir comment conserver le « plan expérimental »[27] à la base d'une épreuve ou d'une batterie d'épreuves.

Analyse d'erreurs et autres remarques : cette rubrique indique les erreurs commises, voire des procédés de résolution non encore répertoriés.

Indices : plusieurs statistiques devraient être disponibles à propos du problème. Par exemple : indices de facilité (globale, technique, notionnelle, de contexte), discriminance, etc. Ces indices peuvent être fournis par l'IRT (Auger & Seguin, 1986 ; Baker, 2001) mais aussi par les analyses classiques. Des indices pourront donner des corrélations entre les différents items d'une même activité. Il s'agirait également d'étudier les possibilités d'utiliser des indices « d'implication » statistique (Gras, 1996), la matrice de circulation (Pochon & Favre, 2007) ou encore le poids à attribuer à chacun des paramètres de l'activité dans le niveau de difficulté général. Ces indices devraient, à partir d'un premier travail empirique éventuel, être mis à jour au fur et à mesure de l'usage de l'activité décrite (voir aussi Wuttke & Wolf, 2007 pour un modèle d'évaluation des tâches complexes).

[26] Voir par exemple l'activité « Saute-mouton » dans le site Ermitage (Didactique / Divers / Pions sauteurs).

[27] Des épreuves parallèles peuvent avoir été conçues pour mettre en évidence l'influence de certaines variations dans les énoncés. D'autres épreuves peuvent proposer des questions reliées à la même thématique. D'autres enfin peuvent être organisées de manière à mettre en corrélation certains résultats (par exemple la maîtrise d'un outil pour lui-même ou en situation).

Vers la sélection de vocabulaire

Chaque critère peut à son tour faire l'objet d'une description plus fine. Ce travail devrait être mené après que les grandes catégories de critères auront été stabilisées. Afin d'assurer une certaine homogénéité au travail, la méthodologie liée aux ontologies (une description plus complète se trouve dans Pochon, 2006b) est proposée, dont le vocabulaire est donné en annexe 2. Des schémas liés à cet usage pourraient être établis pour chacun des critères. A titre d'exemple, l'annexe 3 présente la description du domaine mathématique en termes de domaines[28], notions, objets, techniques-procédures, avec des relations entre les classes et à l'intérieur des classes. Par rapport aux représentations actuelles sous la forme de tableaux matriciels bi voire tridimensionnels, cette technique offre une plus grande souplesse.

L'aspect RP se décline en classes de démarches qui se décomposent chacune en sous-classes de démarches particulières auxquelles se rattachent des opérations.

À une description de plus en plus fine des différents critères auxquels sont associés des valeurs « contrôlées », on peut toutefois préférer des critères plus grossiers dont les valeurs sont données par du texte libre (*full-text*) qui sera ultérieurement indexé et catégorisé de façon automatique. Le traitement, en partie manuel, d'une base de données expérimentale de problèmes devrait aider à trouver un équilibre entre ces deux approches.

Cette approche déconnecte la structure des enregistrements de la base de données de la description de ceux-ci. Elle établit des ponts entre les descriptions et permet, (du moins théoriquement et il s'agirait de jauger le coût de cette proposition) de multi-indexer certaines tâches, par exemple de placer les calculs de surfaces à la fois sous « grandeurs & mesures » et sous « géométrie ».

Dans le même esprit, les travaux d'HarmoS ont aussi montré la difficulté posée par le domaine de la *stochastique* qui peut être utilisé pour regrouper les notions relevant de la combinatoire et des probabilités. D'autres propositions placent les probabilités dans « grandeurs & mesures » (ce qui est cohérent d'un point de vue mathématique) quant à la combinatoire[29], il est possible de l'associer aux nombres (entiers) ainsi que le propose Bourbaki (1970).

---

[28] Dans le projet Ermitage (http://www.projet-ermitage.org), la hiérarchie des domaines se limite à trois niveaux : domaine, sous-domaine, sujet.

[29] Les problèmes de combinatoire à l'école sont surtout liés à une démarche incluant des dénombrements.

Pour conclure

En définitive, bien que la réalisation d'une banque de données d'items ou d'épreuves reste une opération relativement circonscrite et souvent pratiquée, il conviendrait dans le cadre d'une entreprise de « grande » envergure de repenser l'opération en ayant en tête diverses contraintes :

- la possibilité d'usages multiples (épreuves de différents types pour différentes fonctions) ;
- la possibilité d'intégrer ou de calculer différents types de paramètres statistiques (analyse des items selon des techniques IRT) ;
- l'ouverture, dans un proche avenir, à l'administration d'épreuves sur ordinateur.

Ceci tout en ayant un système assez souple pour résister aux vagues et modes successives en ce qui concerne les outils informatiques de diffusion.

Le problème sera vraisemblablement de rassembler dans un seul système les modèles divers en vigueur actuellement en Suisse romande. Toutefois, la souplesse du modèle proposé devrait permettre à chacun d'adapter, de retrouver sa manière de faire tout en permettant les convergences si elles sont souhaitées. L'idéal serait de pouvoir se rallier à une théorie dont découlerait l'ensemble de l'organisation, qui la plupart du temps reste pragmatique.

Dans la suite du travail, outre les validations empiriques qui ont déjà été mentionnées, ces propositions seront également à étudier dans d'autres domaines. Des liens seraient encore à tisser avec les nouveaux plans d'études[30] qui proposent également un modèle relativement complexe dont certaines parties (exemples d'activités, obstacles) rejoignent des informations proposées pour les activités à intégrer dans des épreuves[31]. Il s'agira également de préciser ce qu'il est possible techniquement d'envisager et la structure informatique à mettre en place, sans toutefois céder le pouvoir de l'organisation à la technologie.

[30] Des anciennes versions de plans d'études de mathématiques (mentionnés dans la bibliographie) pourraient être utiles pour s'assurer d'une certaine compatibilité avec d'anciens critères et/ou dénomination encore en vigueur.

[31] Selon communication orale de Christian Merkelbach, Chef de projet.

Bibliographie

Antonietti, J.-P., Moreau, J., Moser, U. & Ramseier, E. (2006). *HarmoS : guide méthodologique : état octobre 2006*. Berne : CDIP (document à l'usage des consortium).

Auger, R. & Seguin, S. (1986). Le modèle de Rasch et la paramétrisation d'une banque d'items et d'instruments de mesure. *Mesure et évaluation en éducation, 9*(2/3), 59-98.

Baker, F.B. (2001). *Basics if item response theory*. [S.l.] : ERIC Clearinghouse on Assessment and Evaluation, University of Maryland (http://edres.org/irt/baker/final.pdf, pages consultées en août 2006).

Bareil, H. & Bodin, A. (2002). *Taxonomie de R. Gras – développée : grille d'analyse des objectifs du domaine mathématique et de leurs relations avec des compétences générales*. [S.l.] : Observatoire EVAPM (http://ctug48.univ-fcomte.fr/evapm/DOCETART/Taxonomie_2.pdf, pages consultées en janvier 2005).

Bodin, A. & Couturier, F. (1993). Développement d'une base de données d'évaluation en mathématiques : EVAPMIB. *Pédagogies, 5*. (numéro des Cahiers du laboratoire de pédagogie expérimentale de l'Université de Louvain consacré à « Evaluation externe et banques d'items »).

Bonnet, G. (2004). Evaluation of education in the European Union : policy and methodology. *Assessment in education, 11*(2), 179-191.

Bonnet, G. et al. (2003). Culturally balanced assessment (C-bar) of reading. Paris : Ministère de de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche.

Bourbaki, N. (1970). *Eléments de mathématique : théorie des ensembles*. Paris : Hermann.

Brousseau, G. (2004). *Tâche, situation, activité*. (http://www.ssrdm.ch/SSRDM/actualite/materiels/tachebrousseau.pdf, pages consultées en juillet 2005).

Cardinet, J., Knopf, P. & Weiss, J. (1985). *Quelles banques d'items pour demain*?. Neuchâtel : IRDP (IRDP/R 85.01) (Cahier du GCR/SSRE 10).

Charnay, R. (2006). Rallyes mathématiques : quel intérêt ? *Grand N, 78*, 53-63.

Chastellain, M., Calame, J.-A. & Brêchet, M. (2003). *Mathématiques 7-8-9 : fonctions, logique et raisonnement*. Neuchâtel : CIIP ; Lausanne : LEP.

Commission romande des moyens d'enseignement (COROME). Groupe de travail "Information". (1996). *Maths : compter avec les élèves : enseignement des mathématiques en Suisse romande : introduction aux nouveaux moyens*. Neuchâtel : COROME.

Commission romande des moyens d'enseignement (COROME). (1997). *Plan d'étude romand de mathématiques 1-6*. Neuchâtel : COROME.

Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique (CDIP). (1998). *Espaces de liberté, lignes directrices, point de convergences : l'enseignement des mathématiques durant la scolarité obligatoire : propositions d'harmonisation*. Berne : CDIP (Dossier 49) (paru également dans Math-Ecole, no 188, août 1999).

Crahay, M. (2006). Dangers, incertitudes et incomplétudes de la logique de la compétence en éducation. *Revue française de pédagogie, 154*, 97-110.

De Ketele, J.-M. & Gérard, F.-M. (2005). La validation des épreuves d'évaluation selon l'approche par les compétences. *Mesure et évaluation en éducation, 28*(3), 1-26.

Defelix, C. (1999). Une classification pour gérer les compétences ? : le mariage difficile de l'individu et de l'organisation. *Annales des Mines, juin*, 77-89.

Falmagne, J.-C., Cosyn, E., Doignon, J.-P. & Thiéry, N. (s.d.). *The assessment of knowledge in theory and in practice*. (Science_Behind_ALEKS.pdf sur http://www.aleks.com/, pages consultées en novembre 2005).

Gras, R. (1996). *L'implication statistique : nouvelle méthode exploratoire de données*. Grenoble :La pensée sauvage.

Gras, R. (2002). *Taxonomie d'objectifs cognitifs*. [S.l.] : Observatoire EVAPM. (http://ctug48.univ-fcomte.fr/evapm/DOCETART/Taxonomie_1.pdf, pages consultées en janvier 2005).

Groupe pour l'ajustement des programmes de mathématique. (1987). *L'ajustement des programmes expérimentaux de mathématique en Suisse romande*. Neuchâtel : IRDP (Ouvertures 87.401).

Jonnaert, P. (2002). *Compétences et socioconstructivisme : un cadre théorique*. Bruxelles : De Boeck.

Klieme, E. et al. (2004). *Le développement de standards nationaux de formation : une expertise.* Bonn : Ministère fédéral de l'éducation et de la recherche (BMBF) (traduction française assurée par la CDIP).

Le Boterf, G. (1994). *De la compétence : essai sur un attracteur étrange*. Paris : Les Éditions d'Organisation.

Margot, A. (1984). *Création d'une banque d'items de mathématique : du traitement documentaire des items à l'informatisation du système*. Neuchâtel : IRDP (IRDP/D+M 84.09).

Nadolski, R.J., Kirschner, P.A., van Merriënboer, J.G. & Wöretshofer, J. (2005). Development of an instrument for measuring the complexity of learning tasks. *Educational research and evaluation, 11*(1), 1-27.

Perrenoud, P. (1994). Compétences, habitus et savoirs professionnels. *European journal of teacher education, 17*(1/2), 45-48.

Perrenoud, P. (2000). *Compétences, langage et communication : conférence au Colloque « Le développement des compétences en didactique des langues », Louvain-la-Neuve, 23-27 janvier 2000*. Genève : Université, FAPSE.

Pochon, L.-O. (2006a). Variations sur un problème connu. *Math-Ecole, 217*, 4-8.

Pochon, L.-O. (2006b*). De la possibilité d'usages d'ontologies pour la gestion de contenus mathématiques : version 04.05*. Neuchâtel : IRDP (Document de travail 06.1007).

Pochon, L.-O. & Maréchal, A. (2006c). *Regard sur des activités mathématiques supportées par les TIC*. Neuchâtel : IRDP (Document de travail 06.1002).

Pochon, L.-O. & Favre, A. (2007). *Connaissance, théorie de l'information et hypertextes : histoire d'une lecture sélective*. Neuchâtel : IRDP (Document de travail 07.1001).

Réponses à M. Crahay de Y. Matheron, B. Schneuwly et A. Sierpinska (http://educmath.inrp.fr, dans la rubrique "En débat", pages consultées en août 2007).

Rey, B. (2007). Mettre en œuvre et évaluer des compétences à l'école primaire. *Educateur, 4*, 26-28.

Schneider, C. (2006). Towards a field ontology. *Dialectica, 60*(1), 5-27.

Weinert, F.E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen : eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. Weinert (Ed.), *Leistungsmessung in Schulen* (pp. 17-31). Weinheim : Beltz.

Wuttke, E. & Wolf, K.D. (2007). Développement d'un instrument permettant d'évaluer la capacité à résoudre des problèmes : résultat d'une étude pilote. *Revue européenne de formation professionnelle, 41*, 95-115.

Annexe 1 : Une typologie de la signification (A. Bodin)[32]

Pour l'analyse de la pertinence et de la validité, nous croisons l'utilisation des taxonomies habituelles avec ce que nous appelons une typologie de la signification. Pour cela, nous distinguons plusieurs niveaux d'appel du concept et d'intervention de celui-ci, sans pour autant chercher à hiérarchiser ces niveaux. Chaque question d'évaluation peut ainsi être repérée en ce qui concerne le sens du savoir mis en jeu.

Voici, brièvement décrite, cette typologie.

Niveau des REPRÉSENTATIONS

Il s'agit des images mentales, mais aussi des images physiques du concept (signifiants). Ce niveau caractérise le sens que l'élève accorde au concept ou à la notion, indépendamment des procédures dont il peut disposer pour traiter des questions où le concept opère et des formulations qu'il peut utiliser. Par exemple, concevoir une droite comme infinie n'est pas de même ordre que le fait d'énoncer « une droite est illimitée" », phrase apprise qui n'a pas nécessairement de signification claire pour celui qui la prononce.

Niveau de la COMMUNICATION

Dans bien des cas, le recours au concept n'est justifié que pour décrire une situation ou pour coder des informations. Ici, le concept intervient au niveau du langage. C'est ce qui se passe pour le concept de vecteur lorsqu'on énonce :

Soit ABCD un quadrilatère tel que : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$

Niveau de l'OBJET

Dans ce cas, la tâche porte sur l'objet mathématique lui-même, sans support plus ou moins concret qui en assurerait un autre type de signification. Par exemple, un élève peut résoudre une équation donnée sans être capable de communiquer sa démarche ou de valider ses résultats, sans savoir à

[32] http://ctug48.univ-fcomte.fr/evapm/DOCETART/signification.pdf (consulté: août 2007)

quel type de problème elle se rattache ni être capable de l'utiliser comme outil dans une autre situation.

Niveau de l'OUTIL

Pour R. Douady : « Par outil, nous entendons son fonctionnement scientifique (du concept) dans les divers problèmes qu'il permet de résoudre ». Un concept prend son sens par son caractère outil, ou encore : « ...avoir des connaissances en mathématiques c'est être capable d'en provoquer le fonctionnement comme outils explicites adaptés dans des problèmes qui lui donnent leur sens ».

L'analyse d'épreuves d'examens, même bien équilibrées en terme de contenus et de complexité, montre que bien souvent, elles se cantonnent au niveau de l'objet :

- *résoudre telle équation,*
- *effectuer tel calcul,*
- *tracer la courbe d'équation...*

Le plus souvent, la situation ne permet pas de savoir si l'élève a acquis autre chose que des mécanismes, et s'il est ou non capable d'utiliser ses connaissances comme outils dans la résolution des problèmes.

Annexe 2 : Le vocabulaire des ontologies

La notion principale est celle de *classe*. Les *classes* sont au sens de la logique classique des ensembles d'*objets* (en l'occurrence des termes de la classification des problèmes). Une *classe* peut être une *sous-classe* d'une autre *classe*. Les *classes* peuvent être des *objets* d'autres *classes*. Les *individus* sont des *objets* qui ne sont pas des *classes*. Chaque *objet* (mot de la classification) fait nécessairement partie d'une *classe* (est une *instance* d'une *classe*). Par exemple pour la classification des activités mathématiques, on peut considérer la *classe* des notions mathématiques. L'addition est une *instance* de notions. Cette répartition en *classes* peut se révéler délicate. Par exemple : la notion « d'opération » (instance de la classe des notions) peut également être considérée comme une *classe* dont « l'addition » est une *instance*. Plusieurs choix s'avèrent possibles pour résoudre cette difficulté.

1) Il est possible de considérer l'« opération » comme un *individu* de la *classe* des notions et d'introduire une relation à l'intérieur des notions, permettant de les hiérarchiser. L'« addition » va être également un *individu* de la *classe* des notions et sera référée à « opération » comme une sous-notion

2) Ou alors « opération » est prise comme *sous-classe* de la *classe* des notions. L'« addition » est alors un *individu* de la *(sous-)classe* des « opérations » et, par transitivité de l'appartenance, elle est également un *individu* de la *classe* des notions.

3) Selon la technologie adoptée, les deux solutions peuvent coexister. La solution est d'introduire les deux objets : « opération » (*individu*) et « OPÉRATION » (*classe*), avec une relation standard entre les deux objets.

4) On peut aussi décider que tout est *classe* (la *classe* des additions pouvant contenir l'addition des nombres, celle des vecteurs, etc.).

Dans le cas particulier, la classification des activités mathématiques se fera selon divers critères et l'on n'attribuera le statut de *classe* qu'à un niveau classificatoire (souvent le premier) qui est à l'interface entre des concepts généraux et des concepts spécifiques à l'intérieur du critère considéré.

Du point de vue de la structure des données, on utilisera la notion de *frame* (*frame-classe* et *frame-individu*) constitué d'un ensemble de *slots* qui permettent d'attribuer des *valeurs* à certains *attributs*. Et ainsi de définir des relations. La relation (donnée par un *slot*) « *instance-of* » permet, par exemple, de connaître les objets appartenant à une classe. Les *facets*, liées à chaque *slot* déterminent les valeurs autorisées. Pour les *classes*, on distingue les *slots* et *facets* « propres » et ceux dits « *template* » dont les valeurs seront héritées par les *individus* de la *classe* et de ces *sous-classes*. Une *classe* « abstraite » est une *classe* sans instance. *Classes* « abstraites » et « concrètes » peuvent être distinguées grâce à un *slot* particulier.

Annexe 3 : Description du domaine

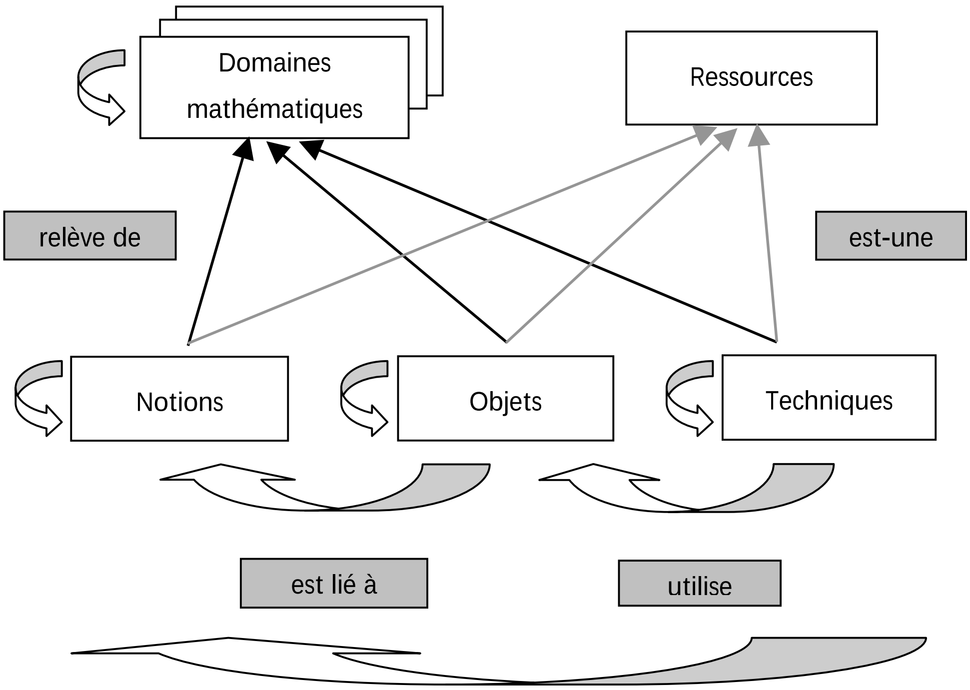


Figure 3.1. Description du domaine mathématique

Le schéma de la figure 3.1 amorce l'analyse d'une partie des ressources, celle des sous-classes qui relèvent de différents domaines des mathématiques (les autres sous-classes sont les instruments et les démarches).

Les classes suivantes (indiquées par des rectangles clairs dans la figure 3.1) sont représentées :

Domaines mathématiques (alias « filières », « thèmes », « chapitre », « avenue », etc.) : des exemples (instances) sont : « classements et mises en relations », « fonctions et applications » etc. Les domaines PISA sont : « quantités », « espace et formes », « fonctions et relations », « incertitude ». On peut considérer des relations internes de subordination (sous-domaine, sujet) ou des apparentement. Le vocabulaire peut-être lié au niveau considéré (un calcul lacunaire des petits degrés correspond à une équation de l'enseignement secondaire).

Notions (alias « concepts ») : exemples d'instances : « nombre entier », « fonction ». De nombreuses relations internes peuvent être considérées : « repose sur » (alias « pré-requis ») (exemples : « proportionnalité » « repose sur » « fonction linéaire »), « cas particulier de » (exemples : « fonction linéaire » « cas particulier de » « fonction affine »), « restriction de » (exemples : « petit nombre entier » « restriction de » « nombre entier »), « sous-notion » (exemples :« addition » « sous-notion » « opération »), « est liée à ».

Objets : les instances de cette classe recoupent en partie celles de la classe précédente. Un nombre est à la fois objet et lié à la notion de nombre (de plus c'est un domaine de connaissance). Une relation interne est « exemple de » (« 3 » « un exemple de » « nombre »)[33]. Autre exemple : « diagrammes ensemblistes ».

Techniques (alias : « outils ») : exemples d'instances : « addition en colonne », « construction du symétrique d'une figure », « traçage d'une parallèle à une droite donnée », « classement en suivant un critère donné »[34]. Les relations internes possibles sont également en grand nombre : « repose sur » (« algorithme de division », « repose sur », « algorithme de soustraction »), « cas particulier de » (« algorithme de division », « cas particulier de », « algorithme »), « est liée à ».

Ressources : classe abstraite destinée à rassembler des savoirs mathématiques aussi bien que transverses.

Des relations[35] existent entre ces différentes classes. Un objet mathématique est lié à une certaine notion, une technique utilise certains objets, etc.

Les différentes classes pourraient être croisées avec les degrés scolaires. Cet usage permettrait d'éliminer, par exemple, « utiliser l'algorithme d'addition, additionner avec de grands nombres » au premiers degrés ou d'appeler « Calcul lacunaire », ce qui à un degré plus élevé est désigné par « Résolution d'équations»[36].

Cette description du domaine ne présuppose pas du rapport de la notion, de l'objet ou de la technique avec la tâche décrite. Ainsi, la notion de groupe pourra être ensuite un outil utilisable pour résoudre le problème (analyse) ou alors être une notion étudiée pour elle-même (description de l'activité / aspect mathématique, éventuellement classification / famille a priori).

Une relation interne permettrait de fabriquer des « champs » notionnels ou conceptuels. Par exemple celui de la proportionnalité qui peut renvoyer à la géométrie (homothétie), aux fonctions, à la mesure, etc.

---

[33] Cette description « méta mathématique » est à distinguer du langage de la théorie des ensembles. Ce n'est pas l'organisation mathématique qui est proposée ici, mais une classification de « vocabulaire ». La notion de « nombre entier » et la notion d'« ensemble de nombres » sont, par exemple, considérées au même niveau dans la classe des notions.

[34] La maîtrise d'une de ces techniques est présentée sous le terme « compétences particulières » dans le document du GRAPMATH.

[35] Une relation entre les classes E et F est une sous-classe de E x F.

[36] Ce dispositif est mis en œuvre dans le projet Ermitage.