06.1
JANVIER 2006

L'épistémologie des enseignants : quel impact sur les procédures des élèves en mathématiques ?

Magali Delémont

Institut de recherche et de documentation pédagogique

L'épistémologie des enseignants : quel impact sur les procédures des élèves en mathématiques ?

Magali Delémont

IRDP
Faubourg de l'Hôpital 43
Case postale 556
CH-2002 Neuchâtel

Tél. +41 (0) 32 889 86 18
Fax +41 (0) 32 889 69 71

E-mail: documentation@irdp.ch
http://www.irdp.ch

Fiche bibliographique

DELEMONT, Magali. – L'épistémologie des enseignants : quel impact sur les procédures des élèves en mathématiques ? / Magali Delémont. - Neuchâtel : Institut de recherche et de documentation pédagogique (IRDP), 2006. - 60 p. ; 30 cm. - (06.1)

CHF 10.00

Mots-clés: *Mathématique, Résolution de problème, Innovation pédagogique, Méthodologie, Moyen d'enseignement, Observation, Pratique pédagogique, Comportement de l'enseignant, Représentation mentale, Influence, Compétence, Stratégie d'apprentissage, Elève*

Université de Genève – Octobre 2005
Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Section sciences de l'éducation

Mémoire présenté en vue de l'obtention du DEA en Sciences de l'éducation, Option didactiques,

Par Magali DELEMONT

Sous la direction d'Annick Flückiger
Membres du Jury:
Annick Flückiger
Jean Brun
Francia Leutenegger
Chantal Tièche Christinat

Cette publication est également disponible sur le site IRDP:
http://www.irdp.ch/publicat/

Photo de couverture : Maurice Bettex - IRDP

Table des matières

Résumé

Cette recherche a pour objectif d’étudier les relations entre l’épistémologie des enseignants, traduite dans l’acceptation et la mise en œuvre ou non des nouveaux moyens de mathématiques, et les productions d’élèves en situation de résolution de problème en dyades. En croisant les traces des élèves travaillant sur des problèmes pouvant impliquer des démarches variées et l’attitude des enseignants dégagées lors d’entretiens, les analyses ont montré un effet des croyances des enseignants quant à l’enseignement et à l’apprentissage des mathématiques sur le travail des élèves. Si cette influence ne se manifeste pas en termes de réussite globale, elle agit sur la variété des stratégies de résolution utilisées, la capacité à avancer une réponse comme telle et à formuler en mots la démarche accomplie.

Zusammenfassung

Im Zentrum dieser Studie stehen die Beziehungen zwischen der Epistemologie der Unterrichtenden, so wie sie sich in der Akzeptanz und der (Nicht-)Anwendung der neuen Mathematiklehrmittel widerspiegelt, einerseits und den Produktionen von SchülerInnen, die in Zweiergruppen mit Problemlösungssituationen konfrontiert sind, andererseits. Beim Vergleich der Spuren der SchülerInnen, die in unterschiedlicher Vorgehensweise an einem Problem arbeiten, mit den per Interviews erhobenen Einstellungen der Lehrpersonen zeigt die Auswertung, dass die Vorstellungen der Lehrpersonen in Bezug auf den Mathematikunterricht und den Mathematikerwerb Auswirkungen auf die Arbeit der SchülerInnen hat. Auch wenn dieser Einfluss sich nicht im Gesamtergebnis niederschlägt, hat er doch Auswirkungen auf die Verschiedenartigkeit der verwendeten P roblemlösungsstrategien, die Fähigkeit, eine Lösung vorzuschlagen und die dazu erbrachten Schritte in Worte zu fassen.

Riassunto

Questa ricerca ha come obiettivo di studiare le relazioni fra l’epistemologia degli insegnanti, che si esplica nell’accettazione e la messa in opera o no di nuovi strumenti di insegnamento della matematica, e le produzioni degli allievi a coppie in situazione di risoluzione di problema.

A tale scopo, sono state analizzate le procedure di risoluzione di problemi degli allievi e è emerso che queste sono variate. Sono pure stati intervistati dei docenti e analizzate le loro risposte. Incrociando queste due analisi è scaturito che le opinioni degli insegnanti circa l’insegnamento e l’apprendimento della matematica, hanno un effetto sul lavoro degli alunni. Se questa influenza non si manifesta in termini di riuscita globale, essa agisce sulla varietà delle strategie di risoluzione utilizzate, nonché la capacità a dare una risposta e a formulare a parole la procedura compiuta.

Introduction

Nous vivons aujourd'hui plus que jamais à l'heure des grandes réformes scolaires basées sur l'évolution des paradigmes d'apprentissages. Depuis 1997, des nouveaux moyens de mathématiques ont été introduits dans les classes romandes et ce changement a été suivi de près par l'Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique (IRDP). Les attitudes des maîtres et leurs pratiques en classe ainsi que les performances des élèves travaillant avec ces nouveaux moyens ont été investiguées parallèlement. Les résultats ayant été tirés séparément, il s'agissait encore de traiter un dernier volet resté inexploré, à savoir le lien entre l'attitude des maîtres œuvrant pour la première fois avec cette méthodologie et les procédures de leurs élèves déployées lors de la résolution de problèmes mathématiques. C'est ce que propose cette recherche.

Après un détour théorique en vue d'expliciter les différents facteurs influençant l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et le rôle prépondérant de l'enseignant dans ce processus, la problématique se recentrera sur un contexte d'innovation institutionnelle telle que celle de l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. Reprenant quatre profils d'enseignants face à l'innovation déjà élaborés lors d'une précédente enquête, cette recherche les confronte avec les stratégies des élèves en situation de résolution de problème. Dans un premier temps, des mesures communes seront menées sur l'ensemble des problèmes résolus par les élèves dont les enseignants ont un rapport différent à l'innovation pour dresser des comparaisons globales, en termes de réussite, de présentation du travail et des outils utilisés. Dans un deuxième temps et de manière complémentaire, un examen plus fin basé sur les spécificités de chaque problème, sera conduit en vue de cerner dans le détail les choix et la variété des procédures utilisées par les différentes classes en référence à un ensemble de possibles distinct pour chaque problème. Ces deux analyses permettront de dresser un portrait global des pratiques des élèves dont les enseignants ont une attitude différenciée à l'égard des nouveaux moyens de mathématiques. Elles permettront d'interroger l'influence de l'épistémologie des enseignants sur le travail des élèves en mathématiques et aussi, de manière indirecte, de soulever la question de l'efficacité intrinsèque à la nouvelle méthodologie proposée.

Problématique

Un réseau de facteurs conditionnant l'enseignement des mathématiques

Il ne fait nul doute que l'enseignement des mathématiques n'est pas le même à chaque degré scolaire et en chaque endroit, que ce soit à l'échelle internationale ou à l'échelle d'une l'école. Il est en effet conditionné par plusieurs facteurs prédominants que sont les données institutionnelles, l'enseignant, les interactions en classe ainsi que le savoir mathématique lui-même. Ces facteurs influençant l'enseignement des mathématiques dans toute classe ont fait l'objet de plusieurs recherches en didactique et en sciences de l'éducation, et un état des lieux est nécessaire car ils constituent un réseau de liens enchevêtrés dans lequel s'inscrit notre problématique.

Le cadre institutionnel

Le contexte général de la pratique enseignante est défini par des données institutionnelles, à savoir les plans d'études, les directives cantonales, la culture de l'établissement et les manuels et moyens d'enseignements mis à la disposition des maîtres. Ces données institutionnelles fournissent à la fois un cadre et des contraintes à la pratique enseignante, contraintes fortes qui restreignent considérablement les choix des maîtres (Robert, 2001 ; Roditi, 2005), tout en garantissant une certaine homogénéité dans le système scolaire.

Le rôle du maître

L'enseignant lui-même joue un rôle déterminant sur les apprentissages des élèves. Si certaines caractéristiques du métier sont partagées par tous les enseignants, d'autres sont plus personnelles (ambition professionnelle, conception des mathématiques, de leur apprentissage et de leur enseignement, gestion de la fatigue ou besoins de confort, de sécurité,…). C'est en fonction de son expérience, de ses compétences, de ses intérêts, de sa formation et de sa conception des mathématiques et des processus d'apprentissage, que le maître sélectionne les activités qui lui conviennent et qui font sens pour lui. Chacun n'enseigne ainsi pas de la même manière, et ces différences peuvent se traduire, entre autres, dans les performances inégales des classes. Bressoux (1994) a démontré statistiquement qu'il existe un « effet-classe », effet qui se traduit par l'inégalité des performances des élèves d'une classe à l'autre. Cet effet-classe est dû au fait que l'enseignant (et l'enseignement) est différent, mais aussi que les publics ne sont pas équivalents (nombre d'élèves, tonalité sociale, niveau moyen, hétérogénéité). Un effet-maître peut cependant être déduit de l'effet-classe : il s'agit des différences qui restent entre les classes une fois contrôlées les caractéristiques des élèves par un modèle statistique. Cependant, l'effet-classe peut, à l'école primaire, être assimilé à l'effet-maître, puisque *tous les travaux réalisés tendent à montrer que, même s'il existe un impact significatif de certains facteurs « donnés » des classes, leur pouvoir explicatif est globalement faible et qu'on peut donc attribuer une grande partie des différences à une action propre à l'enseignant. Autrement dit, l'effet-classe serait surtout le produit d'un effet-maître* (Bressoux, 2001, p.40).

L'effet-classe a un impact fort, puisqu'il explique entre 10 à 20% de la variance des acquis scolaires (Bressoux, 1994). C'est en mathématiques que l'effet-classe est le plus fort (20%). A titre comparatif, le niveau socio-économique des élèves n'expliquerait que 10% de la variance. *On peut donc en déduire qu'il existe effectivement des classes où les élèves progressent en moyenne plus que d'autres* (Bressoux, 2001, p.39) et que *l'enseignement dispensé par l'enseignant intervient largement, et de manière différenciée, sur l'apprentissage des élèves* (Robert, 2001).

Constatant l'importance de cet effet-maître, tout un courant de la recherche s'est mis à étudier les pratiques enseignantes. Beaucoup, notamment dans les pays anglo-saxons, se sont intéressées à déterminer les « bonnes pratiques enseignantes » qui se traduisent autant en termes d'efficacité (capacité à élever le niveau moyen d'une classe) qu'en termes d'équité (capacité à réduire les écarts initiaux entre les élèves). Allant au-delà de l'établissement de grandes typologies de pratiques et de la mesure de leurs effets, un autre courant s'est intéressé aux pratiques dans leur diversité et dans leurs rapports à leur contexte de réalisation. Leur projet n'est pas de s'intéresser aux pratiques pour elles-mêmes, mais *d'en connaître les modes de construction, d'organisation et de réalisation effective dans les rapports aux contextes et aux conduites d'apprentissage des élèves* (Bru, p.6, in Bressoux, 2001).

En didactique des mathématiques plus particulièrement, plusieurs auteurs [1] se sont attachés à étudier le rôle de la figure du maître, surtout au cours de *leçons ordinaires* afin de mieux saisir le fonctionnement de systèmes *didactiques ordinaires*.

Les interactions en classe

L'efficacité n'est pas une *qualité intrinsèque [du maître] qui serait indépendante des situations rencontrées* (Bressoux, 2001, p.40), mais bien au contraire le produit d'une interaction d'un maître et des élèves. Ainsi, les interactions en classe, les réactions des élèves et leur niveau de compétence en mathématiques ainsi que leur aptitude sociale (autonomie dans la prise en charge des problèmes mathématiques, capacité d'écoute et de débat…) jouent un rôle déterminant dans la pratique des mathématiques en classe.

Les recherches centrées sur l'étude du système didactique ordinaire en mathématiques situent de fait les gestes enseignants dans leur contexte social et pédagogique qui leur donne sens, et s'attachent à montrer l'évolution des places respectives de l'enseignant et des élèves (topogenèse) dans l'avancement du savoir (chronogenèse). Dans cette perspective, la notion de contrat didactique s'avère plus qu'utile pour saisir les comportements de chacun des partenaires ainsi que l'évolution de l'objet d'enseignement en cours de leçon. Le contrat didactique représente un ensemble de règles, pour la plupart implicites et en évolution, qui sous-tendent les termes des échanges entre l'enseignant et les élèves à propos d'objets à enseigner et à apprendre. Il *détermine – explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement – ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre* (Brousseau, 1986, p.51) et constitue en ce sens un système d'obligations réciproques. Il est indispensable à l'accomplissement de toute action d'enseignement. Le contrat didactique n'est par définition pas stable, et Brousseau (1986, p.53) préfère parler de *processus de recherche d'un contrat hypothétique*, ce que plusieurs chercheurs s'attachent à étudier lors de leçons ordinaires de mathématiques ou de la mise en œuvre d'ingénieries. Implicite, le contrat didactique ne se donne à observer que lors de ses ruptures. Dynamique, il avance de rupture en rupture, la connaissance étant *ce qui résout les crises issues de ruptures de contrat* (Portugais, 1995, p.42). Lorsqu'il est en crise, lorsque les élèves opposent à la dévolution de l'enseignant une contre-dévolution, lorsqu'ils n'arrivent pas à produire les réponses attendues dans un domaine en vue de le maîtriser, la situation didactique risque de glisser jusqu'à « l'évanouissement du sens » des objets enseignés (effet Topaze, effet Jourdain, glissement métacognitif et usage abusif de l'analogie définis par Brousseau, 1986). Le contrat didactique comporte plusieurs contradictions mises en évidence par Brousseau (1986), dont deux nous intéressent plus particulièrement ici. La première est le paradoxe de la dévolution des situations. Il s'agit en effet pour l'enseignant d'obtenir un certain comportement sans dire explicitement ce

[1] Voir en particulier Chevallard (1997), et les contributions à la 10e école d'été (Bailleul (eds), 1999) de didactique des mathématiques dont c'était un des thèmes principaux.

qu'il veut que l'élève fasse. La seconde est le paradoxe de l'enseignant comédien : l'enseignant, qui connaît les réponses à ses questions et sait où il veut emmener les élèves, doit jouer un rôle, il doit s'improviser acteur pour faire revivre à l'élève des situations de construction du savoir. D'un autre côté, l'élève doit accepter que l'enseignant, qui sait, ne lui transmette pas tels quels les savoirs et il doit fournir un effort pour les prendre à sa propre charge.

Perrin-Glorian et Hersant (2003) ont mis en évidence plusieurs sortes de contrats didactiques apparaissant en classe de mathématiques, ils distinguent ceux dans lesquels la responsabilité est totalement gardée par l'enseignant (contrat *d'information*) de ceux où la responsabilité est partagée. La responsabilité peut être partagée entre le maître et sa classe s'il y a un contrat *d'adhésion*, dans lequel l'enseignant s'appuie sur quelques élèves pour faire avancer son cours, ou un contrat de *production collective* (responsabilité de la production des réponses et d'une part de la validation laissée aux élèves). Avec un contrat de *production individuelle*, la responsabilité est partagée entre l'enseignant et chaque élève de sa classe, ceux-ci assumant individuellement une part de responsabilité effective dans la production de connaissances et la validation. D'une manière plus générale, Salin (1999) oppose le contrat d'implication effective (lorsque la situation adidactique est réellement dévoluée à l'élève) au contrat d'ostension assumée (situé hors d'une situation adidactique, le savoir est présenté par l'enseignant dès l'entrée dans la situation didactique, puis appliqué dans des exercices par les élèves) voire déguisée (quand l'enseignant, désireux de s'appuyer sur les connaissances antérieures des élèves, propose des exercices avant la présentation du savoir, et qu'il traite les réponses en effectuant un tri, parmi elles, pour valoriser celles qui conduisent assez rapidement au savoir visé sans prendre réellement en compte les autres). Le type de contrat est ainsi souvent lié à la situation dans laquelle il est mis en œuvre, cependant *il est bien sûr possible que la situation choisie ait des potentialités adidactiques mais que le professeur soit amené à négocier à la baisse et se replie sur un contrat d'ostension ; l'élève apprend alors à reconnaître les occasions d'emploi d'un savoir sans prendre en charge ce qui justifierait ce savoir* (Perrin-Glorian, Hersant, 2003, p.254). Il est aussi fort intéressant de voir si l'enseignant choisit ou non des situations qui ont un milieu laissant certaines potentialités adidactiques, et s'il laisse à la charge du milieu les rétroactions que ce dernier peut fournir.

Le contenu mathématique

L'apprentissage dépend des situations étudiées, en classe notamment, pour le contenu mathématique qu'elles comportent mais aussi pour l'organisation de la rencontre entre l'élève et le savoir. Les contenus proposés par les moyens d'enseignements sont, selon la théorie de la transposition didactique de Chevallard (1991), issus du savoir savant et/ou de la technologie, et modifiés pour s'adapter aux contraintes scolaires. L'ampleur de la question de la traduction des programmes et des manuels dans les pratiques enseignantes nécessiterait à elle seule plusieurs études. Du point de vue du savoir mathématique, cette interprétation est l'objet des recherches en transposition didactique (Chevallard, 1991), et plus particulièrement sur la transposition interne. Ces derniers travaux tentent de cerner les distances entre le savoir à enseigner et le savoir réellement enseigné (Conne, 1986). *Au départ, l'enseignant a des objectifs en termes d'apprentissages globaux et génériques, alors qu'à l'arrivée les moyens correspondants, à envisager pour la classe, doivent être parcellisés, adaptés au quotidien et diversifiés, adaptés à des publics différents, même dans une seule classe* (Robert, 2001, p.62). Ainsi, pour s'adapter à la réalité, il y a un travail de l'enseignant : *traductions, compromis, adaptations, aménagements, voire optimisations, qui a lieu pendant la préparation des séances comme durant leur déroulement, peut porter sur des énoncés mathématiques ou concerner la gestion de la séance, mais qui a inévitablement lieu* (Robert, 2001, p.62).

L'enseignement/apprentissage des mathématiques est donc influencé par plusieurs facteurs qui pour une part se situent avant les leçons de mathématiques, lorsque l'enseignant choisit les activités en fonction des programmes, des propositions avancées dans les manuels et de ses conceptions. Pour une autre part, la pratique des mathématiques est déterminée dans la classe, lorsque sont confrontés directement les trois pôles du triangle didactique, les élèves et leurs apprentissages fournissant une rétroaction à ce que l'enseignant prévoyait de faire.

L’enseignant comme « filtre » entre les moyens d’enseignement et les pratiques de classe

Entre les moyens d’enseignement et la pratique de classe se situe donc le maître qui agit à la manière d’un « filtre » teinté. Il « colore » son enseignement en déterminant lui-même le type de savoir qui sera exposé en classe et la façon dont il le sera, et ce dans tout cadre institutionnel donné. *Alors que les professeurs utilisent le même manuel scolaire, ils s’investissent personnellement dans la conception des projets d’enseignement, exerçant ainsi leur liberté pédagogique* (Roditi, 2005, p.123). Au sein d’une contrainte relative donnée par les programmes d’études et les moyens officiels, les enseignants peuvent effectuer des choix différents de stratégie d’enseignement et de travail pour les élèves, comme l’a d’ailleurs montré Roditi (2005) dans sa recherche. Les enseignants *sont soumis à des contraintes qui déterminent en partie leur activité, mais ils disposent d’une certaine marge de manœuvre qu’ils investissent depuis l’élaboration du projet d’enseignement jusqu’à son animation en classe* (Roditi, 2005, p.172). Ce processus est influencé par de nombreuses caractéristiques personnelles de chaque maître, cependant ce ne sont pas tant l’âge, le sexe, les variables socio-économiques, la formation ou l’expérience qui nous intéressent, mais plutôt les conceptions des maîtres.

Ces conceptions découlent naturellement de leur propre rapport au savoir. Si ce concept est le plus souvent accolé au pôle élève [2] dans les recherches, il n’en reste pas moins que l’enseignant entretient lui aussi un rapport personnel aux mathématiques. L’enseignant, en tant qu’être *indissociablement humain, social et singulier, interprète le monde, fait sens du monde, des autres et de lui-même* (Charlot, p.48, in Maury & Caillot, 2003) et se forge des conceptions sur les mathématiques et sur la manière de les enseigner. En se sens, c’est un double rapport au savoir : savoir mathématique d’une part, et savoir didactique d’autre part. Le rapport au savoir est influencé par les différentes appartenances à de multiples institutions, comme le rappelle Chevallard (in Maury & Caillot, 2003, p.83) : *nos rapports personnels sont ainsi le fruit de l’histoire de nos assujettissements institutionnels passés et présents*, mais *la relativité institutionnelle de la connaissance est marquée à la fois par l’existence d’une diversité pratiquement illimitée de façons de « connaître » un objet o et par l’inexistence d’un « bon rapport* universel, reconnu comme tel en toute institution » (p.85). De même que Robert (2001, p.66), nous admettrons que *le rapport au savoir mathématique de chaque enseignant, compris au sens large, avec la compétence mathématique et les activités mathématiques propres de l’enseignant, devient important à considérer dans toute sa complexité (non réductible à une somme de connaissances mathématiques actuelles par exemple) afin de pouvoir reconstituer la démarche professionnelle dans son ensemble, dans ses dimensions disciplinaires, pédagogiques, voire institutionnelles.*

Cette recherche se focalisera sur le pôle enseignant, et en particulier sur les conceptions des maîtres à propos de l’apprentissage et de l’enseignement des mathématiques. Bien que le contexte puisse entrer en opposition, les conceptions des enseignants, fonctionnant comme une sorte d’idéal à atteindre, orientent d’une manière générale la pratique enseignante durant la planification comme lors les leçons. Margolinas (2001), lorsqu’elle démêle et hiérarchise les pratiques imbriquées des enseignants, introduit le niveau « noosphérien » ou « idéologique » (P+3) qui caractérise l’activité du professeur qui réfléchit de façon très générale à l’enseignement global et à celui des mathématiques, sans que son activité soit finalisée. Elle signale elle aussi un aller-retour entre les différents niveaux, une influence réciproque notamment entre des conceptions générales de maîtres sur leurs pratiques et inversement. Les conceptions donnent un cadre au projet finalisé d’enseignement, et en retour, la pratique en classe fournit un feed-back amenant éventuellement à modifier les conceptions originales.

Salin (1999) a aussi démontré un lien entre les conceptions des maîtres relatives à l’enseignement des mathématiques et leurs pratiques en classe. Les conceptions des maîtres fourniraient effectivement une part d’explication à la persistance des pratiques ostensives, bien que les enseignants en connaissent les limites du point de vue des apprentissages des élèves. Cependant, si les conceptions relevant d’une épistémologie empiriste sont liées à cette pratique, celle-ci est aussi en bonne partie déterminée par les contraintes de la situation didactique (difficulté à mettre en œuvre des compétences fines, variées et expertes dans l’immédiat

[2] Dans ce cadre-là, le rapport au savoir était défini comme *le rapport au monde, à l’autre et à soi-même d’un sujet confronté à la nécessité d’apprendre* (Charlot in Maury & Caillot, 2003)

du jeu de l'interaction avec les élèves). Cependant, bien que le décalage entre discours et pratiques soit reconnu, on peut faire l'hypothèse qu'un maître convaincu des bienfaits du socioconstructivisme cherchera à mettre en place et à dévoluer des situations permettant aux élèves de construire leur savoir en interaction avec leurs pairs. Tandis qu'un maître qui ne croit pas aux vertus mises en avant par les nouvelles méthodologies privilégiera le travail individuel, et tendra plutôt à exposer le savoir avant que les élèves ne le mettent en pratique, instaurant ainsi un contrat d'ostension déguisée (sous-produit de la difficulté d'enseigner au moyen de situations-problèmes) voire assumée (Salin, 1999).

L'épistémologie des enseignants chez Brousseau

Dans la théorie des situations didactiques, Brousseau (1996) avait déjà relevé l'importance de ce qu'il nomme *l'épistémologie des enseignants*, à savoir le *répertoire de connaissances explicites ou implicites, de nature épistémologique, particulier à un enseignant* (Portugais, 1995, p.43). Il précise ce qui peut relever des conceptions des maîtres et dresse un premier lien avec la pratique enseignante. *Ainsi dans sa pratique, son vocabulaire, ses exigences, etc. le professeur mobilise des « concepts » ou des « lois » qui ont pour objet de permettre l'action de l'élève et de justifier des décisions du professeur. « Comment chercher ? », « Qu'est-ce que chercher ? », « Comment apprendre ? », « Comment comprendre ? » etc. sont des questions que se posent l'élève et le professeur et auxquelles ils répondent implicitement par leurs pratiques, témoignant ainsi d'une sorte d'épistémologie spontanée et fonctionnelle* (Brousseau, 1999).

La croyance épistémologique des enseignants a pour origine le besoin de satisfaire les besoins de leur profession : *elle peut être une vérité ou une erreur épistémologique et dans les deux cas être utile ou même nécessaire (…), car elle est à la fois un moyen de « lecture » des mathématiques, un moyen de les concevoir comme les connaissances projetées pour les élèves, un moyen d'interpréter les comportements des élèves comme des écarts par rapport à cette norme, et leur moyen d'envisager une intervention* (Brousseau, communication du 2.12.1999). Alors que cette épistémologie devrait être proche de celle du mathématicien, de par les contraintes propres au système didactique ainsi qu'à la transposition didactique, elle prend la forme d'une épistémologie professionnelle particulière répondant à des besoins particuliers. Reliant épistémologie des enseignants et effets sur leurs pratiques, Brousseau utilise l'exemple de la méthode Diénès pour montrer que la réussite vient avant tout de l'investissement des enseignants dans la méthode. Cet engagement se traduit dans des interactions particulières en classe et a un effet déterminant dans le succès ou l'échec de la méthode. Cet exemple peut être transposé à toute innovation.

L'introduction d'une innovation

Plusieurs recherches se sont interrogées au sujet des conséquences des découvertes en didactiques des mathématiques sur les pratiques enseignantes, et plusieurs concluent à une certaine perméabilité des enseignants aux travaux de didactique (Robert, 2001, Roditi, 2005, Salin, 1999). Si la thèse constructiviste est communément admise (nécessité pour l'élève de participer activement à la construction des connaissances), il n'en reste pas moins que son intégration aux pratiques pédagogiques quotidiennes demeure marginale. Plusieurs éléments de réponses à cette contradiction ont été avancés par les auteurs. Nous avons déjà parlé des contraintes de la situation réelle – sous-estimées par les chercheurs selon Robert (2001) – dans les phases d'interaction collective avec les élèves (contrôle de l'attention, de la communication, différenciation, et de l'avancée du savoir) qui impliquent pour l'enseignant tout un ensemble de connaissances didactiques mobilisables dans l'instant. Ce savoir-faire nouveau et complexe, ainsi que certaines conceptions des enseignants constituent un premier frein à l'abandon des pratiques ostensives. Selon Jonnaert (in Maury & Caillot, 2003, p.111), le paradigme socioconstructiviste *est difficilement acceptable pour les enseignants, qui, par définition, enseignent et transmettent des savoirs à leurs élèves*. Robert et Robinet (1992) ont aussi avancé l'idée que ces résistances étaient dues à des différences de représentation des mathématiques et de leur enseignement entre les enseignants et les concepteurs de séquences introductives basées sur la théorie des situations : les enseignants appliquent « à la lettre » les séquences, sans en partager l'esprit, et ne peuvent éviter que les petits décalages incontournables ne provoquent des dysfonctionnements par rapport au projet du chercheur. De plus, la nouveauté étant souvent produite de l'extérieur, « d'en haut », *peut être considérée en référence à des lieux éloignés dans l'imaginaire de l'acteur, et opérer par la distance qui la sépare des contingences et de la pratique quotidienne une intrusion dans l'univers des compétences et des savoirs professionnels de l'enseignant* (Marsollier, 1999, p.19). Il faut aussi *accepter de se séparer, de rompre et de perdre alors une part d'efficacité, de la qualité peut-être, donner de son temps et prendre le risque de l'erreur, de l'échec* (Marsollier, 1999, p.19). D'autre part, la relative lenteur avec laquelle s'effectue les transformations des pratiques enseignantes peut s'expliquer par le fait que l'enseignant, *de par son statut de fonctionnaire, se trouve de fait singulièrement protégé et, ainsi, relativement libre d'agir et de réagir comme il l'entend* (Marsollier, 1999, p.12). Et Robert (2001, p.59) de conclure : *nous sommes aujourd'hui confrontés à une autre forme d'illusion de la transparence, entre le fait de disposer de connaissances – » didactiques » ou autres – sur les apprentissages, et le fait de mettre en œuvre, en classe, des pratiques correspondantes*.

Cependant, Marsollier nuance ces résultats globaux en introduisant le concept de « rapport à l'innovation » qui n'est pas le même pour chacun, que l'innovation soit institutionnelle ou d'initiative personnelle. *La nature et le sens de l'innovation induisent naturellement des comportements multiples et variés selon les intérêts et les aspirations de chaque enseignant* (Marsollier, 1999, p.13) pouvant être accentués par l'influence d'un ou plusieurs enseignants leaders dans l'établissement. Il existe ainsi, de manière stable, des personnes ouvertes à l'innovation, opposées à un même nombre *d'enseignants réfractaires au changement, qui, de manière active ou passive, résistent ou simplement refusent toute innovation* (Marsollier, 1999, p.14). Le rapport à l'innovation est notamment déterminé par les motivations et les résistances de l'enseignant à apprendre et à s'approprier des savoirs et des savoirs-faire particuliers et nouveaux, et par la confiance en soi. Ces quelques caractéristiques évoluent en fonction de l'ancienneté dans la carrière et du contexte d'exercice professionnel.

Dans un souci d'efficacité et d'harmonie, l'institution scolaire cherche à ce que les conceptions des enseignants sur les processus d'apprentissage soient proches de celles des concepteurs des moyens d'enseignement mis à leur disposition. Cependant, l'introduction de nouveaux moyens d'enseignement produit une rupture conséquente chez les enseignants. Par les changements de rapport aux savoirs qu'elles suscitent, c'est finalement une nouvelle profession enseignante qui se profile. Modifiant ses modèles d'apprentissage en passant par exemple d'un mode de transmission à un mode de construction des savoirs, l'école provoque une réflexion importante sur les rapports que les maîtres ont aux savoirs scolaires, *mais au cœur de ce débat se situe le rapport identitaire que les enseignants entretiennent avec les disciplines scolaires qu'ils enseignent* » (Jonnaert in Maury & Caillot, 2003, p.115). Car c'est en tant qu'acteurs sociaux et acteurs de leur propre évolution qu'ils s'y impliquent.

Les nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques en Suisse romande

Les nouveaux moyens de mathématiques de Suisse romande, introduits dès l'année 1997 dans les classes de première année primaire, opèrent une rupture avec les fondements épistémologiques de l'ancienne méthodologie auxquels les enseignants s'étaient familiarisés. Des conceptions psycho-pédagogiques constructivistes inspirées des travaux de Piaget, les nouveaux moyens sont passés à un paradigme socioconstructiviste. Ce dernier soutient que 1) c'est en agissant qu'on apprend, 2) l'apprentissage est le passage d'un équilibre cognitif donné à un équilibre supérieur avec intégration et réorganisation du savoir ancien, 3) l'enseignement doit prendre en compte les représentations qui risquent de faire obstacle aux apprentissages, 4) le conflit sociocognitif peut faciliter l'acquisition des connaissances.

L'apprentissage tel que le conçoit Brousseau – et repris par les nouveaux moyens – se produit par sauts, après une réorganisation des connaissances lors de la confrontation à un obstacle épistémologique. *La constitution de sens tel que nous l'entendons, implique une interaction constante de l'élève avec des situations problématiques, interaction dialectique (car le sujet anticipe, finalise ses actions) où il engage des connaissances antérieures, les soumet à révision, les modifie, les complète ou les rejette pour former des conceptions nouvelles* (Brousseau, 1983, p.172).

Résultant des recherches en didactique des mathématiques, et des travaux de Brousseau en particulier, la nouvelle méthodologie pose le postulat de l'enseignement au moyen de situations-problèmes[3]. « La situation-problème vise la construction de nouvelles connaissances. Son enjeu réside dans l'obstacle, dans le conflit qui doit être dépassé par l'élève. Elle est conçue de telle manière que les connaissances et les savoirs-faire de l'élève se révèlent insuffisants, voire erronés. En situation-problème, le sujet, élève ou adulte, apprend « contre » ce qu'il sait » (Commentaires didactiques des nouveaux moyens, p.49). La dimension « socio » du socioconstructivisme se traduit par les interactions entre les partenaires de la classe, interactions nécessaires à la construction des connaissances et à leur validation.

La démarche d'enseignement préconisée veut passer par les quatre types de situations définies par Brousseau que sont l'action, la formulation, la validation, et l'institutionnalisation. Dans ce cadre-là, le rôle de l'enseignant est principalement de proposer des situations pertinentes (adaptées au niveau de l'élève et ayant du sens pour lui) et de les dévoluer (c'est-à-dire transférer vers les élèves une partie de la responsabilité face au savoir enjeu de l'enseignement), d'animer les mises en commun et d'institutionnaliser les savoirs (c'est-à-dire lier les connaissances des élèves au savoir institutionnel).

Ce n'est donc pas au niveau des contenus mathématiques que l'innovation se situe, mais principalement sur le plan didactique. C'est la manière d'enseigner proposée qui est fondamentalement modifiée. *La maîtrise de la notion ne suffit pas. Il est aussi nécessaire de prévoir les réactions des élèves aux processus de construction de la notion, ceci afin de pouvoir susciter le consensus, l'attendre, semer le doute, faire monter suffisamment la tension et reconnaître le bon moment pour apporter une information ou ouvrir un problème* (Salin, 1999, p.11). Ce que, selon les observations de la chercheuse, tous les enseignants ne sont pas à même de mettre en œuvre.

Une recherche longitudinale menée par l'IRDP (Tièche Christinat & Delémont, 2005) s'est intéressée à suivre l'introduction des nouveaux moyens d'enseignement dans les classes de Suisse romande. L'objectif était de cerner les discours et les pratiques des enseignants se confrontant pour la première année à ces nouveaux moyens d'enseignement uniques pour toute la Suisse romande. Plusieurs méthodologies ont été utilisées afin de rendre compte d'un maximum d'aspects liés à l'introduction de l'innovation. La recherche comportait trois axes, – l'enseignant, l'institution, les élèves – qui ont été investigués au moyen de questionnaires, d'entretiens individuels et collectifs avec les maîtres, d'observations de classes et de passations de quelques problèmes mathématiques par les élèves[4]. Trois à quatre classes de chacun des sept cantons romands (BE, FR, GE, JU, NE, VD, VS), ont été suivies de la première à la quatrième année primaire, à raison de deux visites par année. Les résultats font état de pratiques et de discours diversifiés en fonction du degré d'enseignement et du niveau de familiarisation aux nouveaux moyens. Ils montrent aussi, de même que les recherches présentées auparavant, la difficulté à mettre en œuvre les caractéristiques les plus innovantes de cette nouvelle méthodologie, de par les adaptations que les enseignants ont fait subir à de nombreuses activités et la création de nouveaux gestes professionnels. La présente étude s'appuiera sur certains résultats de cette recherche, et reprendra certaines données récoltées alors, notamment celles fournies par les entretiens des enseignants et les épreuves des élèves.

Une autre recherche réalisée par un consortium romand (Mathéval), vise à *cerner les compétences et les connaissances en mathématiques mobilisables par les élèves de 2^e^ et de 4^e^ primaire ayant bénéficié des nouveaux moyens* (Antonietti et al., 2003, p.2). L'enquête Mathéval 2P (Antonietti et al., 2003), a touché pas moins de 140 classes sur l'ensemble de la Suisse romande, et a montré, par l'intermédiaire d'une quinzaine de problèmes résolus individuellement ou collectivement par chaque élève, que les objectifs fixés par le plan d'études romand sont globalement atteints, même si les compétences dans le domaine géométrique sont

[3] Plus précisément Arsac, Germain, et Mante ont défini en 1988 les caractéristiques des situations-problèmes comme suit.

- *L'élève doit s'engager dans la résolution du problème. L'élève peut envisager ce qu'est une réponse possible au problème.*
- *Les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème.*
- *La situation-problème doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas. C'est la situation elle-même et non l'enseignant qui renvoie l'échec ou la réussite de l'activité.*
- *La connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l'élève.*

[4] Les problèmes passés par les classes suivies chaque année n'ont pas été traités dans le rapport de l'IRDP

moins homogènes que dans le domaine arithmétique. Certaines caractéristiques personnelles des élèves ou des enseignants apportent une explication à une partie des différences individuelles rencontrées. Mais globalement, la grande diversité et la richesse observées dans les réponses des élèves illustrent les effets du travail avec les nouveaux moyens et la résolution de situations-problèmes.

Une des conclusions tirée par les enquêtes de l'IRDP est que, si les composantes propres à l'innovation ont été identifiées, elles ne sont pas de fait appréciées favorablement par les enseignants. Des constatations similaires ont été faites par Burton et Flammang (2001) dans l'enseignement scientifique : bien que les enseignants soient convaincus, en grande majorité, des effets bénéfiques des approches constructivistes de l'enseignement des sciences, ils se montrent réticents à les appliquer dans leur classe, notamment parce qu'ils craignent que le temps d'apprentissage soit trop long et que les problèmes organisationnels (gestion de la classe, temps de préparation et complexification de la tâche de l'enseignant) soient insurmontables. Comme en témoigne l'usage parallèle prégnant d'autres moyens d'enseignement (90% des enseignants interrogés lors de Mathéval 2P), les enseignants n'adhèrent pas forcément a priori à cette méthodologie imposée de l'extérieur, et s'octroient la liberté de ne pas la mettre en œuvre scrupuleusement et de manière exclusive (Antonietti et al., 2003). Mais malgré ces pratiques, il est cependant vrai aussi que les maîtres, au fil des ans, intègrent peu à peu les principes fondateurs de la méthodologie qu'on leur met entre les mains (Tièche Christinat & Delémont, 2005). Les entretiens montrent en effet que les enseignants se disent davantage proches de la nouvelle manière d'enseigner les mathématiques à la fin de la deuxième année de pratique qu'au tout début.

Différents degrés d'adhésion à l'innovation

Ainsi, bien qu'on attende des maîtres qu'ils adhèrent à la nouvelle méthodologie, il est judicieux de compter avec un temps de familiarisation, le temps de se convaincre par la pratique. C'est cette période qui a été analysée par la recherche longitudinale de l'IRDP (Tièche Christinat & Delémont, 2005). Les entretiens visaient à recueillir les remarques à propos de la nouvelle méthodologie et de sa praticabilité en classe, qui sont autant de manifestations des rapports des enseignants à cette innovation. Les réponses des enseignants à des questions thématiques éclairent indirectement leurs conceptions à propos des processus d'apprentissage et leur adhésion aux principes socioconstructivistes. Quatre types d'attitudes ont été repérés (Knupfer & Tièche Christinat, 2000), qui se distinguent sur les deux variables que sont l'adhésion au paradigme socioconstructivisme et la mise en œuvre pratique plus ou moins fidèle des activités proposées :

	Adhésion aux bases socioconstructivistes	Non-adhésion aux bases théoriques socioconstructivistes
Application pratique à la lettre	*Conforme*	*Pragmatique*
Non-application pratique à la lettre	*Libre*	*Distancé*

Les quatre profils [5] repérés tout au long de la scolarité primaire possèdent les caractéristiques suivantes :

Attitude de *conformité*

Cette attitude reflète une acceptation totale de l'innovation mathématique et une volonté de l'appliquer le plus fidèlement possible, dans un souci de respect des bases épistémologiques. Les maîtres adoptant cette attitude se conforment ainsi aux indications didactiques et ont un usage quasi exclusif de la méthodologie. Ils se montrent relativement à l'aise car ils ont pour la plupart déjà adopté le paradigme socioconstructiviste en mathématiques ou dans d'autres branches avant l'innovation. Ils apprécient en outre l'approche ludique de la méthodologie ainsi que les situations-problèmes incluant des obstacles à dépasser pour acquérir des notions

[5] Pour alléger le texte, nous utiliserons parfois les initiales C, P, L, D, et nous parlerons parfois d'élèves *conformes, pragmatiques, libres ou distancés* ; il s'agit évidemment du profil de leur enseignant et non pas d'une attitude propre aux élèves.

mathématiques. D'une manière générale, le savoir mathématique et pédagogique ainsi que la pratique de classe semblent investis de manière uniforme sans rencontrer d'obstacles fondamentaux.

Application *pragmatique*

Cette attitude donne un statut prioritaire à la pratique, laissant de côté les bases théoriques. Faisant acte d'allégeance avec l'institution, ces enseignants tentent d'appliquer la méthode à la lettre. Mais comme ils éprouvent quelques difficultés à entrer dans ses fondements épistémologiques, qui sont parfois discutés, interrogés, voire remis en question, ils approchent la nouvelle méthodologie par tâtonnements et découvrent au fur et à mesure les objectifs mathématiques visés par les activités et les jeux. Bien que l'analyse a priori et approfondie des activités et la prise en compte des stratégies des élèves pour la planification des activités futures fassent défaut, la pratique en classe se révèle conforme aux mandats donnés par l'institution, même si certaines activités des anciens moyens peinent à disparaître.

Application *libre*

Cette attitude marque un certain détachement par rapport aux bases pratiques. Tout en respectant l'esprit du socioconstructivisme, les enseignants n'hésitent pas à appliquer la méthode en souplesse, c'est-à-dire à introduire des activités repêchées ailleurs lorsqu'ils estiment que cela s'avère nécessaire, de même qu'à modifier un jeu pour l'améliorer ou l'adapter. Attachés aux bases épistémologiques de la méthodologie et adhérant de plein gré à la demande institutionnelle, ils sont ainsi soucieux de savoir si les objectifs mathématiques sont atteints et c'est pourquoi ils s'octroient la liberté de changer certaines choses.

Application *distancée*

Cette attitude reste fixée au modèle béhavioriste et transmissif, les bases épistémologiques qui constituent le cœur de l'innovation n'obtenant a priori pas l'adhésion des enseignants. Ces enseignants s'efforcent de mettre en œuvre les nouveaux moyens pour répondre à la demande de l'institution, mais on sent que ceci implique pour eux une grosse réorientation qui s'avère difficile. C'est ainsi qu'ils font part d'une sensation de contrainte et d'un malaise à enseigner avec la nouvelle méthodologie. Non seulement ils se sentent bousculés par cette réforme, mais ils admettent aussi éprouver un sentiment d'insécurité dans la planification, le travail de groupe ainsi que l'évaluation des élèves.

Une évolution intra-cycle et inter-cycle [6] a été repérée entre la première et la dernière année d'observation (Tièche Christinat & Delémont, 2005). C'est-à-dire d'une part que les enseignants évoluent entre leur première (en 1P ou 3P) et leur deuxième année (en 2P ou en 4P) de mise en œuvre des nouveaux moyens de mathématiques, et d'autre part que l'ensemble des opinions a progressé entre la 1P et la 4P, probablement par le biais d'une familiarisation indirecte des enseignants des grands degrés primaires lors des discussions de salles des maîtres.

L'évolution s'est révélée positive, dans le sens d'une augmentation du nombre d'enseignants qui adhèrent aux principes des nouveaux moyens. Mais les analyses des entretiens ont aussi montré un puissant décalage temporel entre la pratique de la méthode et l'acceptation, ou plutôt l'adhésion à son paradigme sous-jacent. C'est pourquoi on repère, par l'analyse de leur discours, un bon nombre d'enseignants *pragmatiques* au début de chaque cycle, et même, à un niveau plus micro, au début de chaque année, alors que les activités du degré concerné sont encore inconnues et n'ont pas été testées. Ainsi, durant un certain temps du moins, les enseignants appliquent la nouvelle méthodologie, mais sans être convaincus personnellement de ses fondements épistémologiques. La formation et les commentaires didactiques ne suffisent pas à faire adhérer les enseignants aux principes de l'innovation ; la formation est d'ailleurs souvent jugée insuffisante, et les commentaires complexes et peu accessibles, par les enseignants interviewés (Knupfer & Tièche Christinat, 2000 ; Delémont & Tièche Christinat, 2003).

[6] Dans ce travail, le premier cycle correspond aux classes 1P et 2P, et le second cycle aux degrés 3P et 4P

Cette analyse menée dans le cadre du suivi scientifique de l'IRDP (Tièche Christinat & Delémont, 2005) montre qu'une adaptation est nécessaire et qu'une réelle adhésion, en profondeur, à la nouvelle méthodologie ne s'effectue qu'après quelques années d'usage de celle-ci. On ne peut donc attendre des enseignants qu'ils modifient radicalement et instantanément leurs conceptions sur l'apprentissage des élèves, dès le moment où ils touchent ces nouveaux manuels. Si les manuels changent d'un jour à l'autre, les mentalités et les pratiques ont besoin d'un temps d'adaptation pour coller au nouveau paradigme socioconstructiviste.

Nous pouvons supposer qu'un décalage entre les conceptions des enseignants et celles sous-jacentes à toute nouvelle méthodologie n'est pas sans effet sur la pratique enseignante et indirectement, sur les compétences des élèves. C'est ce qu'a pu prouver l'enquête Mathéval 2P (Antonietti et al, 2003) par une étude statistique montrant qu'outre l'expérience et certaines caractéristiques contextuelles de la classe (nombre d'élèves allophones, de redoublants), l'adhésion aux nouveaux moyens de la part l'enseignant était significativement et positivement corrélée aux performances des élèves. Or s'il existe un lien entre l'adhésion des enseignants aux nouveaux moyens de mathématiques et les résultats des élèves, on peut s'attendre à ce qu'il y ait aussi un lien entre cette même adhésion et les procédures des élèves.

Question de départ et hypothèses de recherche

Le long rappel théorique précédent visait à montrer le rôle central de l'enseignant sur l'acquisition de connaissances mathématiques par les élèves. Il avait aussi pour objectif de rappeler que la diversité des pratiques enseignantes et de fait, des contrats didactiques mis en place, pouvait être mise en lien avec l'épistémologie professionnelle des enseignants. Bien qu'en dernier recours, ce soient toujours les élèves qui forgent leurs connaissances et que les conséquences des conceptions des maîtres ne soient qu'indirectes et insérées dans un réseau d'influences complexes, nous nous intéresserons ici au lien entre l'épistémologie des enseignants et les procédures des élèves. Pour ce faire, nous utiliserons les typologies de profils d'enseignants déjà élaborées par l'IRDP, que nous mettrons en liaison avec les traces laissées par leurs élèves lors de la résolution de quelques problèmes.

La question de départ est donc la suivante : quel rapport existe-t-il entre l'adhésion des enseignants aux nouveaux moyens et les procédures des élèves lors de résolution de problèmes en dyades ?

Sans tenir compte de la mise en œuvre réelle des nouveaux moyens de mathématiques de Suisse romande dans les pratiques de classe (qui nécessiterait des observations détaillées sur le terrain), deux types d'enseignants peuvent être dégagés : ceux qui approuvent les bases socioconstructivistes de la méthodologie et les respectent, et ceux qui s'en distancent pour des raisons diverses. Nous postulons que ces attitudes impliquent des pratiques de classe différentes, qui se refléteront dans les procédures mises en place par les élèves lors d'une résolution de problème. Le but n'est donc pas de s'intéresser aux pratiques de classe, mais à la répercussion des conceptions des maîtres sur le travail des élèves en mathématiques. En d'autres termes, il s'agira de déterminer s'il est possible d'expliquer les effets-classe (en termes de performances et surtout de procédures) par les attitudes des maîtres envers les nouveaux moyens.

Retrouve-t-on des différences de performances entres les élèves ayant des enseignants de profils différents, comme cela a été le cas dans Mathéval ? En quoi se différencient les stratégies de résolution d'élèves dont les maîtres adoptent des attitudes différenciées vis-à-vis des nouveaux moyens de mathématiques et de leurs fondements épistémologiques ? Les élèves des différentes classes ont-ils développé d'autres méthodes générales de résolution des problèmes ?

Trois hypothèses générales peuvent être élaborées en vue de répondre à cette question de départ.

La première hypothèse avance que les élèves d'enseignants qui adhèrent aux principes socioconstructivistes se révèlent plus à l'aise dans des situations-problèmes. Cette hypothèse se traduit par trois sous-hypothèses contenant des indicateurs mesurables. D'une manière générale, le taux de réussite de tels élèves serait plus élevé que celui des élèves ayant des enseignants réticents à entrer dans les principes de la nouvelle méthodologie. Ces derniers, qui ont moins l'habitude de travailler en groupe et d'échanger leurs idées avec leurs pairs, montreraient aussi un taux de non-réponses plus élevé dans un contexte de travail de groupe. Finalement, la complexité des problèmes peut se révéler une variable différenciatrice dans la mesure où l'enseignant attaché à des conceptions béhavioristes et d'apprentissage très étayé et progressif insisterait moins sur la mise en place de problèmes transversaux où plusieurs procédures doivent être mises en œuvre pour leur résolution. On peut ainsi augurer d'une meilleure prise en charge des problèmes nécessitant plusieurs étapes de résolution par les élèves dont l'enseignant adhère à l'idée de dévolution des problèmes mathématiques et de l'apprentissage au moyen de situations-problèmes.

La deuxième hypothèse est relative aux moyens utilisés afin de résoudre le problème. Premièrement, et d'une manière générale, on s'attend à une variété des démarches produites plus élevée chez les élèves d'enseignants adhérant aux principes épistémologiques des nouveaux moyens que chez les autres. On envisage à l'inverse une relative uniformité des démarches chez les autres élèves, l'enseignant ayant une conception de l'apprentissage plus transmissive, peinant à ne pas imposer des stratégies uniformes et à laisser les élèves trouver leur propre manière de faire. Nous posons aussi l'hypothèse que cette uniformité privilégiera des techniques de résolution calculatoires des problèmes au détriment de techniques se basant sur l'utilisation de schémas. Les enseignants peu enclins aux principes socioconstructivistes accordent en effet beaucoup d'importance au domaine numérique qui prend plus souvent la forme de drill avec une suite de calculs posés tels quels que de situations-problèmes axées sur la découverte des propriétés et du sens des opérations. Finalement, on s'attend aussi à voir apparaître plus souvent chez les élèves habitués à la résolution de problème (puisque leur enseignant y adhère) des stratégies témoignant d'une représentation globale du problème. A l'inverse, on peut imaginer que les élèves peu familiarisés à une méthodologie axée sur la résolution de problème se cantonneront bien souvent à une stratégie pas à pas par essais-erreurs, bien moins performante.

La troisième et dernière hypothèse est relative aux modalités de présentation de la recherche effectuée. L'idée de Brousseau reprise par les nouveaux moyens est de fonctionner en classe sur le principe d'une mini-communauté scientifique en mettant en place des situations adidactiques. L'idée est de fournir des situations auto-validantes dont le but est de garantir l'adidacticité du milieu et de favoriser l'autonomie des élèves dans leur activité mathématique. Nous posons l'hypothèse que les élèves dont les enseignants adhèrent à ce principe et à celui de mise en commun (reprenant les situations de formulation et de validation de Brousseau) seront plus nombreux à expliciter leur démarche au moyen de mots. On imagine aussi que ces élèves seront plus nombreux à donner une réponse explicite sous forme de mots, dans le sens où cet acte démontre non seulement une autonomie dans la prise en charge du problème mais aussi un processus de vérification par un retour à la consigne.

Pour tester ces hypothèses, nous effectuerons des comparaisons entre les élèves d'enseignants dont l'attitude envers les nouveaux moyens a déjà été établie par les analyses menées par l'IRDP sur les entretiens. Ces différents profils constituent les variables indépendantes de cette recherche. Quant aux variables dépendantes, elles seront prélevées dans les traces des élèves ayant résolu par dyades des problèmes mathématiques de type numérique, transversal ou logique [7], dans un contexte évaluatif induit par la condition de recherche (en opposition à un contexte d'apprentissage). Les grilles de codage se sont attachées à relever des points précis afin de fournir les variables dépendantes constituant les différentes hypothèses. Elles comprennent :

- réponse juste ou fausse, non-réponse (hypothèse 1)
- types de stratégie mises en œuvre, en référence aux analyses a priori déjà faites et en laissant ouverte la possibilité d'en trouver d'autres (hypothèses 2+1)
- types de techniques utilisées, à savoir calcul numérique ou représentation graphique (hypothèse 2)
- explication de la démarche en mots, vérification, réponse explicite (hypothèse 3)

[7] Contrairement aux problèmes de type numérique qui sous-entendent un travail prioritaire autour du nombre et des opérations, les problèmes transversaux sont entendus ici comme se référant en plus à des notions relatives à l'espace, à la géométrie et à la mesure. Le problème qualifié de logique fait principalement appel à une démarche incluant l'émission de conjectures.

Méthodologie

Échantillon

Parmi les données récoltées lors du suivi scientifique de l'IRDP de l'introduction des nouveaux moyens de mathématiques, 43 classes primaires ont été retenues car elles cumulaient les entretiens des enseignants ainsi que les épreuves mathématiques passées par les élèves [8]. Certaines classes retenues ont des données complètes de la 2P à la 4P, et pourraient faire l'objet d'un suivi longitudinal mais ce n'est pas l'objet de cette recherche. Lors d'une analyse préalable du contenu de leur(s) entretien(s), les enseignants de ces classes ont été insérés dans des catégories spécifiques de profils. Dans l'échantillon que nous obtenons, les enseignants *conformes* et *libres* sont légèrement sur-représentés (44% et 23%) par rapport aux résultats de l'analyse de la totalité des entretiens (35% et 19%), alors que les deux dernières catégories sont sous-représentées (9% de *distancés* et 23% de *pragmatiques*, contre 14% et 32% au total). Cette sur-représentation pourrait être expliquée par le fait que les enseignants *conformes* et *libres* sont plus disposés à se soumettre aux multiples pans de la recherche que les enseignants adhérant moins aux fondements de la méthodologie. D'autre part, aucun des entretiens retenus n'a été conduit en 1P, où l'on trouve davantage d'avis plus réticents à la nouvelle méthodologie.

En tout, ce ne sont pas moins de 925 résolutions portant sur neuf problèmes qui ont été analysées sur trois degrés scolaires allant de la deuxième à la quatrième année primaire.

Les problèmes sont tirés des épreuves du Rallye Mathématique Transalpin (RMT), avec l'aimable autorisation des organisateurs. Ces problèmes ont été choisis car ils se révélaient proches du type d'activités présentées dans les nouveaux moyens de mathématiques. Mettant en jeu plus de compétences que la simple application d'un algorithme, ces problèmes permettent de considérer plusieurs procédures de résolution. Nous avons sélectionné neuf problèmes prévus dans le Rallye pour les mêmes degrés scolaires que ceux de notre échantillon, tout en prenant garde à ce qu'ils aient été moyennement à bien réussis lors du RMT (où les groupes étaient plus grands) ou en en simplifiant quelque peu les données (*Trou*, *Construction*, *Ménagerie* [9]). Ceci assure la possibilité d'arriver à la ou aux solutions en travaillant à deux, tout en gardant, de par la richesse des problèmes, une certaine difficulté due à l'organisation de la démarche de résolution. Les problèmes retenus l'ont ainsi été pour leur originalité, la variété des démarches possibles, l'adéquation aux compétences des élèves à un niveau donné, ainsi que pour leur référence prioritaire à un domaine précis, numérique, transversal ou logique.

Chaque fin d'année, les élèves étaient invités à résoudre en dyades un problème de type numérique (*Collier* et *Bérangère* en 2P ; *Tartes* et *Pinocchio* en 3P ou en 4P) et un autre induisant des compétences plus transversales

[8] Le plan théorique prévoyait la passation d'un entretien et une série de problèmes par 4 classes de chaque degré primaire (1P à 4P) pour chacun des 7 cantons suisses romands. Cet effectif théorique de 28 classes suivies durant 4 années est ici fortement réduit en raison du refus ponctuel de certains enseignants de participer à l'un ou l'autre pan de la recherche (en l'occurrence ici : entretien ou épreuves aux élèves), ou d'en respecter les consignes de base (travail en duo).

[9] L'énoncé des problèmes se trouve en annexe, page 47 et suivantes.

(*Chocolat* et *Trou* 2P ; *Construction* et *Sucre* en 3P ou en 4P). En 4P, un problème de logique (*Ménagerie*) s'ajoutait aux deux autres. Quatre problèmes différents étaient ainsi proposés en 2P et cinq pour le cycle 3-4P. La composition des couples de problèmes proposés ne variait pas. Bien entendu, les classes recevaient en 4P le couple de problèmes numérique et transversal sur lequel elles n'avaient pas travaillé l'année précédente, en plus du problème de logique introduit en 4P.

	2P				3P				4P						TOTAL	
	Bérangère Chocolat		Collier Trou		Tartes Construction		Pinocchio Sucre		Tartes Construction		Pinocchio Sucre		Ménagerie			
*	N dy	N cl	N dy	N cl	N dy	N cl	N dy	N cl	N dy	N cl	N dy	N cl	N dy	N cl	N dy	N cl
Conforme	34	4	29	4	28	2	47	5	8	1	28	3	36	4	210	20
Libre	18	2					32	3	51	5			51	5	152	10
Distancé	7	1			25	3									32	4
Pragmatique			31	3	40	5	9	1	11	1	11	1	20	2	122	9
TOTAL	59	7	60	7	93	10	88	9	70	7	39	4	107	11	516	43

Tableau 1 : Nombre de dyades et de classes ayant résolu les différents couples d'épreuves
*N dy = nombre de dyades - N cl = nombre de classes

Comme les profils n'étaient pas établis a priori, une répartition équilibrée des problèmes en fonction des différentes attitudes n'a pas pu être garantie (Tableau 1). C'est pourquoi nous trouvons une sur-représentation de certains problèmes pour certains profils (notamment *Tartes* et *Construction* pour les classes *distancées*, où l'effectif théorique était de 11.3 sur l'ensemble du cycle 2, alors qu'en réalité, nous avons recueilli les traces de 25 dyades de ce type, et ce uniquement en 3P), ainsi qu'une sous-représentation d'autres problèmes, voire carrément une absence de neuf d'entre eux pour certains profils à un degré donné. Par exemple, nous n'avons pu recueillir aucune épreuve *Pinocchio* ou *Sucre* d'élèves dont le maître était *distancé*. Le hasard de la distribution des données, de leur restitution et de l'évolution des attitudes au fil des ans a produit un échantillon peu équilibré ; toutefois toutes les données seront analysées, dans la mesure où ce sont des indications générales, voire transversales de la résolution des problèmes qui nous intéressent. Cette caractéristique de l'échantillon devra être prise en compte dans l'interprétation des résultats, notamment en termes de réussite ou d'échec.

Passations

Les problèmes étaient résolus dans le cadre d'une leçon traditionnelle de mathématiques, en fin d'année scolaire, en l'absence de l'enquêtrice. Une période de 45 minutes devait être allouée à la résolution des deux ou trois problèmes fournis. La consigne donnée aux enseignants les incitait à ne pas intervenir durant la résolution, ainsi qu'à ne pas laisser les élèves corriger leur travail après une éventuelle mise en commun. La gomme aurait dû être proscrite, mais cela n'a pas toujours été le cas. Les élèves recevaient les deux ou trois problèmes qu'ils étaient invités à résoudre en groupe de deux, et géraient de manière autonome leur travail et leur temps.

Les entretiens ont été menés de manière semi-directive par l'enquêtrice abordant dans un ordre ou un autre une liste de thèmes liés à l'appréciation et la mise en œuvre des nouveaux moyens. L'enregistrement des entretiens prévu dans le plan de recherche n'a pas toujours pu être effectué, certains enseignants ne désirant pas être enregistrés. Afin de ne pas perdre ces précieux cas, la prise de notes s'est substituée à l'enregistrement audio comme instrument de recueil des données.

Analyses

Les entretiens ont fait l'objet d'une analyse de contenu afin de déterminer le profil de chaque enseignant (Knupfer & Tièche Christinat, 2000). Suite à une lecture flottante, les thèmes récurrents correspondant à chacun des quatre profils ont été inventoriés, puis méticuleusement recherchés dans chaque entretien afin de pouvoir le catégoriser dans l'une ou l'autre des quatre attitudes selon la nature des thématiques dominantes.

Nous avons mené une analyse a priori de chaque problème, dans le but de déterminer le domaine auquel il se réfère ainsi que les différents outils et stratégies de résolution possibles (cf. Annexes). Ces analyses a priori ont permis de tenir compte de la particularité de chaque problème et ont servi de base à la construction des grilles de codage comprenant des catégories spécifiques mais aussi des observations communes à mener pour l'ensemble des problèmes en vue d'une analyse transversale. L'ensemble des informations ont été saisies sur fichier informatique et principalement traitées au moyen du logiciel SPSS.

Résultats

Sensibilité des différents problèmes

Les problèmes étaient bien adaptés aux capacités mathématiques des élèves puisque nous obtenons une moyenne de 44.6% de réussite tous degrés confondus. La complexité des problèmes proposés était telle que la solution ne s'imposait pas a priori et que les élèves étaient amenés à réfléchir un moment et à développer des stratégies innovatrices. Comme attendu, les problèmes du deuxième cycle sont en principe mieux réussis (jusqu'à 10% de réussite en plus) en 4P qu'en 3P, si ce n'est *Tartes*, problème ouvert faisant appel à des compétences de type numérique. De fait, la progression dans la réussite est plus marquée pour les problèmes transversaux que pour les problèmes du domaine numérique.

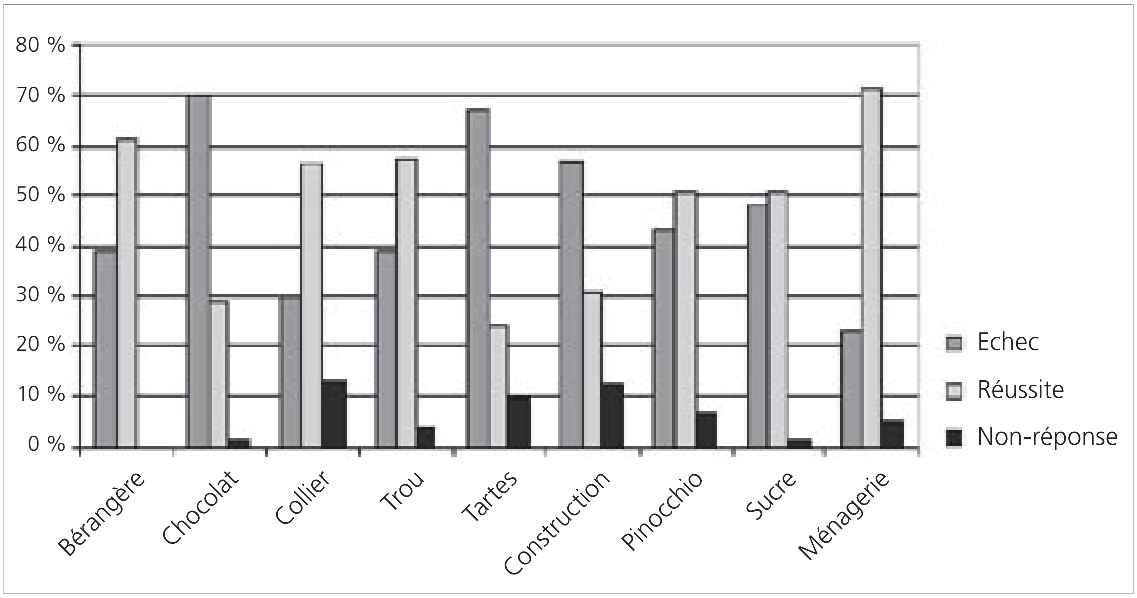


Figure 1 : Pourcentage de réussites, échecs et non-réponses à chaque problème

Tous les problèmes n'étaient pas de même facilité pour les élèves (Figure 1). Le problème de logique (Ménagerie) est sans conteste le mieux réussi, puisque 71.4% des élèves aboutissent à une des deux solutions [10]. L'ouverture des réponses possibles et sa nature assez « traditionnelle » [11] peuvent expliquer cette réussite. Dans une moindre mesure, *Collier* et *Trou* ont obtenu une légère majorité de réussites (respectivement 56.7% et 57.6%). Trois problèmes n'ont par contre obtenu qu'un faible taux de réussite : *Tartes* (23.9%), *Chocolat* (28.8%), et

[10] Le problème est simplifié par rapport à la formulation originale du RMT, qui ne permettait qu'une seule solution, celle où l'on se situait du point de vue de l'observateur.

[11] Des problèmes de ce type sont présents dès le premier cycle dans le module 1 « Logique et raisonnement » des nouveaux moyens de mathématiques romands.

Construction (30.9%) ; trois problèmes remportent le taux le plus fort de non-réponses, ce sont *Construction* (12.3%) et *Tartes* (9.2%), ainsi que *Collier* (13.3%) qui est pourtant assez bien réussi. Mentionnons toutefois que *Tartes* n'est considéré comme réussi que lorsque les trois solutions possibles sont données, ce qui nécessite une recherche organisée et un brin de persévérance. Notons finalement que les deux problèmes obtenant le plus de non-réponses, *Collier* (2P) et *Construction* (3-4P), font appel à la notion de fonction, ce qui n'était pas le cas des autres problèmes. Cette étape supplémentaire qui consiste à trouver « la formule » de passage d'un état à un autre, pose problème au point de bloquer plus de 10% des dyades.

D'une manière générale et contrairement à nos attentes, les problèmes numériques ne sont pas mieux réussis que ceux appelant des éléments de géométrie, puisque le taux de réussite à ces deux types de problèmes ne varie pas significativement ($\chi^2 = 10.426$, ddl = 3, $p > 0.05$) [12]. Il semblerait que la complexité de la formulation et de la mise en scène des problèmes, même numériques, ait plus de poids dans la détermination de la réussite que le domaine auquel ils réfèrent. Cependant en 2P, bien que la différence ne soit juste pas significative ($\chi^2 = 10.290$, ddl = 2, $p = 0.06$), les problèmes transversaux semblent nettement moins bien réussis que les items numériques, conformément aux résultats de l'enquête Mathéval menée à ce degré-là (Antonietti et al., 2003).

Réussite et échec

Selon le degré

Comme mentionné auparavant, il y a une différence significative dans la réussite des problèmes, les 2P et les 4P réussissant un peu mieux que les 3P ($\chi^2 = 25.651$, ddl = 6, $p = 0.00$). Ceci confirme la bonne adaptation des problèmes distribués en second cycle. On constate une différence significative dans la présence d'une réponse littérale, c'est-à-dire qui spécifie la nature du chiffre donné en réponse (par exemple : Pinocchio a dit 3 vérités dans la journée) ($\chi^2 = 30.594$, ddl = 2, $p = 0.00$), allant dans le sens d'une nette progression entre le premier cycle (27.4% des dyades ont précisé leur réponse par quelques mots) et le deuxième (environ 50% de réponses littérales). Ceci signifierait un meilleur retour à la consigne chez les élèves de 3-4P que chez les plus jeunes. L'hypothèse d'une meilleure maîtrise de l'écrit chez les plus grands n'est pas vérifiée car on ne trouve pas de différences significatives concernant la présence d'explication littérale de la démarche entre les trois degrés concernés ($\chi^2 = 7.812.594$, ddl = 2, $p = 0.20$). Ainsi, quel que soit le niveau, on retrouve environ 50% des dyades qui tentent d'expliquer leur démarche par écrit, même si celle-ci s'avère fausse ou l'explication peu compréhensible. Rappelons que cette contrainte faisait partie de chaque consigne en ces termes « Expliquer votre démarche ». Ainsi, certains élèves, et presque 10% de plus en 3P, restent peu enclins à expliquer leur manière de procéder. Le fait d'expliquer ou non sa démarche [13] n'a trait ni à l'âge, ni aux compétences en écriture des élèves. Notons toutefois que le fait de ne pas donner d'explication à sa démarche est corrélé significativement à la compréhension du problème ($\chi^2 = 39.376$, ddl = 6, $p = 0.00$), c'est-à-dire au nombre d'éléments pris en compte [14] nécessaires à la résolution du problème.

[12] Dans ce rapport, chaque fois que nous effectuerons un test statistique, nous indiquerons entre parenthèses la valeur empirique de la variable de décision utilisée, les degrés de liberté (ddl) et le résultat de la comparaison entre la probabilité critique (p) et le seuil de signification (a) que nous avons systématiquement fixé à 5%.

[13] Aux degrés concernés dans cette recherche. La question pourrait être réétudiée pour les 1P.

[14] La prise en compte est « totale » lorsque les élèves parviennent à avoir une représentation totale de la structure du problème, même s'ils ont fait une faute de comptage ou de calcul. La prise en compte des données du problème est partielle lorsqu'une ou plusieurs étapes importantes de la résolution du problème sont ignorées ou mal interprétées, mais que dans l'ensemble, et malgré quelques erreurs de comptage ou de calcul possibles, la démarche correcte est respectée. Finalement, lorsque les élèves ne prennent en compte aucun des éléments du problème pour une résolution correcte, on peut s'imaginer qu'ils n' en ont pas une représentation correcte. Cela se traduit dans les traces par une non-réponse (avec ou sans essais), une stratégie complètement aléatoire (reprise de quelques nombres combinés entre eux dans le but de répondre au contrat didactique), ou une « autre stratégie », compréhensible du point de vue des compétences des enfants, mais non experte.

Selon le profil de l'enseignant

Bien que l'analyse globale (Tableau 2) de l'ensemble des problèmes tende à montrer une différence significative dans la réussite selon le profil de l'enseignant en la nette défaveur des classes distancées (27% de réussite contre environ 45% chez les autres profils), ce résultat est à relativiser par une mise en lien avec la répartition inégale des problèmes dans notre échantillon.

Profil		Echec	Réussite	Non-réponse avec tentative	Non-réponse sans tentative	TOTAL
Conforme	Effectif	188	183	7	4	382
	Effectif théorique	186.0	170.5	17.6	7.9	382.0
	% dans Profil	49.2%	47.9%	1.8%	1.0%	100%
Distancé	Effectif	36	17	10	1	64
	Effectif théorique	31.2	28.6	2.9	1.3	64.0
	% dans Profil	56.3%	26.6%	15.6%	1.6%	100%
Libre	Effectif	129	107	11	6	253
	Effectif théorique	123.2	112.9	11.6	5.3	253.0
	% dans Profil	51.0%	42.3%	4.3%	2.4%	100%
Pragma-tique	Effectif	92	101	14	8	215
	Effectif théorique	104.7	96.0	9.9	4.5	215.0
	% dans Profil	42.8%	47.0%	6.5%	3.7%	100%
TOTAL	Effectif	445	408	42	19	914
	En %	48.7%	44.6%	4.6%	2.1%	100%

Tableau 2 : Réussite des dyades à l'ensemble des épreuves en fonction du profil de leur enseignant

Comme le démontre la Figure 2, en distinguant les taux de réussite dans chaque problème, les élèves d'enseignants distancés ne sont, de manière générale, pas toujours en-dessous de la moyenne, et leur faible taux de réussite constaté est à mettre en lien avec la difficulté des problèmes (Tartes et Construction) auxquels ils ont été principalement confrontés [15]. Ce graphique, dont les pourcentages sont à prendre avec de multiples précautions vu la taille différente et souvent réduite des sous-ensembles auxquels ils renvoient, montre clairement que la réussite n'est pas tellement une question de profil des enseignants mais qu'elle varie en fonction des problèmes et des classes retenues.

Plus qu'à la réussite aux problèmes, il est utile de s'intéresser à la répartition des non-réponses trouvées dans les copies des élèves. Selon notre hypothèse, les non-réponses représenteraient l'indice d'un certain dénuement face aux types de problèmes présentés, de même que la marque d'une difficulté à travailler et à trouver un accord en groupe. Nous avons spécifié deux sortes de non-réponses : celles avec tentative de résolution, où les élèves ont mené une recherche plus ou moins longue mais sans parvenir à un quelconque résultat, et celles de type feuille totalement blanche. Une feuille ne comportant que des traces de recherche effacées [16] était catégorisée comme une « non-réponse avec tentative ». Le Tableau 2 indique que les enseignants en adéquation dans leur pratique et leur pensée avec la nouvelle méthodologie ont des élèves qui ne fournissent presque jamais de non-réponses, puisqu'on n'en dénombre que 2.8%, chiffre se situant bien en dessous de l'effectif théorique. Ainsi, et cette tendance était déjà sensible lors du dépouillement, ces élèves se révèlent particulièrement enclins à chercher, à faire des essais, des tentatives, et à présenter une solution, même si celle-

[15] Comme les profils n'étaient pas constitués *a priori*, leur représentativité dans chaque problème s'en est trouvée quelque peu déséquilibrée

[16] L'usage de la gomme était fréquent, bien que vivement découragé par les consignes fournies aux maîtres

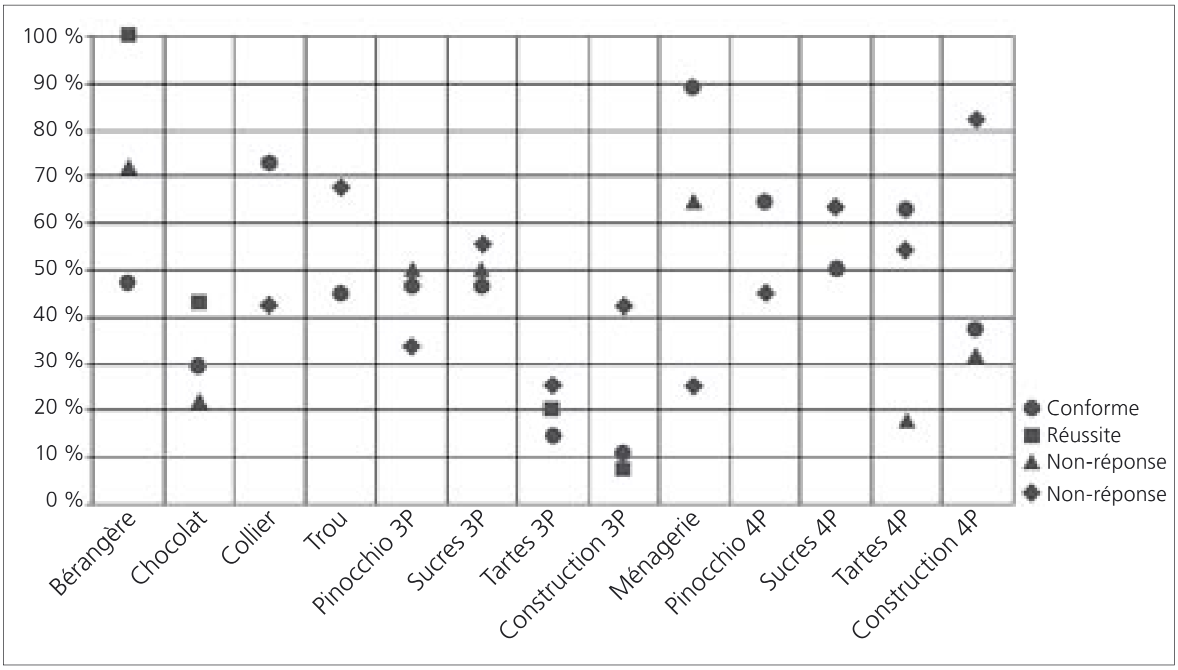


Figure 2 : Pourcentage d'élèves de chaque profil ayant réussi les différents problèmes.

ci mène à un résultat final faux. Ils ne semblent pas craindre de produire un résultat erroné, et cela pourrait être interprété dans le sens d'une bonne familiarisation au travail avec un rôle positif donné à l'erreur. Les élèves d'enseignants adoptant les principes du socioconstructivisme tout en s'autorisant un certain détachement à l'égard des bases pratiques se retrouvent dans la moyenne générale concernant les non-réponses (4% avec tentative et 2% sans). Quant aux élèves d'enseignants réticents aux bases épistémologiques des nouveaux moyens, leur taux de non-réponses est nettement supérieur à la moyenne : jusqu'à 15% de non-réponses avec tentative pour les élèves de maîtres *distancés*, et au total 17% de non réponses pour les *distancés* et 10% pour les *pragmatiques*. Bien que, pour les dyades catégorisées *distancées*, cela puisse être attribué en partie à la difficulté intrinsèque des deux problèmes qu'elles ont majoritairement rencontrés, ceci n'explique pas tout. Le fait que pour une classe de 20 élèves, environ deux dyades n'aboutissent pas à une solution qu'ils peuvent avancer comme telle relève d'une autre cause, en partie propre à l'épistémologie de l'enseignant qui peut se traduire dans sa façon de travailler avec sa classe et du type de contrat didactique mis en place.

Est-ce que les maîtres dont l'épistémologie est proche de la philosophie des nouveaux moyens ont des élèves plus à l'aise dans la résolution de problèmes ayant trait au domaine transversal ? S'il n'y a aucune différence significative [17] entre les différents profils dans la réussite du problème de type logique (χ^2 = 10.144, ddl = 2, p = 0.006), et dans les problèmes de type numérique (χ^2 = 6.344, ddl = 3, p = 0.096) ceci malgré une performance sensiblement supérieure des élèves d'enseignants *conformes* dans ces deux domaines, la différence se révèle significative pour les problèmes mettant en jeu des compétences transversales (χ^2 = 22.453, ddl = 3, p = 0.00), dans le sens d'une meilleure performance des dyades de maîtres *pragmatiques* (57.8% de réussite), suivis des *conformes* (37.8%) et des libres (35.5%). Les élèves d'enseignants en rupture avec la nouvelle méthodologie arrivent en queue de peloton avec seulement 15.6% de réussite dans l'ensemble des problèmes transversaux. Il est vrai que le problème transversal (Construction) auquel ils ont été confronté était très difficile, toutefois les mêmes élèves ont eu un score assez bon avec *Tartes*, tout aussi difficile mais de type numérique. Ce qui prouverait qu'ils sont moins démunis face à un problème de type numérique que de type transversal. D'autre part, la haute performance des élèves dont l'enseignant applique la méthode à la lettre sans entrer dans son fondement épistémologique, qui se révèle contraire à l'hypothèse ci-dessus, est à relativiser dans la mesure où deux classes entières ont bizarrement donné les mêmes solutions, mot pour mot. La situation d'évaluation par un intervenant externe a probablement exarcerbé la façon de travailler de certains enseignants, qui préféreront induire la solution plutôt que de laisser les élèves trouver seuls leurs démarches, au risque de se tromper.

[17] Après assimilation des non-réponses à la catégorie échec pour que les conditions d'application du test du c2 soient satisfaites

Présentation de la réponse au problème

Nous relevons des différences significatives dans la présentation des réponses aux problèmes entre les différents types de classes, tant au niveau de l'explicitation en mots de la nature de la réponse (c2 = 20.389, ddl = 3, p = 0.00) qu'à celui de l'exposition de la démarche (c2 = 50.930, ddl = 3, p = 0.00).

Le Tableau 3 laisse apparaître une légère surreprésentation de la précision de la réponse chez les élèves d'enseignants *conformes* et *pragmatiques*, appliquant la méthodologie de manière stricte en classe. Mais si ces deux attitudes, ainsi que celle qualifiée de *libre*, se situent près de la moyenne, un grand saut apparaît en revanche pour les élèves d'enseignants *distancés*, puisqu'ils ne sont que 15% à fournir une réponse littérale, les non-réponses étant éliminées.

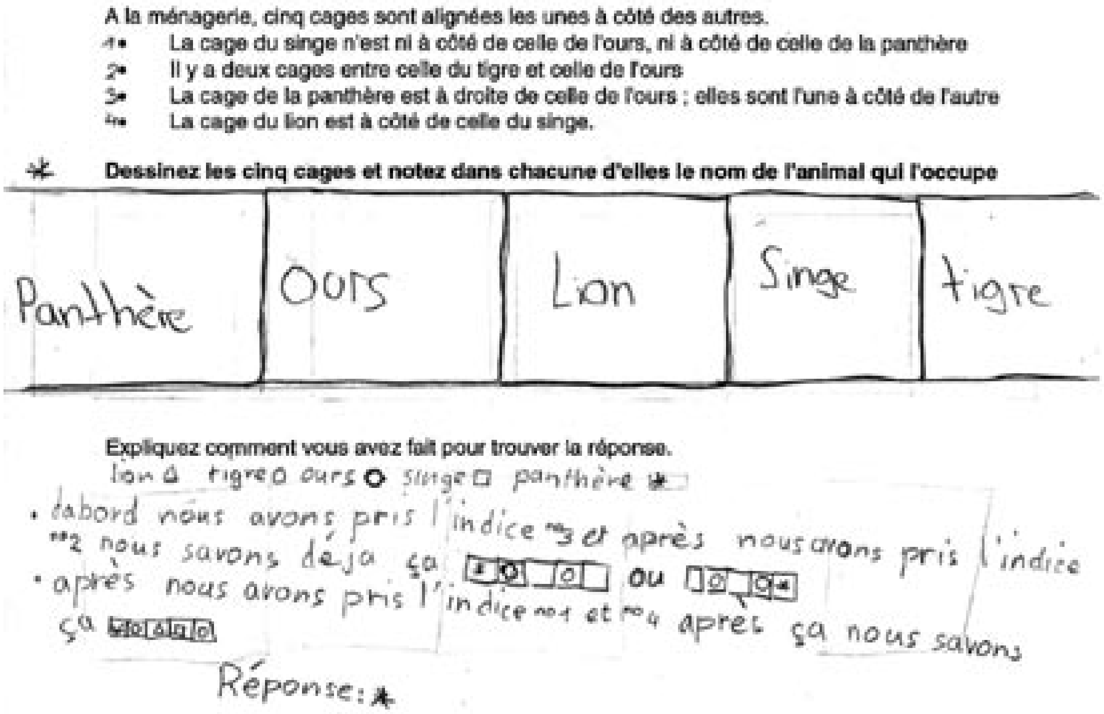
Profil		Réponse littérale	Explication littérale
Conforme (N=371)	Effectif	173	230
	Effectif théorique	159.6	186.6
	% dans Profil	46.6%	61.7%
Distance (N=53)	Effectif	8	8
	Effectif théorique	22.8	26.7
	% dans Profil	15.1%	15.1%
Libre (N=236)	Effectif	96	106
	Effectif théorique	101.5	118.7
	% dans Profil	40.7%	44.9%
Pragma-tique (N=193)	Effectif	90	86
	Effectif théorique	83.0	97.1
	% dans Profil	46.6%	44.6%
Total	Effectif	367	429
	En %	43.0%	50.3%

Tableau 3 : Présentation de la réponse par les dyades
en fonction du profil du maître (non-réponses éliminées)

Une nuance plus grande encore apparaît entre les élèves d'enseignants *conformes* et *distancés* en ce qui concerne l'explication littérale de la démarche. Alors que les dyades libres et *pragmatiques* sont proches de la moyenne (50.3%), les dyades d'enseignants adhérant totalement à la nouvelle méthodologie de mathématiques se situent très nettement au-dessus de la moyenne. Ainsi, pas moins de 60% des élèves des classes de ces enseignants fournissent une explication voire une justification du « chemin » qu'ils ont pris pour parvenir à leur solution, soit 10% de plus que la moyenne, alors que les élèves d'enseignants dont les bases épistémologiques et pratiques se distancient des nouveaux moyens de mathématiques ne sont que 15.1% à le faire. Quand bien même la difficulté des problèmes auxquels ils sont exposés en 3P est en moyenne plus élevée que pour les autres élèves, cette tendance à être en dessous de la moyenne concernant la présence de précisions verbales est déjà visible en 2P, et cela révèlerait une méthode de travail qui est assez éloignée de la verbalisation mise en avant dans les commentaires didactiques des nouveaux moyens, et pratiquée en classe à travers les mises en commun notamment. Finalement, les élèves ayant des enseignants *pragmatiques* sont 39.7% à verbaliser leur démarche en 3P (contre 7.1% *distancés*), alors qu'eux aussi ont une forte proportion de problèmes *Tartes* et *Construction* à ce degré. Ceci et le fait que les tendances générales mises en avant sont significatives à l'intérieur de chaque degré (sauf pour l'explication littérale en 4P où p =0.014), tendrait à prouver que la manière de travailler et l'épistémologie de l'enseignant ont une influence sur la capacité des élèves à expliciter leurs démarches. Ainsi, les élèves dont les enseignants sont *conformes* ont dès la 2P une manifeste tendance à expliciter leur démarche, même si elle est fausse, et à tenter la verbalisation de démarches complexes et très intuitives, notamment pour des problèmes induisant une recherche ou un raisonnement logique difficilement explicitable.

> Explication d'une dyade libre dont la réponse est fausse (OLSTP) : *Si le singe n'est pas à côté de l'ours ou de la panthère donc le singe sera au milieu, le lion à sa droite parce qu'il doit y avoir deux cages entre l'ours qui est tout à gauche et le tigre qui est l'avant dernière cage et la panthère tout à droite.*

L'exemple ci-dessous (Figure 3) montre les traces d'une dyade conforme s'aidant de symboles pour expliquer son raisonnement.


A la ménagerie, cinq cages sont alignées les unes à côté des autres.
1• La cage du singe n'est ni à côté de celle de l'ours, ni à côté de celle de la panthère
2• Il y a deux cages entre celle du tigre et celle de l'ours
3• La cage de la panthère est à droite de celle de l'ours ; elles sont l'une à côté de l'autre
4• La cage du lion est à côté de celle du singe.

Dessinez les cinq cages et notez dans chacune d'elles le nom de l'animal qui l'occupe

Panthère	Ours	Lion	Singe	tigre

Expliquez comment vous avez fait pour trouver la réponse.
lion tigre ours singe panthère
• dabord nous avons pris l'indice no3 et après nous avons pris l'indice no2 nous savons déja ça ou
• après nous avons pris l'indice no1 et no4 apres ça nous savons ça

Réponse :

Figure 3 : Traces de la résolution de Ménagerie par des élèves conformes

Outils de résolution

Les élèves possèdent plusieurs outils mathématiques pour résoudre les problèmes. Tous les problèmes transversaux faisaient référence en partie au domaine spatial et l'illustration qui les accompagnait induisait de fait l'utilisation de représentations graphiques comme outil vivement recommandé voire nécessaire à la résolution. Tous les problèmes du domaine numérique pouvaient être résolus sans recours à une représentation graphique, mais celle-ci était cependant encouragée dans *Collier* par un dessin inachevé. Les élèves sont donc plus nombreux à esquisser un schéma ou à le poursuivre lors des problèmes de type transversal (53.3%) que pour les problèmes numériques (39.5%). Cependant, quel que soit le type de problème, les élèves dont l'enseignant se révèle *distancé* utilisent cette aide toujours significativement plus souvent que les autres élèves. Si dans l'ensemble environ une dyade sur deux a recours à un dessin, parfois annoté de chiffres, pour favoriser sa compréhension du problème et sa résolution, dans les classes distancées huit dyades sur dix utilisent cette méthode. Si l'on en croit la Figure 4, ces derniers privilégieraient un support graphique à une résolution traditionnelle mathématique où un calcul serait posé. Ils se différencient en cela à nouveau des autres dyades[18], qui posent plus souvent un calcul en bonne et due forme, mais cette différence n'est pas significative. Bien entendu, ces modes d'organisation des données ne sont pas exclusifs entre eux.

[18] A noter une progression entre les degrés : alors que presque la moitié des élèves ne posent aucun calcul en 2P, ils ne sont plus que 30% en 3-4P.

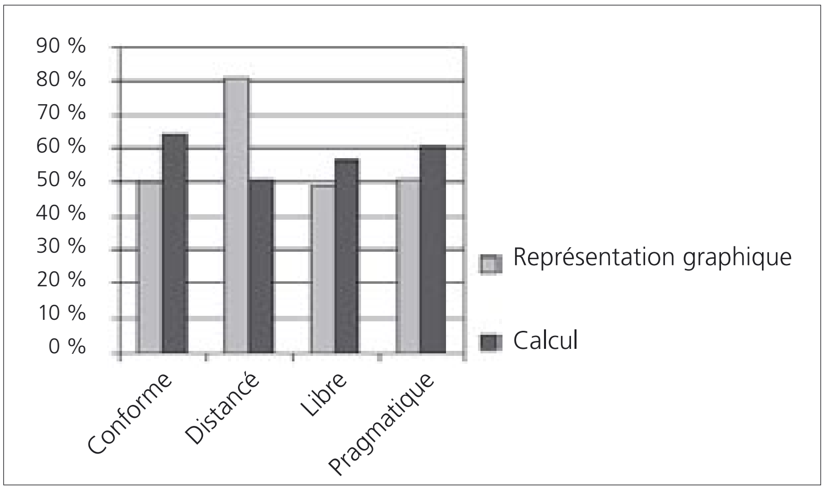


Figure 4 : Utilisation des représentations graphiques et du calcul posé, en pourcent.

Les calculs posés peuvent prendre différentes formes, à savoir une suite de calculs isolés, une fausse équation, ou des algorithmes en colonne, voire des formes hybrides. L'algorithme en colonne relève d'un apprentissage scolaire spécifique et n'apparaît dans les traces des élèves qu'en troisième année (22% des calculs posés en 3P et 38% en 4P). Les élèves d'enseignants *libres* (33%) utilisent cet outil plus souvent que les autres (20% chez C et 26% chez P), alors que les élèves d'enseignants *distancés* ne recourent à cet outil que dans 8% des cas. Remarquons enfin que les traces des élèves laissent supposer une bonne part de calcul réfléchi, notamment dans les copies où seuls certaines données et résultats sont inscrits.

Outre ces grandes différences, nous avons mis le doigt sur quelques particularités dans l'organisation des données rares et propres à certaines classes uniquement. Ainsi, nous n'avons retrouvé que chez des dyades *conformes* (7) et *pragmatiques* (3) le besoin de redessiner la totalité du schéma donné pour Chocolat (Figure 5), *Trou* et surtout *Collier*.

Figure 5 : Exemple d'une représentation graphique pour le problème *Chocolat* produite par une dyade *conforme.*

Certaines traces, peu nombreuses (32), démontrent la maîtrise de la propriété commutative de l'addition par la décomposition en sous-ensembles d'une addition de plusieurs termes. La longue addition des aires des 7 étages de *Construction* suppose une telle manière de faire (20) lorsqu'on ne veut pas poser l'algorithme en colonne, mais cela a aussi été visible dans *Bérangère*, *Chocolat*, *Collier*, *Mur* et *Pinocchio*. Une seule dyade dont l'enseignant se révèle *distancé* a démontré la maîtrise de cette technique de décomposition d'une longue addition, contre une dizaine dans chacun des autres profils. Un total de 29 dyades ont calculé les sommes de sous-parties prises dans l'ordre dans lequel elles étaient notées, qu'elles ont ensuite additionnées. Trois dyades se sont révélées plus rusées et ont saisi la possibilité de former des couples pour parvenir à des dizaines rondes, facilement additionnables ensuite. Deux de ces dyades sont *conformes* et la dernière est *libre*.

Finalement, la règle se révèle être un instrument relativement peu utilisé dans l'ensemble (7.4%). Son utilité peut se situer sur deux plans : l'organisation de l'espace, dont l'efficacité est éprouvée pour poursuivre une ligne dont le milieu a été effacé, notamment dans *Trou* (utilisée par près de deux dyades sur trois), *Chocolat* (22%), et *Sucre* (2.4%) et comme outil de mesure [*Pinocchio* (2P et 1C), *Trou* (3C et 7P)]. Dans ce dernier cas, il s'agit d'une procédure à part entière et non seulement d'une aide graphique. Sur l'ensemble des problèmes, nous relevons 28 traces d'usage de la règle en tant qu'outil de traçage chez les élèves d'enseignants conformes, 13 chez les élèves *pragmatiques*, tandis qu'ils ne sont que 4 chez les dyades *libres* et 1 chez les *distancées* à y avoir pensé. Ces résultats peuvent en partie être expliqués par la taille des différents groupes et la nature des problèmes auxquels ils ont été confrontés. Toutefois, en ne considérant que le problème *Chocolat*, nous constatons toujours une légère surreprésentation de l'usage de la règle chez les élèves *conformes* au détriment des élèves *distancés* et *libres*.

Stratégies de résolution des différents problèmes

Dans une visée plus qualitative, il s'agit à présent de s'approcher des différentes stratégies employées par les élèves dans la résolution de leurs problèmes. Par stratégies, nous entendons la manière de procéder pour résoudre un problème mathématique donné. Chaque problème a fait l'objet d'une analyse a priori afin de cerner les différentes stratégies possibles pour le résoudre (cf. Annexes). Les problèmes étant tous différents, cette analyse a priori fournit un cadre en termes de variétés de stratégies envisageables pour chaque problème, dont il a été tenu compte pour l'élaboration de chaque grille de codage. L'objectif final est de comparer ce qui paraît, de prime abord, incomparable, à savoir la variété et la prédominance de l'une ou l'autre stratégie en fonction du profil, alors que les stratégies diffèrent d'un problème à l'autre. Peu importe qu'elle soit menée à terme ou non, ou qu'il y ait des erreurs de calcul, ce qui nous importe ici est le choix des stratégies par les dyades des différentes classes. Quand cela est possible, nous nous attarderons aussi sur le nombre de stratégies différentes observées dans chaque classe, et nous en établirons la moyenne relative à chaque profil, pour saisir plus précisément la diversité ou l'uniformité des techniques de résolution. Ceci autorisera des comparaisons plus pertinentes entre profils qu'une simple somme, qui pourrait refléter la variété d'une classe particulière alors que les autres sont pauvres en démarches hétérogènes.

Bérangère

Bon nombre d'élèves résolvent le problème en effectuant la suite de toutes les transformations dues aux déplacements de Bérangère dans l'escalier sans donner de résultat intermédiaire. Cette manière de procéder relève d'une stratégie que nous avons qualifiée de directe. Seuls deux élèves *libres* s'arrêtent après les trois premiers déplacements de Bérangère, puis rajoutent à ce résultat intermédiaire les six dernières marches. Ils distinguent ainsi les déplacements déjà effectués de ceux à venir. Finalement, 6 élèves (4 C, 1D et 1L) fractionnent les étapes du problème en autant de calculs dont ils donnent le résultat. Enfin, 4 élèves n'ont pas saisi la donnée du problème et se sont perdus dans des démarches aléatoires.

Toutes ces catégories ne reflètent finalement qu'une multitude de mises en forme d'un même calcul, et il est ardu de dire à partir des seules traces écrites des élèves si leurs représentations du problème sont réellement différentes. L'écriture ou non d'un résultat intermédiaire peut constituer, plus qu'une démarche à proprement parler, un moyen de décharge cognitive. Par contre l'utilisation d'une représentation graphique peut constituer une véritable démarche de résolution. Si la plupart (46) des dyades n'utilisent que le calcul pour parvenir à la solution, sept dyades (6 *conformes* et 1 *distancé*) l'accompagnent d'une représentation graphique, véritable support à la construction mentale du problème. Enfin, six groupes (4C et 2L) ne s'appuient que sur une représentation graphique de la situation pour répondre à la question posée, dont deux avec succès (Figure 6).

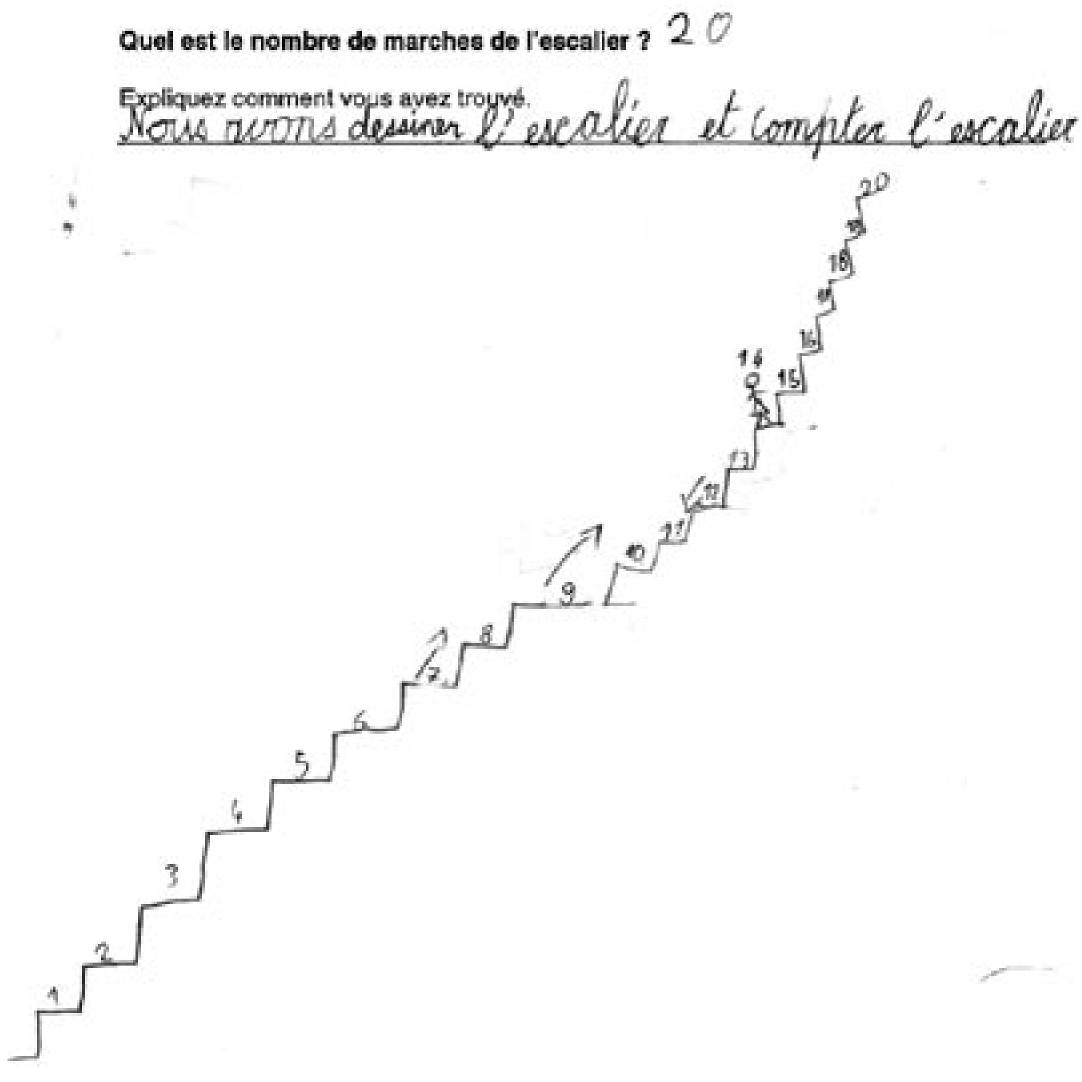


Figure 6 : Traces d'une dyade conforme ayant résolu Bérangère au moyen d'un schéma.

En tout, les élèves *conformes* s'autorisent plus souvent le recours à une représentation graphique, ce que fait près d'une dyade sur trois, contre une sur dix chez les autres profils.

Chocolat

Des deux types de stratégies envisagés, la stratégie directe qui consiste à dessiner puis compter les chocolats manquants est majoritairement utilisée par les élèves (45 traces sur 59). En tout, seules 10 dyades, majoritairement *conformes* (8) ou *libres* (2), se sont aventurées dans un type de résolution indirecte, en commençant par compter la totalité des chocolats pour en déduire ceux restants. Une seule dyade est parvenue au bout de la résolution de cette manière.

Une procédure originale, choisie par une dyade *libre*, se base sur la perception de l'alignement diagonal des chocolats. Finalement, la difficulté de ce problème était principalement de saisir l'alignement vertical et horizontal des chocolats qu'il s'agissait ensuite de reproduire. Si tous les élèves n'ont pas toujours pu respecter ces deux contraintes, trois groupes (un dans chaque profil C, D, L) n'ont saisi ni l'alignement vertical, ni l'horizontal, et se sont contentés de remplir aléatoirement la boîte de ronds de toutes dimensions symbolisant les chocolats en les comptant.

Pour résoudre ce problème, compléter le dessin était quasiment indispensable. Seules deux dyades ne l'ont pas fait et ont échoué. Sur les 57 autres, 26 ont posé un calcul en plus de la représentation graphique. Les élèves *libres* sont plus nombreux que les autres à n'utiliser qu'une représentation graphique non accompagnée d'un calcul destiné à aider au dénombrement des cases. Le dénombrement occupe effectivement une grande place dans la résolution de ce problème et lorsqu'il est visible (50 cas), on constate que la majorité des élèves utilisent le pointage pour le mener à bien (42). Les trois groupes qui numérotent les chocolats sont tous des élèves d'enseignants *conformes*. Deux duos *conformes* utilisent le pointage ou la numération pour constituer des paquets de 10 facilement additionnables ensuite. De manière moins efficace que les groupes des dizaines rondes, trois dyades (2 *conformes* et une *libre*) font des sous-ensembles en fonction de la disposition géographique des chocolats à compter. Finalement, une seule dyade utilise une partition en ligne pour faire la somme des chocolats manquants.

Nous pouvons donc conclure que les formes variées et originales de dénombrements se rencontrent principalement chez les élèves *conformes* (20% des cas), et que les stratégies de dénombrement des élèves d'enseignants distancés sont uniformes et relèvent toutes du pointage.

Collier

Ce problème n'a suscité de non-réponses et de démarches aléatoires que chez des élèves d'enseignants *pragmatiques*.

La majorité des dyades (48) utilisent une stratégie indirecte pour résoudre ce problème. En général, les enfants dessinent les deux derniers rangs, puis comptent les perles en dénombrant le tout dans son ensemble ou en le séparant en deux parties ou par rangs. Seuls quelques élèves parviennent à définir mentalement la formule permettant de connaître le nombre de perles constituant chacun des trois derniers rangs et se passent de la représentation graphique. Ils n'éprouvent ainsi aucun besoin d'utiliser le support visuel concret pour déterminer le nombre de perles des derniers rangs et la somme de toutes les perles. Trois groupes conformes sur les 29 ayant résolu ce problème sont dans cette situation, contre un seul sur les 30 *pragmatiques*.

A nouveau, le pointage est la technique de dénombrement la plus utilisée (32/45). Personne n'a pensé à numéroter les perles ni à effectuer des groupes de dizaines rondes. Trois dyades (2C et 1P) ont fait des sous-groupes de manière aléatoire et ont additionné le tout, tandis que pas moins de huit dyades *conformes* et une *pragmatique* ont dénombré chaque ligne avant d'en faire la somme.

Que ce soit au niveau des stratégies comme à celui des techniques de dénombrement, les élèves *conformes* se révèlent dans ce problème plus inventifs que ceux dont l'enseignant a un profil *pragmatique*.

Trou

Tous les élèves ont poursuivi la représentation graphique pour répondre à ce problème. La majorité d'entre eux (33) utilisent une procédure globale d'alignement des briques sur des lignes horizontales. Cette procédure conduit dans la plupart des cas (19/20) au bon résultat si elle est menée à terme. De manière moins efficace, 16 élèves (6C et 10P) utilisent une procédure de dessin brique après brique, parfois de manière hybride avec une perception plus globale des horizontales.

D'autres méthodes de résolution menant à la bonne réponse sont apparues, *a fortiori* celles utilisant la mesure. Deux élèves *pragmatiques* ont ainsi mesuré la longueur d'une brique qu'ils ont reportée dans le dessin. Ayant une vision plus globale, six autres dyades (4 d'une même classe *pragmatique* et 2 de deux classes *conformes*) ont reporté cette longueur sur des bases horizontales préalablement tirées (Figure 7). Finalement, une dyade *pragmatique* a tenté de partir de la mesure d'une ligne pour en déduire le nombre de briques (1 ligne = 4cm = 4 briques) mais sans parvenir au bout de son raisonnement.

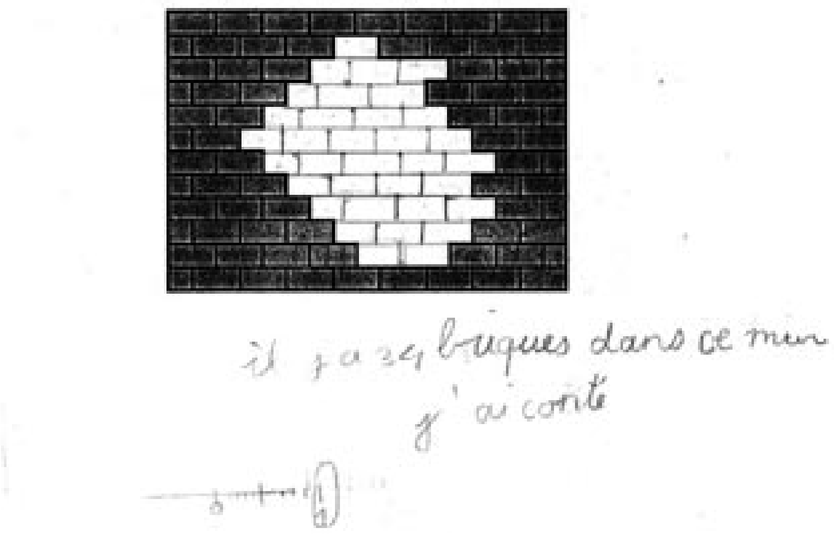


Figure 7 : Traces d'une dyade conforme ayant utilisé la règle comme instrument de mesure dans la résolution de Trou

Une variété de démarches était présente dans toutes les classes, qu'elles soient *pragmatiques* ou *conformes*, puisqu'elles dénombrent toutes entre 2 et 4 stratégies différentes.

Outre la prédominance du pointage (42/60) comme technique de dénombrement, plusieurs variations sont apparues dans les groupes, que l'enseignant ait été plutôt qualifié de *conforme* ou de *pragmatique*, les deux seules variables de profil de ce problème. Deux groupes *conformes* et autant de *pragmatiques* ont numéroté les briques à compter, trois groupes (1 C et 2 P) ont décomposé le dénombrement en créant des sous-ensembles selon le positionnement géographique des briques, tandis que 7 dyades, dont 6 *pragmatiques*, l'ont fait par lignes. On compte entre 1 et 4 stratégies différentes de dénombrement dans les classes *conformes*, et entre 2 et 3 dans les classes *pragmatiques*.

Tartes

Les exigences élevées de *Tartes* quant à la structuration de la recherche peuvent expliquer le faible taux de réussite à ce problème. La complexité du problème amène beaucoup d'élèves à ne pas laisser de traces de leurs démarches, consistant probablement en des démarches de type « essais-erreurs » souvent mentales. Notons qu'il peut aussi y avoir une part de recopiage voire d'aide de l'enseignant dans les cas où les trois réponses au problème sont données toutes cuites sous une forme se rapprochant plus de la preuve que d'un réel travail de recherche.

Du moment que les élèves entrent véritablement dans le problème, leurs traces relèvent d'une richesse et d'une diversité étonnantes. Deux grands groupes de démarches ont été élaborés : celles qui partent de la contrainte du nombre de boîtes de chaque couleur et celles qui partent du nombre de tartes à partager. La grande majorité des élèves (70/163) prennent pour première indication les boîtes dans lesquelles il s'agit de répartir les tartes. Une procédure très fréquente (38) consiste à schématiser ces cinq boîtes et à essayer d'y inscrire des cardinaux en respectant les différentes contraintes. C'est la démarche qui amène le plus souvent (33 fois sur 40) au succès total caractérisé par l'énonciation des trois répartitions possibles. Une variante de cette manière de procéder consiste à utiliser des icônes représentant des tartes plutôt que le cardinal. Ceci implique une modalité de dénombrement différent, le calcul de la somme de cardinaux pouvant être remplacé par un pointage. Une troisième et dernière variante de cette démarche partant du nombre et des caractéristiques des boîtes, beaucoup plus abstraite et proche de l'algèbre, est de poser la formule à « trous » 2 x ...+3 x …= 19 et d'essayer d'y inclure les nombres pour que l'égalité soit vérifiée. Le total des tartes dans chaque couleur de boîtes est alors trouvé par multiplication et non plus par addition répétée ou dénombrement.

		Conformes (N=36)	Distancés (N=25)	Libres (N=51)	Pragmatiques (N=51)	Total (N=163)
A partir des boîtes	Répartition de cardinaux (schémas)	9 (8)	14 (10)	12 (10)	5 (5)	40 (33)
	Répartition de cardinaux (multiplication)	2	2 (2)	0	14 (8)	18 (10)
	Répartition iconique	7 (5)	1 (1)	3 (2)	1 (1)	12 (9)
A partir des tartes	Décomposition additive	2 (2)	1 (1)	10 (9)	2 (2)	15 (14)
	Ensembles iconiques	4 (3)	2 (1)	1	2 (2)	9 (6)
	Partage équitable	3	0	6	0	9
	Utilisation de matériel	1 (1)	0	0	1 (1)	2 (2)
	Non-visible	5 (5)	2 (2)	14 (10)	19 (19)	40

Tableau 4 : Répartition des différentes stratégies selon le profil
(entre parenthèses, le nombre de dyades ayant trouvé au moins une solution)

Dans une moindre proportion, 35 dyades partent de l'ensemble des 19 tartes qu'il s'agit de partager. Quinze dyades utilisent à bon escient la décomposition additive pour le faire, mais la recherche de toutes les décompositions possibles s'arrête souvent lorsque la première solution a été trouvée (11 cas) (Figure 8).

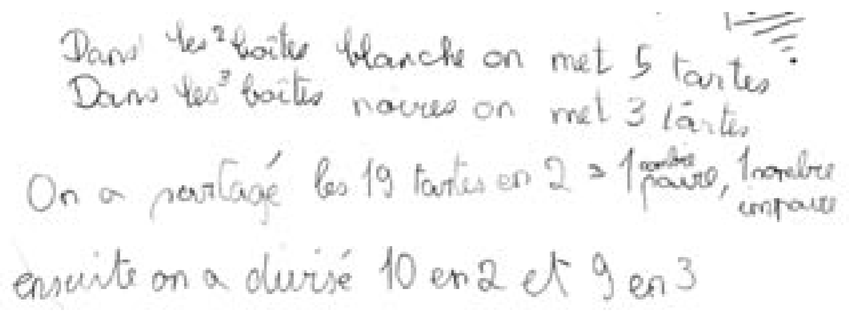


Figure 8 : Exemple d'une décomposition additive d'une dyade libre de 4P

Utilisant des symboles, neuf dyades essayent de regrouper les tartes dessinées en les entourant en fonction des contraintes des boîtes. Une seule (*pragmatique*) aboutit aux 3 solutions possibles avec cette procédure (Figure 9).

Agissant sur le concret, deux dyades (*conforme* et *pragmatique*) ont trouvé une réponse en utilisant des jetons.

Finalement, plusieurs élèves tombent dans le piège du partage, qui se veut traditionnellement régulier, et essayent de diviser 19 par 5, 3 ou 2. Naturellement, ils ne savent que faire du reste, qu'ils laissent tel quel, qu'ils mettent tant bien que mal dans une ou plusieurs boîtes ou qu'ils partagent en « morceaux » (« 6 tartes par boîte et un morceau ») ou en fraction (« 8 ½ tartes par boîte ») .

Le Tableau 4 montre une répartition plus homogène des différentes procédures dans les profils *libre* et *conforme* que chez les classes *distancées* et *pragmatiques*, qui restent principalement focalisées sur une

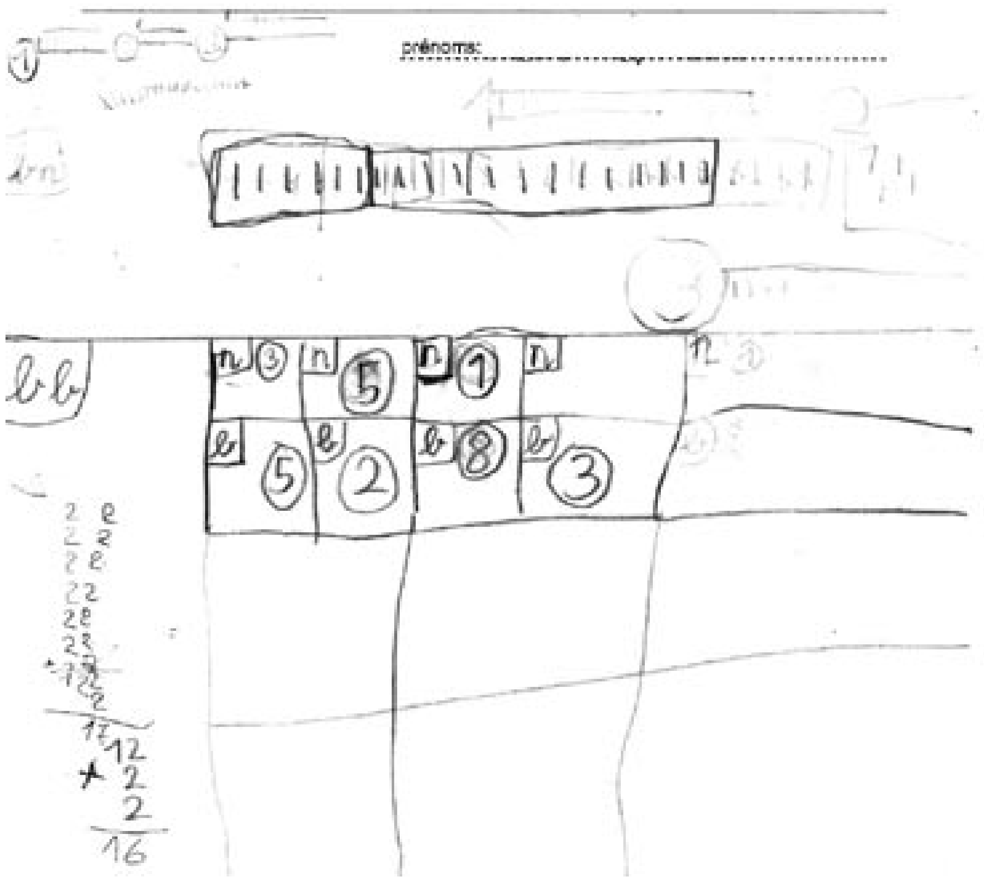


Figure 9 : Traces laissées par une dyade pragmatique de 3P utilisant des ensembles iconiques pour la résolution de Tartes

stratégie prédominante, que ce soit la notation de cardinaux dans des schémas ou intégrée à une multiplication. Nous constatons aussi que pas moins de 5 dyades *pragmatiques* d'une même classe ont répondu à la question grâce à la stratégie posant le calcul à trous, ce qui semble suspect compte tenu du degré d'abstraction que cette manière de faire requiert. Cependant, les classes *pragmatiques* (4.16) se trouvent dans le trio de tête concernant la variété moyenne des procédures visibles dans une classe, entre les classes *libres* (4.2) et *conformes* (4). Les classes *distancées* ont une moyenne de 3.3 stratégies par classe, et le minimum visible était de deux stratégies contre 3 chez les autres profils.

Les analyses indiquent aussi que les dyades *conformes* et *distancées* recourent plus souvent à une représentation graphique dans ce problème que les autres classes (c2 = 33.889, ddl = 3, p = 0.00).

Construction

Le problème *Construction* implique plusieurs obstacles qu'il s'agit de dépasser. Le premier, considérable, est la vision dans l'espace d'un dessin en perspective. Plusieurs dyades (18) se focalisent sur les cubes extérieurs sans imaginer que l'intérieur est plein, complètent plus ou moins précisément le dessin et comptent les cubes visibles, en menant parfois leur raisonnement correctement jusqu'au septième étage (6), comme en témoigne la résolution ci-dessous (Figure 10).

Dans cette manière de faire, une faute courante est de compter à deux reprises les cubes des coins. Saisir la formule du passage d'un étage à l'autre est un autre obstacle que tous les élèves n'ont pas franchi. Certains (13), allant au plus économique, tentent d'obtenir le nombre de cubes nécessaires aux sept étages en effectuant une sorte de moyenne pour chaque étage en tenant compte du nombre de cubes nécessaires aux quatre premiers étages dessinés.

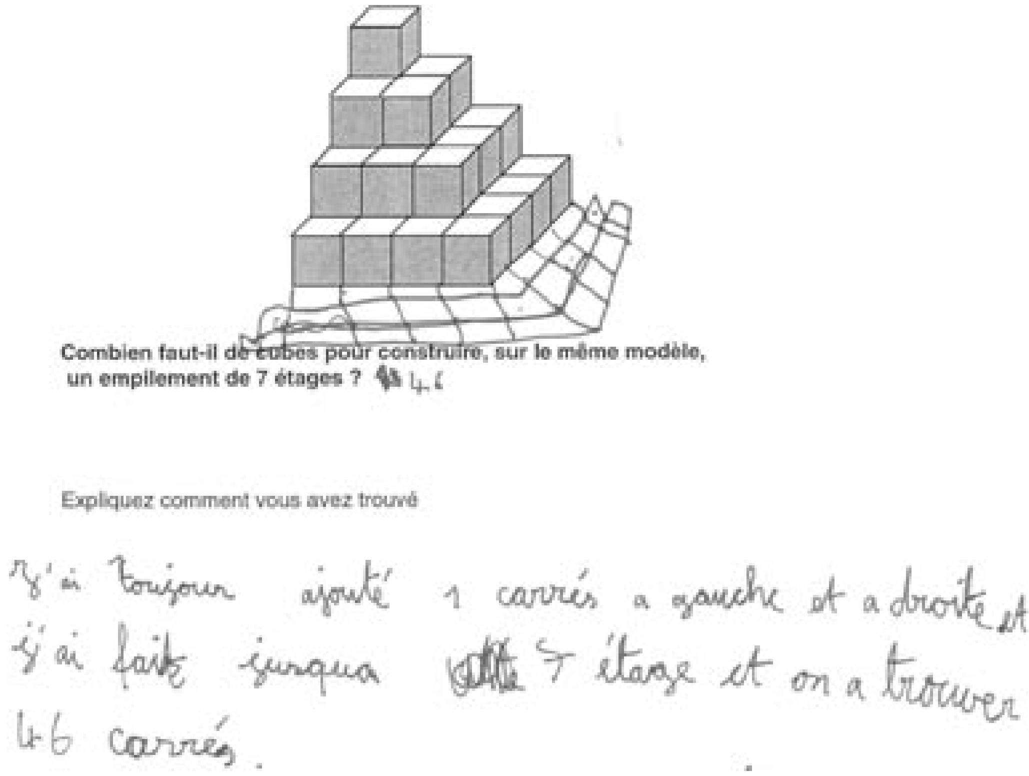


Figure 10 : Exemple d'une résolution de Construction en fonction des cubes visibles d'une dyade libre (4P)

Face à la complexité du problème, plusieurs groupes (22) ont appliqué une stratégie, dans le sens où une réelle démarche de résolution réfléchie a été mise en œuvre, mais tellement personnelle qu'eux seuls se comprenaient. Pour d'autres groupes (16), il était toutefois impossible de saisir s'il y avait réellement stratégie et en quoi elle consistait. Finalement, 12 dyades ne sont pas parvenues à entrer dans le problème et leur démarche se révélait typiquement aléatoire, prenant l'un ou l'autre chiffre au hasard pour l'inclure dans une opération quelconque.

		Conformes (N=36)	Distancés (N=25)	Libres (N=51)	Pragmatiques (N=51)	Total
Stratégies correctes	Stratégie somme (1x1)+(2x2)+….+(7x7)	10 (5)	6 (2)	10 (7)	16 (12)	42 (26)
	Somme aires mentales	4 (0)	0	12 (7)	11 (8)	27 (15)
	Vision verticale	0	0	1 (1)	0	1 (1)
	Utilisation de matériel	6 (1)	0	0	6 (6)	12 (7)
Stratégies erronées	Cubes visibles	4	6	8	0	18
	Moyenne	1	0	5	7	13
	Stratégie inqualifiable	6	4	5	7	22
Démarche aléatoire		2	5	3	2	12
Non-visible		2	4	6 (1)	1	16 (1)

Tableau 5 : Répartition des différentes stratégies selon le profil
(entre parenthèses, le nombre de dyades ayant trouvé la solution)

C’est ainsi que sur les 163 dyades s’étant attelées à la résolution de ce problème, seules 82 ont réussi à y entrer et au moins à esquisser une stratégie de résolution correcte. La plus courante est la stratégie cherchant à décomposer la construction par étages, à déterminer les aires de chacun de ceux-ci pour ensuite définir la constitution et l’aire des suivants, avant d’additionner le tout (Figure 11).

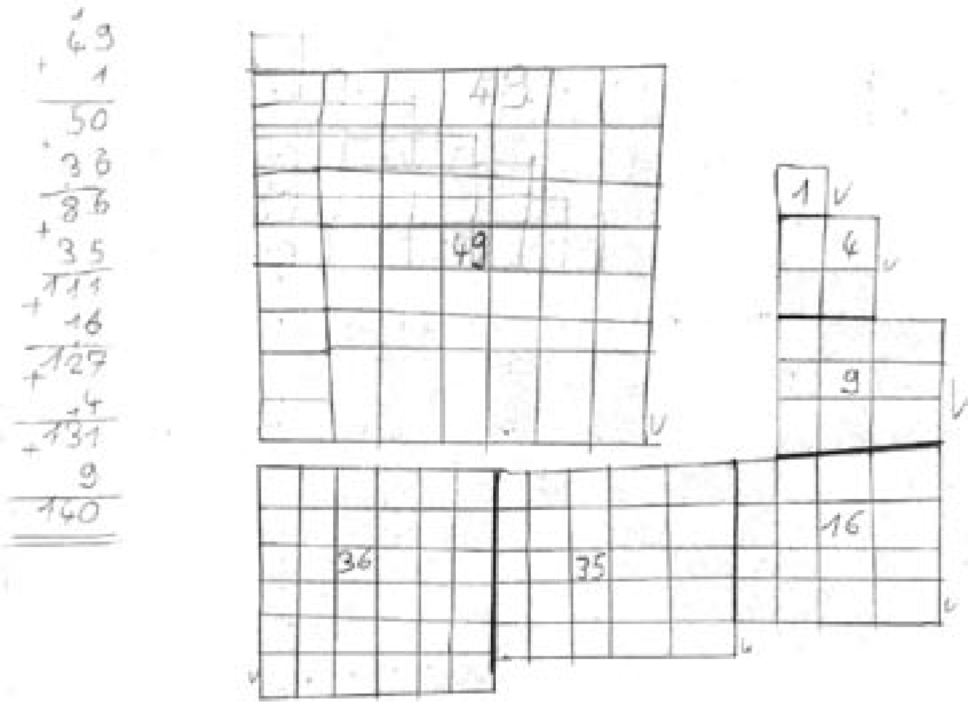


Figure 11 : Exemple de la stratégie indirecte d’une dyade distancée de 3P

42 dyades ont saisi au moins en partie cette manière de faire et 26 ont atteint la solution escomptée. Dans ce cadre-là, certains élèves parvenaient à calculer les aires en multipliant les côtés de chaque étage sans avoir à faire de dessin de coupe, alors que d’autres ont préféré redessiner chaque étage isolément, vu du dessus, pour ensuite soit dénombrer les cubes, soit y reconnaître une multiplication. Bien entendu, ces procédures peuvent être mixtes, évoluant au cours du problème, d’où l’impossibilité de dénombrer le nombre d’élèves optant pour l’une ou l’autre. Par contre, certains élèves (27 dyades) n’ont eu besoin ni de multiplication, ni de schémas de la coupe des étages pour en déterminer les aires. Leur détermination s’est faite mentalement, soit par multiplication et l’utilisation des livrets, soit par vision et comptage mental, pour les premiers étages du moins, des cubes cachés. Cette manière de faire, plus directe que l’autre, a été considérée comme une stratégie en soi et n’a pas été repérée chez des élèves de classes *distancées*. Elle mène dans 55% des cas au résultat juste, ce qui est moins que les 62% de la stratégie indirecte.

Les traces des élèves nous ont apporté une surprise intéressante sous la forme d’une stratégie totalement innovante. Une dyade dont l’enseignant est qualifié de *libre* n’a pas décomposé la pyramide par étages comme les autres élèves mais a eu l’ingénieuse idée de redessiner la pyramide vue du dessus, en spécifiant sur chaque carré sa « profondeur », c’est à dire le nombre d’étages total composant la colonne (Figure 12, p. suivante). Cette vision des choses, très élaborée et unique a mené les élèves au bon résultat.

Une deuxième surprise à été apportée par le constat de l’utilisation de matériel dans certaines classes. Du moment que les consignes ne l’interdisaient pas, cette aide fournie par la manipulation doit être considérée comme une stratégie en soi. D’autant que nous ne savons pas si l’initiative vient des élèves ou de l’enseignant. Seules des dyades *pragmatiques* et *conformes* ont eu recours aux multicubes, soit pour donner un coup de pouce à la vision dans l’espace et à la retranscription de la décomposition des étages sur la feuille, soit pour une utilisation de bout en bout, la pyramide étant construite, puis détruite et les cubes comptés. Cependant, l’utilisation providentielle d’un support manipulable ne garantit pas le succès puisque 7 groupes sur 12 ont échoué, le comptage de chaque cube étant fastidieux.

Figure 12 : Procédure par « vision verticale » d'une dyade libre de 4P

Le Tableau 5 indique que les élèves de tous les profils privilégient la démarche des décompositions par étages, si ce n'est les élèves *libres* qui ont utilisé plus fréquemment la stratégie directe de détermination des aires. D'une manière générale, ce sont les élèves *libres* et *conformes* qui tentent le plus de stratégies différentes, qu'elles soient justes ou fausses, et les élèves *distancés* qui révèlent les traces les plus uniformes. Ce résultat est aussi visible à travers le nombre moyen de stratégies (correctes ou erronées, mais pouvant être considérées comme une démarche suivie et réfléchie) utilisées par classe de chaque profil. Les classes libres se révèlent les plus imaginatives, avec 4 stratégies en moyenne visibles dans chaque classe ; les classes *conformes* en ont 3.25, et les *pragmatiques* 3, alors que les classes *distancées* n'en montrent en moyenne que 2.33. Si l'on ne considère que les stratégies pouvant amener au bon résultat (N=3), les classes *pragmatiques* et *libres* en utilisent en moyenne 2, les *conformes* 1.5 et les *distancées* une seule.

Pinocchio

Les élèves utilisent principalement deux types de procédures pour parvenir au résultat. Dans plus de la moitié des cas (75/127), ils utilisent une stratégie suivant l'ordre chronologique de la journée en séparant mensonges et vérités (Figure 13).

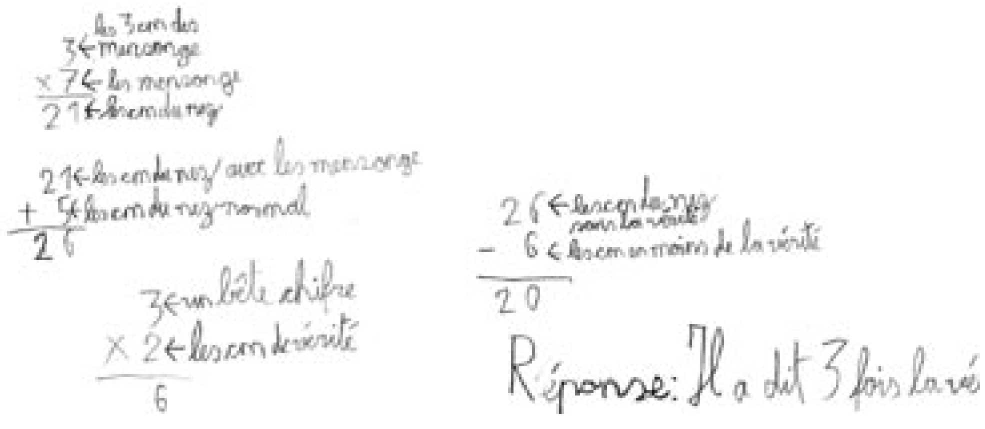
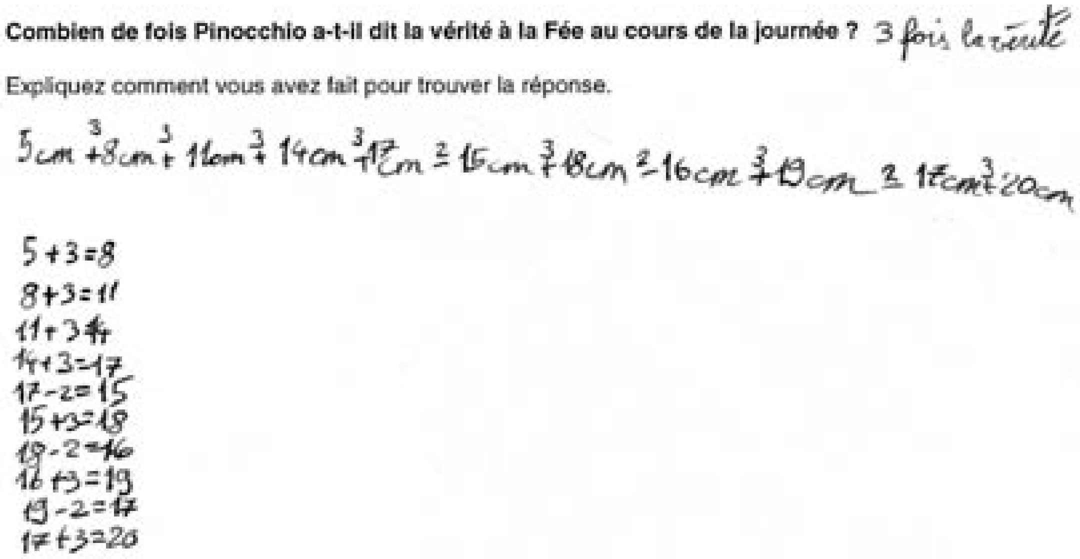


Figure 13 : Traces laissées par une dyade de 4P conforme utilisant la démarche directe pour résoudre Pinocchio

Dans 68% des cas, les élèves parviennent au résultat avec cette stratégie. Alors que cette démarche relève typiquement d'une représentation mathématique de la situation de Pinocchio, 16 dyades, toutes en 3e année sauf une, procèdent d'une manière moins directe (Figure 14). Partant de la longueur du nez le matin, les élèves avancent dans la journée tantôt en allongeant le nez d'un mensonge, tantôt en le raccourcissant d'une vérité, pour finalement, si tout va bien (c'est-à-dire si les 5 cm n'ont pas été oubliés et que les calculs sont justes), atteindre les 20 cm de fin de journée.



Combien de fois Pinocchio a-t-il dit la vérité à la Fée au cours de la journée ? 3 fois la vérité

Expliquez comment vous avez fait pour trouver la réponse.

5cm +3 8cm +3 11cm +3 14cm +3 17cm -2 15cm +3 18cm -2 16cm +3 19cm -2 17cm +3 20cm

5+3=8
8+3=11
11+3 14
14+3=17
17-2=15
15+3=18
18-2=16
16+3=19
19-2=17
17+3=20

Figure 14 : Traces laissées par une dyade conforme de 3P utilisant la démarche pas-à-pas pour résoudre Pinocchio

Cette représentation du problème colle à un certain vécu, puisque dans la réalité, on ment rarement sept fois de suite. Les sept mensonges sont donc entrecoupés de vérités, ce qui n'empêche pas 6 dyades sur les 16 ayant opté pour cette vision des choses d'arriver au bon résultat. 5% des élèves *pragmatiques* utilisent cette démarche, contre une quinzaine de pourcent chez les autres profils. D'une manière générale, la diversité des démarches dans les classes varie d'une moyenne de 1.37 stratégies différentes pour les classes *conformes* à 1.6 pour les classes *libres*, en passant par 1.5 pour les *pragmatiques*. Finalement, outre les 3 groupes dont la démarche n'a pu être observée faute de traces suffisantes, 29 dyades, soit environ 20% dans chaque profil, s'engagent dans une démarche aléatoire combinant les données au hasard. Parmi celle-ci, 3 disent avoir trouvé la réponse dans la donnée elle-même. Alors que 25% des élèves sont dans cette situation-là en 3P, ils ne sont plus que 17% en 4P.

		Conformes (N=75)	Libres (N=32)	Pragmatiques (N=20)	Total (N=127)
Stratégies correctes	Stratégie directe 5+7x3-(2x…)=20	44 (31)	18 (13)	13 (7)	75 (51)
	Stratégie pas à pas	10 (8)	5 (2)	1	16 (10)
Démarche aléatoire		17 (1)*	8 (1)*	4	29 (2)
Non-visible		1	1	1 (1)	3 (1)

Tableau 6 : Répartition des différentes stratégies selon le profil (entre parenthèses, le nombre de dyades ayant trouvé la solution) * Réussite à attribuer au hasard.

Pinocchio est un problème qui offre à voir de multiples façons d'opérationnaliser les données, le calcul de la longueur des sept mensonges pouvant se faire soit par multiplication (trouvée chez 57.4% dyades), soit par addition répétée (19.5% des dyades). De même, le nombre de vérités peut être trouvé par une division (rare : 8 cas en tout) ou par des soustractions successives (31.3%). D'une manière générale, bien que la différence ne soit pas significative, les élèves d'enseignants *pragmatiques* utilisent plus que leurs camarades la multiplication et la division (5 cas sur 19, alors que 3 dyades *conformes* sur 75 l'emploient). Les élèves d'enseignants libres, étant tous en troisième année, privilégient les additions et les soustractions répétées. Aucune division n'est visible chez eux. Les élèves conformes se situent dans la moyenne. Quant aux formes que peuvent prendre les calculs, elles sont multiples : petits calculs isolés ou longues fausses égalités, disposition en colonnes et quelquefois même une équation correcte avec des parenthèses. Remarquons qu'un élève sur cinq des groupes *conformes* et *libres* utilise la disposition en colonne, contre une seule dyade parmi les 20 *pragmatiques*.

Peu de groupes (8) utilisent une représentation graphique utile au raisonnement. Les groupes *pragmatiques* en font un plus grand usage (5 dyades, ce qui représente 26.3% des dyades *pragmatiques*) que les autres (*conformes* : 1.4% ; *libres* : 6.3%). La représentation graphique est dans la plupart des cas (5) accompagnée d'un calcul, mais une seule dyade (pragmatique) y recourant trouve le bon résultat.

Sucre

La majorité des groupes (85) étant entrés dans le problème utilisent la stratégie traditionnelle envisagée lors de l'analyse a priori, à savoir la multiplication de la longueur par la largeur et par la hauteur. Bien évidement, peu d'élèves posent telle quelle cette formule toute faite, beaucoup raisonnent au contraire par « étage » à tripler ou alors par face à multiplier par quatre ou cinq, parfois un dessin à l'appui.

> ***Exemple d'une dyade conforme de 3P*** : Pour commencer on a pris une plaque de sucre 4x5=20, le 4 à l'horizontale puis le 5 à la verticale. Mais on n'a pas pris 3 fois on l'a pris 1 fois, alors on a fait 3x20=60.

Cette stratégie est davantage utilisée par les élèves *libres* (75%) et *pragmatiques* (70%) que par les élèves *conformes* (62%), ces derniers étant en contrepartie bien plus nombreux (11 dyades, soit 14% alors qu'on ne compte que deux groupes *pragmatiques* et aucun *libre*), à conduire un raisonnement additif, en tentant de compter, séparément, les sucres mangés et ceux restants puis de sommer le tout. Malheureusement, cette stratégie ne porte pas ses fruits, puisqu'aucun élève n'atteint le résultat à cause de l'ambigüité introduite par les sucres cachés par la vision en perspective. A noter qu'un élève *conforme* a tout de même réussi à dénombrer correctement les sucres manquants, mais a omis de compter les autres ! Une troisième stratégie pouvant conduire au résultat et trouvée par les élèves consiste à compter, par piles en principe, les sucres de la périphérie de la boîte et à y additionner les piles qui sont au centre. Cette stratégie, menée par 3 dyades *pragmatiques* et autant de *conformes*, ne réussit qu'à l'une d'entre elle (Figure 15).

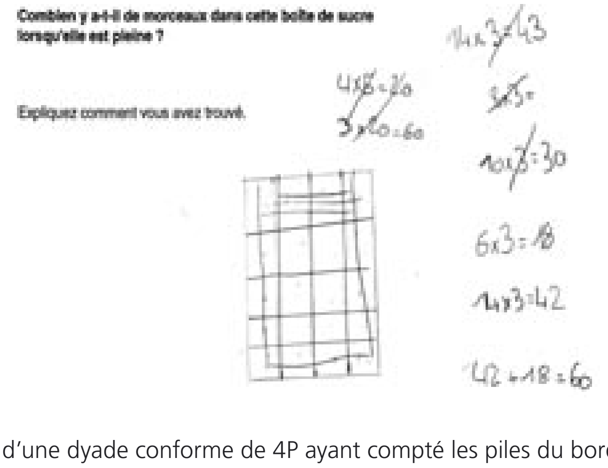


Figure 15 : Exemple d'une dyade conforme de 4P ayant compté les piles du bord puis celles du centre [19].

[19] Note de l'enseignante au verso : Désaccord entre les deux élèves. La solution résulte d'une très longue discussion (15') entre les élèves pour trouver un compromis.

La vision spatiale et la notion de volume étaient les principales difficultés de ce problème, obstacle que Vergnaud avait déjà étudié en 1983. Reprenant sa classification, nous nous attendions à trouver dans les traces des élèves des démarches erronées de type périmètre et surface, voire mixte. La première (par exemple 3+4+5) n'a pas été observée dans les traces de nos élèves. La seconde par contre a pris plusieurs formes, d'une stratégie surface tout à fait aboutie, c'est-à-dire débouchant sur le nombre de sucres correct composant la périphérie de la boîte, à des stratégies incorrectes comptant deux fois les piles des coins lors de l'addition des faces ou s'arrêtant carrément à l'addition de deux faces. Finalement, 3 dyades conformes et 1 libre parviennent à trouver le nombre de sucres de deux faces, qu'elles multiplient ensuite entre elles, aboutissant à une sorte de vision en 4 dimensions. Pour finir, nous avons classé dans le groupe aléatoire toutes les stratégies ne relevant d'aucune de celles décrites ci-dessus, ne pouvant dans ce cadre suivre les élèves dans leur raisonnement.

		Conformes (N=75)	Libres (N=32)	Pragmatiques (N=20)	Total (N=127)
Stratégies correctes	Largeur x longueur x hauteur	47 (35)	24 (16)	14 (12)	85 (63)
	Tour + centre	3 (1)	0	3	6 (1)
	Sucres mangés + sucres restants	11	0	2	13
Stratégies erronées	Stratégie type surface	7	2	1	10
	Stratégie type périmètre	0	0	0	0
	Face x face	3	1	0	4
Démarche aléatoire		4	5	0	9

Tableau 7 : Répartition des différentes stratégies selon le profil (entre parenthèses, le nombre de dyades ayant trouvé la solution)

Le Tableau 7 indique une grande variété de stratégies développées surtout par les élèves conformes et pragmatiques, même si elles ne sont souvent pas menées à terme et relativement peu efficaces. Cette tendance se confirme dans les pratiques au sein des classes ; celles qualifiées de pragmatiques utilisant toutes les 3 stratégies différentes pouvant mener au bon résultat, alors que les classes conformes en utilisent en moyenne 2.1. Quant aux classes dont le maître est libre, elles n'utilisent chacune qu'une seule stratégie permettant de trouver le volume de la boîte.

Ménagerie

Ce problème de logique suggère une démarche principalement mentale, invisible dans la plupart des traces des élèves qui peinent à l'expliciter. La plupart du temps, il semble que les élèves procèdent par essais-erreurs, en témoignent les nombreuses traces de gommage. Huit dyades modifient quelque peu la démarche en dressant a priori la liste de tous les animaux dans chacune des cages et en traçant au fur et à mesure ce qui relève de l'impossible. Mais d'une manière générale, la différenciation des procédures en fonction des profils se révèle impossible et c'est pourquoi nous ne nous attarderons pas sur ce problème.

Synthèse de l'analyse des stratégies

Alors que l'analyse en termes de réussite, de présentation des traces et d'utilisation de certains outils généraux a pu être menée de manière transversale sur l'ensemble des problèmes, la diversité des stratégies possibles pour chaque problème a rendu indispensable une approche plus fouillée de chacun de ceux-ci sur la base d'une analyse a priori. Un détour par les particularités de chaque problème a été nécessaire pour pouvoir ensuite tirer des conclusions plus générales. Ainsi, en termes de variété des démarches, presque toutes les stratégies prévues par les analyses a priori ont été utilisées [20], mais de manière très inégale. En principe, une grande majorité des élèves, tous profils confondus, privilégient une manières de faire, plus rarement deux. Cependant, des dyades se détachant du lot et utilisant des démarches peu utilisées voire innovantes ont été observées. Bien que tous les profils ne soient pas représentés équitablement sur l'ensemble des problèmes, il s'avère intéressant de remarquer que les groupes innovants ont souvent un maître qui adhère totalement à la nouvelle méthodologie. Ainsi, nous retrouvons pour chaque problème plusieurs dyades d'élèves conformes qui adoptent une stratégie originale de résolution. Les élèves d'enseignants pragmatiques font aussi preuve d'innovation, notamment dans Mur où ils sont nombreux à utiliser la mesure des briques pour compléter le dessin. Ils obtiennent souvent une moyenne de stratégies utilisées par classe comparable à celle des classes conformes. Bien que celle-ci soit souvent un peu moins élevée pour les classes libres, ces dernières font aussi partie des groupes utilisant des démarches innovantes. Leur grande capacité d'imagination ressentie lors du dépouillement n'a cependant été que peu visibilisée dans ce travail car les efforts de ces élèves se sont souvent dispersés dans des stratégies peu compréhensibles que nous n'avons pas retenues ici. Quant aux élèves dont l'enseignant est distancé, ils se distinguent fortement des autres par le choix extrêmement restreint de leurs stratégies, se cantonnant souvent à une seule. Leur nombre moyen de stratégies par classe s'en trouve ainsi réduit. Ces constatations globales et ces différences entre les profils peuvent aussi s'appliquer aux procédures de dénombrement, visibles dans plusieurs problèmes. Elles se limitent dans la grande majorité des cas à un pointage. A l'exception d'un groupe libre, seuls les élèves conformes et pragmatiques ont recours à des regroupements (aléatoires, par lignes ou groupes de 10) ou à la numérotation. Les élèves distancés se bornent à l'unique pointage.

[20] à l'exception d'une seule stratégie concernant le problème Pinocchio

Discussion

Les résultats sont contrastés et amènent des réponses différentes à nos hypothèses. Si le profil ne joue aucun rôle dans la réussite générale eu égard à la difficulté relative de chaque problème, les problèmes transversaux sont cependant moins bien réussis par les élèves d'enseignants distancés très réticents à entrer dans la nouvelle méthodologie de mathématiques, à en accepter les principes et à les mettre en œuvre lors des leçons. La moindre performance de ces élèves dans ce type de problèmes peut refléter la faiblesse ou la rareté du travail de problèmes semblables en classe. Or les nouveaux moyens de mathématiques font justement le pari de l'apprentissage par le biais de problèmes impliquant plus qu'une seule réponse donnée après un unique calcul. Cependant, c'est précisément ce schéma d'apprentissage que les enseignants distancés refusent ou craignent, pour quelque raison que ce soit suscitée par l'introduction d'une innovation (Roditi, 2005, Robert, 2001, Marsollier, 1999). Au-delà de la simple planification des exercices que l'enseignant effectue lorsqu'il prépare ses cours, il semblerait aussi que le contrat didactique en vigueur dans les classes ne soit pas de même nature en fonction du profil ; en témoigne le taux élevé de non-réponses chez les élèves d'enseignants (pragmatiques et distancés) n'adhérant pas à la nouvelle méthodologie. Si ces élèves préfèrent ne pas donner de réponse plutôt que d'en avancer une fausse, c'est peut-être parce que leur maître a beaucoup de mal dans le quotidien à leur laisser l'entière responsabilité de la prise en charge du problème, et à prendre le risque qu'ils n'aboutissent pas au résultat attendu. Tiraillé plus que tous les autres par le paradoxe de la dévolution, l'enseignant n'adhérant pas aux principes avancés par la didactique des mathématiques éprouve des difficultés à accepter que dans un premier temps, la réponse de l'élève puisse être éloignée de « la bonne réponse », et peine alors à « communiquer le savoir sans le dévoiler » (Brousseau, 1988, p.325). Au contraire, le comportement audacieux des élèves conformes traduirait les effets d'un contrat didactique laissant plus de place à la responsabilisation des élèves dans la prise en charge des problèmes, responsabilisation qui va de pair avec la possibilité de faire des essais et aussi des erreurs, moteur du progrès. Donner une réponse, quelle qu'elle soit, signifie aussi avoir trouvé un consensus au sein du groupe, et pourrait de ce fait refléter une certaine habitude du travail en groupe en classe ordinaire.

L'effet le plus conséquent de l'épistémologie des enseignants se traduirait dans la façon dont les élèves présentent leur solution et leur démarche, qu'elles soient correctes ou non. Si les copies des élèves d'enseignants distancés se révèlent souvent presque vierges de tout commentaire sur la façon dont ils ont procédé, celles des élèves de maîtres conformes sont d'une richesse étonnante du point de vue de l'explicitation de leur démarche, souvent longue, parfois argumentée ou illustrée. Bien que les traces des élèves explicitant leur démarche ne puissent être comparées à une réelle situation de formulation où l'élève se trouve contraint de prendre des décisions en réaction aux informations nouvelles données par le jeu de communication (Flückiger, 2000), la verbalisation de la démarche est une prémisse indispensable à la situation de formulation telle que définie par Brousseau, et les explicitations proches de la preuve semblent montrer une certaine capacité d'anticipation des élèves de la réaction des autres en situation de communication. Au-delà d'une simple habitude dans les pratiques de la classe, la richesse et la quantité de ces traces semblent révéler une épistémologie propre de l'enseignant. Celui pour qui la formulation est une condition favorisant les acquisitions mathématiques des élèves met probablement plus souvent en œuvre, lors des mises en commun, des situations de mini-sociétés mathématiques rendant nécessaires la formulation et la communication de ses découvertes. Lorsqu'au contraire la présentation des savoirs se fait avant tout par ostension (Salin, 1999), les élèves ne sont mis en situation ni d'expliciter ni de justifier leurs démarches, puisque cela a déjà été fait auparavant par l'enseignant.

Nul besoin d'expliquer pourquoi on applique telle démarche. Il suffit de faire confiance à l'enseignant (Perrin-Glorian & Hersant, 2003).

L'analyse spécifique des démarches pour chaque problème fait ressortir quelques particularités qu'il est difficile d'apprécier en tant qu'effet de profil ou en tant qu'effet classe. Même si l'échantillon n'était pas homogène, l'analyse de plusieurs problèmes a permis de faire émerger plusieurs constatations récurrentes. Tout d'abord, il n'y a pas de gros contraste dans le choix de stratégie. Dans tous les problèmes, nous assistons à un choix massif d'une stratégie, choix dicté par la nature du problème et les compétences des élèves à un degré donné plus que par le profil de leur enseignant. Ainsi, nous ne pouvons conclure à de réelles différences induites par l'épistémologie propre à l'enseignant quant au choix d'une procédure directe ou plutôt indirecte, même s'il existe, dans certains problèmes (Construction et Tartes), des préférences propres en fonction des profils. Cependant, si l'on ne peut comparer les élèves quant au choix prédominant d'une stratégie, les divergences entre les profils peuvent se trouver dans la capacité à trouver et utiliser d'autres démarches que la plus courante pour résoudre les problèmes. Et sur ce point, c'est à nouveau sans conteste les élèves de maîtres conformes adhérant totalement à la nouvelle méthodologie, mais aussi dans une moindre mesure, les élèves d'enseignants qualifiés de libres et pragmatiques, qui s'essayent au plus grand nombre de stratégies différentes. Leur variété dans l'élaboration de stratégies était telle qu'à plusieurs reprises, dans les problèmes Trou, Tartes, Construction, Sucre et Pinocchio, les élèves ont dépassé les analyses a priori en utilisant des démarches non envisagées. En revanche, les élèves d'enseignants distancés restent bien souvent cantonnés à la stratégie utilisée par une majorité de dyades. A ceux qui s'insurgeraient contre le biais issu d'une capacité particulièrement innovante d'une seule ou de deux classes dont l'attitude du maître est conforme, l'étude approfondie du nombre de stratégies par classe et l'établissement d'une moyenne par profil a pu montrer que les élèves d'enseignants distancés étaient toujours en deçà de la variété trouvée chez les autres profils. Cette variété considérable peut être expliquée par une adhésion des maîtres conformes au principe de la construction des savoirs, favorisée par une activité de l'élève en situation adidactique, mais aussi par la reconnaissance de l'efficacité des démarches multiples trouvées par les élèves. Ce n'est qu'à ce prix que l'habitude d'innover dans les démarches de résolution peut éclore. Les enseignants pragmatiques, tout en n'étant pas convaincus par le socioconstructivisme prôné par les nouveaux moyens, disent les appliquer et cette mise en œuvre scrupuleuse suffirait à faire émerger des démarches de résolution variées chez leurs élèves. En retour et conformément aux résultats de Margolinas (2001) cette prise de conscience des effets de la méthodologie sur les démarches des élèves peut expliquer la modification de l'attitude envers les nouveaux moyens après quelques années de mise en pratique de la méthodologie (Tièche Christinat & Delémont, 2005).

Les analyses globales des outils utilisés pour la résolution des différents problèmes ont aussi mis au jour des résultats infirmant nos hypothèses. Il en est ainsi de l'usage prégnant de l'algorithme en colonne chez les dyades libres, qui plus est souvent en troisième année notamment pour le problème Pinocchio. Un autre résultat dément l'hypothèse postulant un usage prépondérant de techniques calculatoires chez élèves d'enseignants réfractaires aux principes de la nouvelle méthodologie. Les résultats montrent en effet chez ces dyades un usage prégnant de la représentation graphique qu'elles privilégient au détriment d'un calcul posé. Si les entretiens ont fourni des indications sur l'attitude globale des enseignants vis-à-vis du paradigme socioconstructiviste, ils ne disent rien de la rigidité des techniques imposées aux élèves en classe ordinaire, qu'il s'agisse de l'algorithme en colonne ou de l'utilisation de la représentation graphique.

Conclusion

Malgré la diversité intrinsèque aux problèmes rendant de prime abord ardues les comparaisons des procédures des élèves, cette recherche a tiré profit d'une double analyse, incluant à la fois des dimensions transversales et spécifiques à chaque problème, pour révéler les incidences de l'épistémologie de l'enseignant sur le travail des élèves en situation de résolution de problème. La première constatation est que l'attitude de l'enseignant vis-à-vis de la nouvelle méthodologie de mathématiques n'a ici pas de véritable influence en termes de réponse juste ou fausse à un problème mathématique relativement complexe. Ses incidences sont à rechercher plus finement dans les démarches des élèves qui reflèteraient en partie leur manière de travailler en classe.

	Réussite	Réponses données	Explication littérale	Variété des stratégies	Représentation graphique	Algorithme en colonne
Conforme	→	↗	↗	↗	→	→
Distance	→	↘	↘	↘	↗	↘
Libre	→	→	→	→	→	↗
Pragmatique	→	↘	→	→	→	→

Tableau 8 : Tendances des élèves dans les différents domaines en fonction du profil de leur enseignant

Plutôt qu'une nette opposition entre les profils conformes et libres adhérant au paradigme socioconstructiviste et les profils distancés et pragmatiques moins convaincus, cette recherche montre que ce sont les profils conformes et distancés qui dévoilent les plus nets contrastes (Tableau 8). Les divergences entre ces profils s'opposant tant sur l'attitude envers la nouvelle méthodologie que sur sa mise en œuvre montrent que l'attitude doit être couplée à la pratique pour que les effets escomptés de cet outil d'enseignement soient les plus appréciables. L'idéal, pour que les démarches des élèves concordent avec ce qui est promu par le socioconstructivisme, c'est d'adhérer en pensée et en acte à l'innovation. Et inversement.

Cependant, les analyses, en situant les élèves dont l'enseignant applique la méthode à la lettre sans forcément y croire dans la moyenne et à bonne distance des élèves dont les maîtres sont les plus réfractaires, montrent que la simple mise en œuvre quasi-mécanique de la méthodologie suffirait pour que l'effet de la démarche socioconstructiviste se fasse ressentir sur le travail des dyades. Les élèves dont l'enseignant se révèle pragmatique montrent toutefois un fort taux de non-réponses, tout comme leurs collègues dont les maîtres sont distancés, ce qui traduirait une différence de travail dans la gestion de l'erreur et dans l'organisation du travail en groupes ; ceci devrait être vérifié au moyen d'observations plus fines sur les pratiques.

En d'autres mots et en incluant les dyades d'enseignants libres situées elles aussi entre les deux extrêmes, il suffirait d'une adhésion partielle aux nouveaux moyens – par conviction ou application stricte – pour faire émerger chez les élèves une certaine variété de démarches et pour favoriser la verbalisation de celles-ci.

Quant au délicat passage à la formulation telle que la définit Brousseau, des observations en classes ordinaires seraient indispensables pour en cerner le degré d'achèvement !

Plus globalement, une démarche d'observation pourrait être envisagée pour lever l'ambigüité de certaines inductions faites entre pratique évoquée et réelle, car confronter des entretiens d'enseignants à des traces d'élèves constituait une démarche osée, mais heureusement fructueuse. D'autre part, cette recherche limite son champ d'investigation aux nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques de Suisse romande. Croire aux recommandations de ces nouveaux moyens ou les appliquer à la lettre suffirait à produire quelques effets sur le travail des élèves. Nul ne sait encore si un autre moyen d'enseignement actuel produirait des résultats similaires.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Antonietti, J-P. & al. (2003). *Evaluation des compétences mathématiques en fin de 2ème année primaire : Résultats de la première phase de l'enquête Mathéval.* Neuchâtel : Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique (IRDP) (Recherches 03.2).

Bailleul, M. (eds) (1999). *Actes de la Xe école d'été de didactique des mathématiques*, ARDM, tome 1.

Bressoux, P. (1994). *Les recherches sur les effets-écoles et les effets-maîtres. Revue Française de Pédagogie,* 108, 91-137.

Bressoux, P. (2001). Réflexions sur l'effet-maître et l'étude des pratiques enseignantes. IN : Les pratiques enseignantes : contributions plurielles. *Les dossiers des sciences de l'éducation n°5*, 35-52.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 7.2, 33-115.

Brousseau, G. (1996). *Théorie des situations didactiques : Didactiques des mathématiques 1970-1990.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G., (1999). Notes sur la recherche en didactique des mathématiques, Communication du 2.12.1999 lors d'un colloque tenu à Palerme publiée à l'adresse internet www.irresicilia.it/docum/pub/brousseau.htm.

Burton, R. & Flammang, C. (2001). D'une stratégie d'enseignement des sciences centrée sur l'enseignant vers une stratégie centrée sur l'élève : analyse des processus d'enseignement, In : Bru, M. et Maurice, J.-J. (coord). Les dossiers des sciences de l'éducation ; *Les pratiques enseignantes : contributions plurielles,* n°5, pp.53-65, Toulouse : Presses Universitaires du Mirail.

Chevallard, Y. (1989). *Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel.* IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique la figure du professeur. *Recherches en didactiques des mathématiques* 17/3 pp.17-54. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Conne, F. (1986). *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire.* Lausanne : Couturier-Noverraz.

Delémont, M. & Tièche Christinat, C. (2003) *L'innovation mathématique dans le quotidien de la classe. Le point de vue des enseignants de 3P-4P.* Neuchâtel : Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique (IRDP) (Recherches 03-1004).

Flückiger, A. (2000). *Genèse expérimentale d'une notion mathématique. La notion de division comme modèle de connaissances numériques. Genève* : Thèse n° FPE 291.

Gagnebin, A., Guignard, N. & Jaquet, F. (1997), *Apprentissage et enseignement des mathématiques, commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire. Commission romande des moyens d'enseignement (COROME).*

Knupfer, C., avec la collaboration de Tièche Christinat, C. (2000), *Analyse des entretiens conduits auprès des enseignantes de 1P/2P.* Neuchâtel : Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique (IRDP) (Recherches 00-1005).

Margolinas, C. (2001). Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp.141-155).

Marsollier, C. (1999). Innovation pédagogique et identité professionnelle de l'enseignant ; le concept de « rapport à l'innovation ». *Recherche et formation*, n°31, pp.11-29.

Maury, S. & Caillot, M. (dir.) (2003). *Rapport au savoir et didactiques*. Paris : Fabert.

Perrin-Glorian, M.J. & Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse d'une séquence ordinaire. In : *Recherches en didactiques des mathématiques,* vol.23/2, pp.217-276.

Portugais, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, Berne : Peter Lang.

Robert, A. & Robinet, J. (1992). *Représentations des enseignants et des élèves*. Repères IREM 7. pp.93-99.

Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 21/1.2. pp.57-80.

Roditi, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques : entre contraintes et liberté pédagogique.* Paris : L'Harmattan.

Salin, M.-H. (1999) Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique, in *Le cognitif en didactique* ouvrage collectif édité par G. Lemoyne et F. Conne, 327 - 353. Les Presses de l'Université de Montréal.

Tièche Christinat, C. & Delemont, M. (2005). *Pratiques et discours. Le nouvel enseignement des mathématiques sous la loupe*, Neuchâtel : Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique (IRDP).

Vergnaud, G. (1983). Didactique et acquisition du concept de volume. *Recherche en didactique des mathématiques*, vol 4.1, pp.9-25

Vergnaud, G. (1991). *La théorie des champs conceptuels, Recherches en didactique des mathématiques*, vol 10/2.3, Grenoble, la Pensée Sauvage édition.

Annexes

Enoncés des problèmes
et analyses a priori

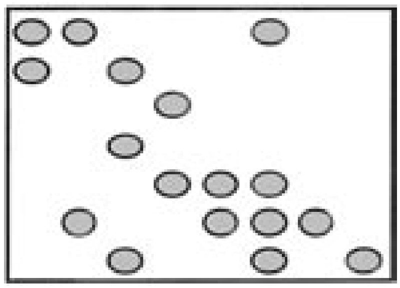
Chocolats

Dans cette boîte, les chocolats étaient bien alignés et disposés régulièrement.

Mais il n’en reste que 17.

Combien de chocolats de cette boîte ont déjà été mangés ?

Expliquez votre raisonnement.



Catégorie RMT : 3 (7ème édition, épreuve 1)

Suivi IRPD : 2P (8 classes)

Savoirs en jeu :

- Disposition régulière d’objets (pavage régulier) séparés par des espaces et alignés selon un axe vertical et un axe horizontal
- Dénombrement: maîtrise de la suite des nombres jusqu’à 39, voire 56.

Et selon les procédures utilisées :

- Aire d’un rectangle: comptage d’unité pavage / Formule L x l (structure multiplicative)
- Opérations dans N: (soustraction ou addition lacunaire avec une retenue (56-17), éventuellement multiplication 7x8; éventuellement addition de petits nombres (total des lignes).

Stratégies attendues pour parvenir à la solution correcte :

Stratégie directe (recherche directe de la transformation)	
Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Pavage de l’ensemble de la boîte	Pavage chocolat par chocolat Quadrillage avec la règle
Dénombrement direct des chocolats dessinés par l’élève	Comptage avec numérotation Comptage avec pointage Résultats intermédiaires par ligne puis addition du tout

Stratégie indirecte (basée sur la recherche de la transformation par rapport aux deux états)	
Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Pavage de l’ensemble de la boîte ou	- pavage de l’ensemble (choc après choc ou quadrillage)
Pavage des deux dimensions	- pavage d’une ligne et d’une colonne
Recherche du nombre total de chocolats dans la boîte	- comptage du tout - addition répétée d’une colonne ou d’une ligne - formule de l’aire directe (multiplication lxc))
Soustraction des chocolats restants (17, dans la donnée)	Soustraction en ligne ou en colonne Addition lacunaire

Prises en compte nécessaires :

- Alignement horizontal
- Alignement vertical
- Chocolats restants

Bérangère

Bérangère est dans l'escalier, sur la neuvième marche à partir du bas. Elle monte 3 marches puis en descend 5 et remonte de 7 marches. Il lui reste encore 6 marches à escalader avant d'arriver en haut. **Quel est le nombre de marches de l'escalier ?** Expliquez comment vous avez trouvé.

Catégorie RMT : ? (4ème édition, épreuve 2) à pas trouvé d'analyse a priori

Suivi IRPD : 2P (8 classes)

Contenus mathématiques :

- Opérations dans N (additions et soustractions de nombres peu élevés avec des passages de la dizaine); une ou plusieurs ETE avec recherche de l'état final.

Stratégies attendues

Stratégie directe (regroupement de toutes les transformations à une ETE)	
Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Effectuer l'ensemble des transformations à la suite sans résultats intermédiaires	9+3-5+7+6=20 Addition avec calcul posé en ligne ou en colonne Déplacement sur la bande numérique

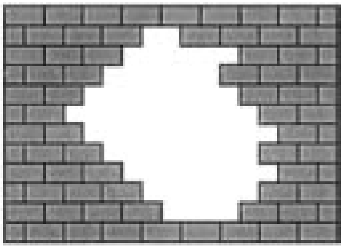
Stratégies indirectes :	
(regroupements des trois premières transformations à deux ETE)	
Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Effectuer l'ensemble des trois premières transformations puis donner le résultat intermédiaire correspondant à la fin de la deuxième phrase et des mouvements de Bérangère.	9+3-5+7=14 Addition avec calcul posé en ligne ou en colonne Déplacement sur la bande numérique (avec arrêt noté à 14)
Calculer à partir de là le nombre de marches total de l'escalier, en imaginant les 6 marches en plus (dernière assertion de l'énoncé).	14+6= 20 Addition avec calcul posé en ligne ou en colonne Déplacement sur la bande numérique (avec arrêt noté à 14)
(aucun regroupementà 4 ETE)	
Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Effectuer toutes les transformations en donnant les résultats intermédiaires	9+3=12 12-5=7 7+7=14 14+6=20 avec calcul posé en ligne ou en colonne Déplacement sur la bande numérique (avec arrêt noté à chaque état trouvé: 12, 7, 14, 20)

Pour les deux dernières stratégies, fausse égalité probable pour le calcul posé.

Prises en compte nécessaires : l'état initial et les quatre transformations

Le trou

Combien manque-t-il de briques dans ce mur ?



Catégorie RMT : 3,4, début 5 (2ème édition, épreuve 2)

Suivi IRPD : 2P (9 classes). Avec la variable didactique “surface du trou” abaissée de 10 briques (44 à 34 briques).

Contenus mathématiques :

- Disposition régulière d’objets (pavage régulier) rectangulaires selon un modèle incluant un décalage régulier d’une demi-brique d’une ligne à l’autre
- Translations
- Dénombrement: maîtrise de la suite des nombres jusqu’à 34

Et selon la procédure utilisée:

- Opérations dans N (addition de petits nombres)

Stratégies attendues :

Stratégie directe (recherche directe de la transformation)	
Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Pavage du trou en respectant la structure du mur (décalage horizontal des briques)	Brique après brique Axe tracé à la règle (procédure plus générale)
Dénombrement des briques dessinées	Comptage de l’ensemble par pointage ou numérotation comptage de chaque ligne et addition de chacune d’elle par un calcul posé addition d’autres groupements

Prises en compte nécessaires :

Le trou (et non les briques déjà dessinées)

La disposition régulière des briques : Lignes horizontales régulières
Traits verticaux non régulières

Procédures erronées susceptibles d’apparaître :

Quadrillage du mur à la règle sans tenir compte des décalages des briques.

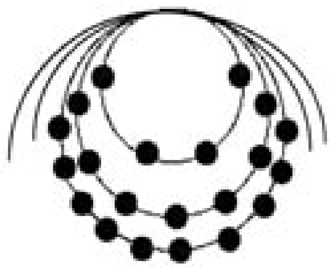
Le Collier

La reine Michèle possède un collier de 5 rangs de perles.

Le premier rang compte 4 perles, le deuxième rang a 7 perles, le troisième en a 10, et ainsi de suite. A partir du deuxième, chaque rang a trois perles de plus que le précédent.

En tout, combien y a-t-il de perles dans le collier ?

Expliquez pourquoi



Catégorie RMT : 3 (4ème édition, épreuve 1)

Suivi IRPD : 2P (9 classes), avec la variable didactique "nombre de rangs" abaissé à 5 au lieu de 7.

Contenus mathématiques :

- Dénombrement: maîtrise de la suite des nombres jusqu'à 50
- Opérations: addition (ajouter trois à plusieurs chiffres)
- Introduction aux fonctions mathématiques

Et selon la procédure choisie :

- Opérations dans N: addition de nombres avec retenues

Stratégies attendues :

Stratégie directe (experte)	
Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Etablir une suite de nombres reliés par des additions	4+7+10+13+16 (le calcul de la fonction est mentale)
Calculer la somme de cette suite	Addition avec calcul posé en ligne, avec regroupements possibles (qui forment des dizaines rondes ou simplement des sous-totaux) ou en colonne

Stratégies indirectes	
Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Détermination du nombre de perles dans les deux derniers rangs	Par une suite de nombres sans opérations écrites : /13/16 Par une suite de nombres avec opérations écrites : 10+3=13 13+3=16
Comptage de l'ensemble des perles	Par un calcul reprenant les sommes de chaque ligne Par comptage et calcul : - comptage partiel de chaque sous-ensemble (chaque sous-ensemble pouvant être obtenue soit par addition de la somme des trois rangs dénombrés ou recherchés dans la consigne pour la première partie, soit par surcomptage sur le dessin) et addition de ces deux résultats intermédiaires - comptage partiel de chaque rang (résultat intermédiaire) et somme du tout

Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Poursuite du dessin des deux derniers rangs	En poursuivant le dessin (sans faire de calcul de la somme: dessiner le nombre de perles du rang précédent puis en dessiner trois de plus)
Comptage de l'ensemble des perles	par comptage direct continu des perles de la partie déjà dessinée et de celles dessinées par l'enfant.par comptage et calcul : - comptage partiel de chaque sous-ensemble (chaque sous-ensemble pouvant être obtenue soit par addition de la somme des trois rangs dénombrés ou recherchés dans la consigne pour la première partie, soit par surcomptage sur le dessin) et addition de ces deux résultats intermédiaires - comptage partiel de chaque rang (résultat intermédiaire) et somme du tout

Prises en compte nécessaires :

- La fonction nb de perles sur une ligne = nb de perles sur la ligne précédente + 3, et ce pour les lignes 4 et 5.
- Etat initial du collier (3 premiers rangs)
- Les perles des 2 derniers rangs

Procédures erronées susceptibles d'apparaître :

- Incompréhension de l'expression "trois perles de plus", et constitution des deux derniers rangs avec trois perles chacun.
- Procédure par itération sans tenir compte du changement de rang (10+3/ 10+3) pour déterminer le nombre de perles constituant les deux derniers rangs.

Le nez de Pinocchio

> Le nez de Pinocchio a 5 cm de long. Quand Pinocchio dit un mensonge, la Fée aux cheveux bleus l'allonge de 3 cm, mais quand il dit la vérité, la Fée le raccourcit de 2 cm. A la fin de la journée, Pinocchio a dit 7 mensonges et son nez a 20 cm de long.
>
> **Combien de fois Pinocchio a-t-il dit la vérité à la Fée au cours de la journée ?**
>
> Expliquez comment vous avez fait pour trouver la réponse.

Catégorie RMT : 3, 4, 5 (7ème édition, 2ème épreuve).

Suivi IRPD : 3P (10 classes) et 4P (15 classes)

Contenus mathématiques :

- Opérations dans N: addition, soustraction

Et selon la procédure utilisée : multiplication, division

Stratégies attendues :

Stratégie 1 (indirecte):

Cette démarche de résolution suit le temps de la journée en partant du matin pour aboutir au soir, tout en séparant clairement les actions (mentir, dire la vérité) de Pinocchio. Elle passe par une étape intermédiaire (la longueur du nez après les mensonges), mais elle peut encore passer par la détermination de deux autres résultats intermédiaires (la longueur du nez due aux mensonges, et celle due aux vérités). Ceci aboutit à quatre variantes:

Procédure	Moyens pouvant ê utilisés
Déterminer la longueur du nez augmenté à cause des mensonges (application linéaire)	Multiplication (3x7) Additions successives Bande numérique
Recherche la longueur du nez après avoir dit les mensonges, en tenant compte de la longueur du matin. (ETE avec recherche de l'état final)	Addition posée en ligne ou en colonne 5 +21= Déplacements sur la bande numérique

ou

Procédure	Moyens pouvant ê utilisés
Déterminer directement la longueur du nez dans la journée après les mensonges	5+3+3+3+3+3+3+3=26 Additions successives Déplacements sur la bande numérique

Procédure	Moyens pouvant ê utilisés
Recherche de la longueur du nez raccourcie par les vérités, (ETE avec recherche de la transformation)	Addition lacunaire, soustraction lacunaire (26- ? = 20) ou soustraction (26-20=) En ligne ou en colonne
Recherche du nombre de vérités incluses dans cette longueur de nez rétrécie (fonction linéaire)	Division: 6:2= Multiplication lacunaire 2x? =6 (Partage de la bande numérique et comptage?)

ou

Procédure	Moyens pouvant ê utilisés
Par "pas de vérités", aller jusqu'à la longueur finale	Soustractions (parfois successives) de deux jusqu'à arriver à 20 26-2-2-2 ou 26-2=24-2=… Déplacements sur la bande numérique
Recherche du nombre de vérités	Comptage du nombre de 2

Stratégie 2 (indirecte)

Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Recherche de la transformation globale du nez entre le matin et le soir, c'est-à-dire l'ensemble des transformations (vérités + mensonges) que le nez a subies durant la journée.	Soustraction ou addition lacunaire 5+ ? =20
Déterminer la longueur du nez augmenté à cause des mensonges (application linéaire)	Multiplication (3x7) Additions successives
Recherche de la part de nez due aux vérités, c'est-à-dire la différence entre cette transformation globale (15 cm) et la part due aux mensonges (21cm).	Soustraction ou addition lacunaire 21-15= ou 15+?=21
Recherche du nombre de vérités inclues dans cette longueur de nez (fonction linéaire) rétrécie	Division: 6:2= Multiplication lacunaire 2x? =6

Stratégie 3 (directe)

Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Partir de la longueur du nez le matin et y appliquer la suite de transformations (vérités et mensonges un à un; mélangés), par essais erreurs, jusqu'à arriver à la longueur du nez le soir et en tenant compte du nombre total de mensonges.	5+3+3+3+-2+3+3+3-2+3-2=20

Prises en compte nécessaires:

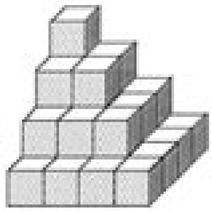
- La longueur du nez le matin et la longueur du nez le soir
- L'ensemble des transformations dues aux mensonges
- La longueur d'une vérité

Construction

Voici un empilement de cubes. Il comporte quatre étages de cubes et chaque étage est de forme carrée.

Combien faut-il de cubes pour construire, sur le même modèle, un empilement de 7 étages ?

Expliquez comment vous avez trouvé.



Catégorie RMT : 4-5 (7e édition, épreuve 1). Ce problème est repris par les nouveaux moyens de 6P, dans le thème 7 "applications". Les variables didactiques y sont augmentées: recherche du nombre de cubes total pour deux pyramides de 10 et 20 étages, où l'objectif est, "à partir de l'objet physique, de passer à une démarche arithmétique prenant en compte la relation entre le nombre d'étages et le nombre de cubes" (LM p. 192).

Suivi IRPD : 3P (10 cl.) et 4P (15 cl.). Avec la variable didactique "nb d'étages total" modifiée de 10 à 7 étages.

Contenus mathématiques :

- Vision dans l'espace, perspective.
- Dénombrement: maîtrise de la suite des nombres jusqu'à 91
- Aires de carrés
- Opérations dans N: multiplication, addition
- Introduction aux fonctions mathématiques

Stratégies attendues :

Stratégie indirecte :

Procédure	Moyens pouvant être utilisés
décomposition de chaque étage déjà dessiné pour déterminer combien de cubes chacun contient.	- dessin en coupe horizontale (//surface de chaque étage) - «vision» des cubes invisibles (par référence à ceux visibles) pour voir mentalement la surface de chaque étage.
Déterminer le mode de passage d'un rang à l'autre pour imaginer la constitution des deux derniers rangs:	Par référence aux cotés des surfaces des étages, comprendre la suite 1x1 2x2 3x3 4x4
Et en déduire les deux étages suivants	Calcul :5x5 6x6 7X7 Ou dessin (en deux dimensions)
Calcul de chaque produit de mesures	Multiplication Si dessins: additions répétées de lignes dénombrement
Somme de tous les cubes	Addition des produits (addition en colonne ou en ligne avec regroupements pour faire des dizaines rondes ou d'autres regroupements).

Stratégie plus directe avec utilisation des produits

Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Comptage du nombre de cubes de chaque étage dessiné	- dessin en coupe de haut (//surface de chaque étage) - «vision» des cubes invisibles (par référence à ceux visibles) pour déterminer mentalement la surface de chaque étage
Reconnaissance de la suite de carrés parfaits (est-ce envisageable en 4P??? Peut-être peut-on s'attendre à un blocage des élèves qui n'ont pas fait de dessin de la surface de chaque étage à ce moment-là)	Par référence aux aires de chaque étage, comprendre la suite des carrés parfaits 1 4 9 16
Poursuivre cette suite avec les trois carrés parfaits suivants	25 36 49
Somme de tous les cubes:	Addition de la suite de nombres: 1+4+9+16+25+36+49 (addition en colonne ou en ligne avec regroupements pour faire des dizaines rondes ou d'autres regroupements).

Procédures erronées susceptibles d'apparaître:

1) comptage du nombre de cubes visibles pour chaque étage dessiné: 1 3 5 7
2) Reconnaître la fonction (erronée) x+2
3) Poursuivre cette suite avec les deux nombres impairs suivants
4) Additionner le tout 1+3+5+7+9+11+13=

Ou encore tenter de poursuivre le dessin en 3 dimensions avec les risques d'imprécisions que cela comporte.

Prises en compte nécessaires:

- Etages de forme carrée
- Ajout de 1 ligne et 1 colonne à chaque étage ou compréhension du lien entre nombre de cubes et n° de l'étage.
- Addition de tous les cubes (et non seulement ceux du septième étage par exemple)
- Difficulté: les cubes invisibles

Tartes

M. Boulanger a préparé 19 tartes. Il les place dans 2 boîtes blanches et 3 boîtes noires. Il doit y avoir le même nombre de tartes dans chacune des boîtes blanches et le même nombre de tartes dans chacune des voîtes noires. **Comment M. Boulanger peut-il répartir ses tartes dans les boîtes ?** Trouvez toutes les solutions et expliquez votre raisonnement.

Catégorie RMT : 3 (4ème édition, Finale)

Suivi IRPD : 3P (16 classes) et 4P (9 classes)

Contenus mathématiques :

- Répartition d'objets avec une contrainte
- Organisation d'une série d'essais successifs (recherche)
- Opérations dans N: addition notamment pour le choix et le contrôle des solutions possibles
- ET selon la procédure utilisée: multiplication, soustraction, dénombrement

Stratégies attendues :

Stratégie globale, indirecte

Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Décomposition additive du nombre total de tartes (19)	Dresser la liste des compostions additives permettant d'obtenir 19 : 1-18 2-17…..18-1
Chercher les combinaisons possibles parmi la liste (un multiple de deux et un multiple de trois)	Chercher les multiples de 2 et voir si l'autre membre du couple est un multiple de 3, à répéter pour tous les couples Chercher les multiples de 3 et voir si l'autre membre du couple est un multiple de 2, à répéter pour tous les couples

Stratégies par essais-erreurs (aussi en commençant par les boîtes noires), indirectes

Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Partir des 3 boîtes blanches et faire une tentative (organisée): essayer d'abord d'y mettre 1 tarte dans chacune	Schéma des trois boîtes avec à l'intérieur, la représentation graphique du nombre de tartes ou son nombre cardinal
Calculer la somme des tartes ainsi distribuées	Dénombrement des tartes dessinées Addition posée (en ligne ou en colonne) Multiplication (posée en ligne ou colonne)
Essayer de remplir les boîtes avec les tartes restantes	Dessiner les dernières boîtes et y distribuer alternativement des tartes restantes en les énumérant jusqu'à arriver à un total de 19
Noter la réussite ou l'échec de la tentative	
Recommencer avec 2 tartes, puis 3, …	

Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Partir des 3 boîtes blanches et faire une tentative (organisée) : essayer d'abord d'y mettre 1 tarte dans chacune	Schéma des trois boîtes avec représentation graphique du nombre de tartes dans chacune ou du nombre cardinal à l'intérieur Tableau à double entrée
Calculer la somme des tartes ainsi distribuées	Dénombrement des tartes dessinées Addition posée (en ligne ou en colonne) Multiplication (posée en ligne ou colonne)
Trouver le nombre de tartes restant à mettre dans les boîtes noires	Soustraction ou addition lacunaire posée
Essayer les répartir les tartes restantes dans les boîtes noires	Dessiner les dernières boîtes et y distribuer alternativement les tartes restantes Division du nombre de tartes restantes par le nombre de boîtes encore vides Représentation graphique ou cardinal du nombre de tartes à l'intérieur de chaque boîte
Noter la réussite ou l'échec de la tentative	
Recommencer avec 2 tartes, puis 3, …	

Prises en compte nécessaires :

- Nombre de boîtes blanches et nombre de boîtes noires
- Nombre de tartes à répartir
- Répartitions équivalentes par couleur de boîtes
- Trouver plusieurs solutions

Difficultés :

Lecture de l'énoncé, découverte de toutes les solutions (3, non donné dans la consigne), organisation structurée de la recherche.

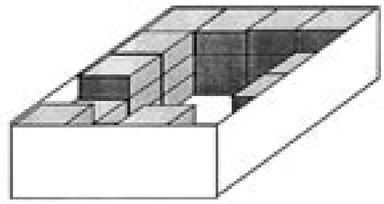
Commentaire :

Dans les épreuves de l'IRDP, on trouve plus de justifications de la solution trouvée (et dont les essais sont effacés) que des explicitations de la démarche utilisée pour parvenir à la solution (rarement plusieurs solutions présentées).

La boîte de sucre

Combien y a-t-il de morceaux dans cette boîte de sucre lorsqu'elle est pleine ?

Expliquez comment vous avez trouvé.



Catégorie RMT : 3,4 (5ème édition, Epreuve 1)

Suivi IRDP: 3P (16 classes) et 4P (9 classes)

Contenus mathématiques :

- Vision dans l'espace, perspective
- Volumes: comptage d'unité pavage (les sucres) / Formule L x l x h
- Opérations dans N (multiplication, éventuellement addition, soustraction)

Stratégies attendues :

Stratégie directe

Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Déterminer le nombre de sucres dans chaque dimension (L, l, H)	Comptage (pointage) Pavage ou dessin de quelques sucres manquants (utiles)
Déterminer le nombre total de sucres	Calculer par couches, ou rangs (pavages, addition répétée) Calcul direct selon la formule du volume

Procédures erronées susceptibles d'apparaître:

Procédures telles que définies par Vergnaud dans son expérimentation (RDM vol.4.1, 1983) :
- Procédures de type périmètre
- Procédures de type surface
- Procédure de type mixte

Prises en compte nécessaires:

- Nombre de sucres dans la largeur de la boîte
- Nombre de sucres dans la longueur de la boîte
- Nombre de sucres dans la hauteur de la boîte

Difficultés: les sucres "des coins"

A la ménagerie

A la ménagerie, cinq cages sont allignées les unes à côté des autres.

- La cage du singe n'est ni à côté de celle de l'ours, ni à côté de celle de la panthère
- Il y a deux cages entre celle du tigre et celle de l'ours
- La cage de la panthère est à droite de celle de l'ours; elles sont l'une à côté de l'autre

Dessinez les cinq cages et notez dans chacune d'elles le nom de l'animal qui l'occupe.

Expliquez comment vous avez fait pour trouver la réponse.

Catégorie RMT: 3, 4, 5 (3ème édition, épreuve 2). Epreuve bien réussie dès la 3P. Problème pris dans les pages jaunes comme exemple du paragraphe sur la lecture de la consigne et la gestion des informations dans le chapitre 5 "logique et raisonnement".

Suivi IRPD: 4P (24 classes)

Contenus mathématiques:

- Sériation et classement,
- Déduction logique
- Organisation spatiale.

Stratégies attendues:

Stratégie globale indirecte

Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Faire une lecture globale de l'énoncé pour se faire une représentation de la situation	Schéma des cages à remplir
Analyser le contenu des propositions et leur degré de contrainte	Schéma (ou en mots) des contraintes, de leur "mise dans l'espace" et des possibilités que chacune offre en elle-même: 1) s x o s x p 2) T _ _ O O _ _ T 3) P O 4) L S S L
Choisir les propositions les plus contraignantes pour commencer	Sans compter les hypothèses possibles découlant de chaque proposition, il faut percevoir que la deuxième et la troisième proposition (4 possibilités chacune) sont plus contraignantes que les deux autres 12 et 8 possibilités)
Emettre des hypothèses par rapport à l'énoncé général	2) T _ _ O _ _T _ _ O O _ _ T _ _ O _ _ T
Tester les hypothèses au moyen des autres propositions pour éliminer les non-pertinentes et avancer dans la déduction	Avec 3), cela ne laisse que trois hypothèses T _ P O _ _T _ P O P O _ _ T 4) élimine deux des trois possibilités (T _ P O _ et _T _ P O) et permet d'entrevoir deux possibilités plus précises: P O S L T ou P O L S T. 1) sert à déterminer l'ordre entre L et S et à trouver la solution.

Stratégie pas-à-pas indirecte

Procédure	Moyens pouvant être utilisés
Faire une lecture globale de l'énoncé pour se faire une représentation de la situation	Schéma des cages à remplir
Fixer arbitrairement l'animal occupant la première cage (ou une autre)	
Tester chaque proposition par rapport à l'hypothèse émise	
En déduire la place d'autres animaux	
Jusqu'à aboutir à une contradiction (ou à la solution)	
Recommencer avec un autre animal dans la première cage, jusqu'à parvenir à une solution	

Prises en compte nécessaires:

Chacune des conditions:

- cage singe pas située à côté de celle de l'ours
- cage singe pas située à côté de celle de la panthère
- deux cages entre celle du tigre et de l'ours
- panthère et tigre l'un à côté de l'autre
- cage de la panthère à droite de celle de l'ours, pour le visiteur.
- cage du lion à côté de celle du singe

Commentaires :

Les élèves ne donnent en général pas de commentaires supplémentaires au dessin des cages, qui sert à la fois de réponse et d'instrument de vérification.