05.3
SEPTEMBRE 2005

Évaluation des compétences en mathématiques en fin de 4e année primaire

Résultats de la seconde phase de l'enquête Mathéval

Ouvrage coordonné par Jean-Philippe Antonietti

AUTEURS
Jean-Philippe Antonietti (IRDP)
Ninon Guignard (SRED)
Antoine Mudry (SFT)
Ladislas Ntamakiliro (URSP)
Werner Riesen (SREP)
Chantal Tièche Christinat (IRDP)
Anne-Chantal Van der Klink (IRDP)

irdp
Institut de recherche et de documentation pédagogique

Fiche bibliographique :

ANTONIETTI, Jean-Philippe (éd.). – Évaluation des compétences en mathématiques en fin de 4^{e} année primaire : Résultats de la seconde phase de l'enquête MATHÉVAL / coord. par Jean-Philippe Antonietti ; avec la collab. de Ninon Guignard... [et al.] – Neuchâtel : Institut de recherche et de documentation pédagogique (IRDP), 2005. - X, 223 p. ; 30 cm. – (05.3). – Bibliogr. pp. 219-223
CHF 24.80

Mots-clés : *Évaluation, Enquête, Compétence, Élève, Mathématiques, Enseignement primaire, Suisse romande*

Cette publication est également disponible sur le site de l'IRDP :
<http ://www.irdp.ch/>

Composition en LaTeX : Jean-Philippe Antonietti
Photo de couverture : Maurice Bettex

Remerciements

Nous tenons à remercier :

– les enseignantes et les enseignants qui ont aimablement participé à notre recherche, ainsi que leurs élèves qui se sont vus confrontés parfois à des situations mathématiques ardues ;
– les correspondantes et correspondants cantonaux qui ont très consciencieusement assumé le rôle d'intermédiaires entre nous-mêmes, membres du groupe scientifique du consortium Mathéval, et les classes désignées pour participer à notre recherche ;
– Anne-Marie Broi, Ninon Guignard, Françoise Hirsig, Anne-Lise Longchamp, Christine Meneghelli, Michel Brêchet, Jean-Paul Dumas, Christophe Dussex, Claude-Alain Kleiner, Olivier Menge, Ladislas Ntamakiliro et Richard Schubauer qui ont accepté de participer en tant qu'experts à l'établissement d'un seuil minimal de compétences mathématiques ;
– Clémence Barnaud, Inès Buergi, Gaëlle Christinat, Vanessa Dall'Acqua, Pauline Hausman, Nadine Honegger, Diane Matthys, Deborah Ummel, Pierre Burdet et Damien Huber qui ont minutieusement dépouillé les copies des élèves et saisi les données ;
– Magali Delémont pour qui la classification internationale type des professions de l'Organisation internationale du Travail n'a maintenant plus aucun secret ;
– Claudine Gaetzi qui illustra avec humour et délicatesse nos problèmes de mathématiques ;
– Doris Penot pour sa relecture attentive de notre manuscrit ;
– tous les membres de la *R Core Team* qui développèrent le logiciel libre R avec lequel nous avons mené toutes nos analyses statistiques et construit tous les graphiques de ce document.

Résumé

De nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques ont été introduits en Suisse romande en 1997. Quelles sont les répercussions de cette introduction sur la manière d'enseigner et sur l'apprentissage des élèves ? Pour répondre à cette question, nous avons, il y a deux ans, évalué les compétences mathématiques des élèves de deuxième année primaire ayant bénéficié de ces nouveaux moyens d'enseignement. Nous avons poursuivi nos investigations et présentons dans cet ouvrage les résultats de l'évaluation des compétences mathématiques des élèves de quatrième année.

En deux ans, les élèves ont manifestement progressé. Face à une situation problème, la plupart des élèves entrent en matière, beaucoup adoptent des démarches évoluées et diversifiées. Néanmoins, trop d'élèves commettent des erreurs, ce qui compromet souvent la résolution complète de la situation. L'analyse des résultats et des démarches des élèves permet de constater que plusieurs objectifs du plan d'études ne sont pas atteints, notamment en ce qui concerne la numération, l'addition et certaines notions du champ multiplicatif.

Les enseignants, quant à eux, apprécient ces nouveaux moyens et relèvent quasiment tous le plaisir qu'ont les élèves à faire des mathématiques. Les efforts qu'ils ont consentis pour adapter leur pédagogie portent leurs fruits ; ils proposent de nombreuses situations ouvertes et complexes et savent les gérer de manière adéquate. Toutefois ils semblent ne pas accorder suffisamment d'importance à l'institutionnalisation des savoirs ; il faudrait idéalement que les élèves conçoivent les mathématiques comme une référence culturelle et scientifique, et non pas uniquement comme un chapelet d'énigmes et de casse-tête.

Zusammenfassung

In der Westschweiz sind im Jahr 1997 neue Lehrmittel für den Mathematikunterricht eingeführt worden. Welche Auswirkungen hat diese Einführung auf den Unterricht sowie auf den Lernprozess der SchülerInnen gehabt ? Um diese Frage zu beantworten, haben wir vor zwei jahren die Mathematikkompetenz von Schülerinnen und Schülern der zweiten Primarklasse, die mit Hilfe des neuen Lehrmittels unterrichtet worden waren, evaluiert. Wir haben unsere Forschungsarbeit fortgeführt und präsentieren in diesem Band die Resultate der Evaluation der Mathematikkompetenzen der SchülerInnen der vierten Primarklasse.

Der Fortschritt nach zwei Schuljahren ist offensichtlich. Wenn sie mit einer Problemsituation konfrontiert werden, dann lassen sich die meisten SchülerInnen darauf ein, wobei sich bei vielen ein elaboriertes und vielfältiges Vorgehen erkennen lässt. Dennoch machen zu viele SchülerInnen Fehler, was eine vollständige Lösung der Problemsituation oft verunmöglicht. Die Analyse der Resultate und des Vorgehens der SchülerInnen erlaubt es aufzuzeigen, dass

mehrere Ziele des Lehrplans nicht erreicht worden sind, besonders, was die Beherrschung des Zahlenraums, die Addition und verschiedene Begriffe der Multiplikation betrifft.
Die Unterrichtenden schätzen die neuen Lehrmittel und stellen fast durchwegs fest, dass die Schülerinnen und Schüler Freude an der Mathematik haben. Die Anstrengungen, die sie für die Anpassung ihres Unterrichts aufgewendet haben, tragen ihre Früchte. Sie verwenden zahlreiche offene und komplexe Problemsituationen und wissen, wie man sie adäquat umsetzt. Allerdings scheinen sie der Institutionalisierung des Wissens nicht genügend Gewicht beizumessen ; im Idealfall sollten die SchülerInnen die Mathematik als einen kulturellen und wissenschaftlichen Bezugspunkt auffassen und nicht bloss als eine Reihe von Rätseln und Denksportaufgaben.

Riassunto

Dei nuovi metodi d'insegnamento della matematica sono stati introdotti nel 1997 in Svizzera francese. Quali sono le ripercussioni di questa introduzione sulla maniera d'insegnare e sull'apprendimento degli allievi ? Per rispondere a questo quesito abbiamo valutato, due anni or sono, le competenze matematiche degli allievi del secondo anno di scuola elementare che hanno potuto beneficiare di questi nuovi metodi d'insegnamento. Proseguendo nelle nostre indagini presentiamo in questa opera i risultati della valutazione delle competenze matematiche degli allievi del quarto anno.
In due anni gli allievi hanno progredito in modo evidente. Di fronte ad una situazione che presenta un problema, la maggior parte degli allievi entra in materia e molti adottano dei procedimenti evoluti e diversificati. Tuttavia ancora troppi sono gli allievi che commettono degli errori, ciò che sovente compromette la soluzione completa della situazione. L'analisi dei risultati e dei metodi d'approccio degli allievi permettono di constatare che diversi obiettivi del piano di studi non sono raggiunti, in particolare per quanto concerne le numerazione, l'addizione e alcune nozioni nel campo della moltiplicazione.
Gli insegnanti, dal canto loro, apprezzano questi nuovi metodi e quasi tutti constatano il piacere che mostrano gli allievi nelle attività matematiche. Gli sforzi che hanno intrapreso per adattare il loro approccio pedagogico danno i loro frutti ; propongono numerose situazioni aperte e complesse che sanno gestire in maniera adeguata. Tuttavia sembra non accordino sufficiente importanza all'istituzionalizzazione del sapere ; idealmente gli allievi dovrebbero concepire la matematica come una referenza culturale e scientifica e non unicamente come una filza di enigmi e di rompicapo.

Sommaire

Introduction

En 1997, de nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques sont introduits dans les classes de Suisse romande. Ces nouveaux moyens n'apportent pas sur le plan des contenus mathématiques de grandes modifications. Les notions d'ensembles et de relations ne sont plus enseignées en tant que telles, l'apprentissage de la numération se fait sans recourir à d'autres bases que celle de dix, les rudiments de la topologie ne sont plus abordés directement. Mais à part la suppression de ces quelques objets épineux (Conne, 1986 ; Perret, 1985), l'accent est toujours mis sur le nombre et la numération, les opérations et leurs propriétés, l'espace et la géométrie ainsi que sur la mesure et le mesurage.
L'innovation est d'ordre didactique. Les contenus à enseigner sont les mêmes, en revanche la manière d'enseigner qui est proposée est fondamentalement différente. Selon cette nouvelle conception, très inspirée par la didactique des mathématiques française (Brousseau, 1998), l'enseignant[1] a comme tâche de proposer à l'élève des situations dans lesquelles le savoir à enseigner puisse émerger :

> Le travail du professeur est dans une certaine mesure inverse du travail du chercheur, il doit produire une *recontextualisation* et une *repersonnalisation* des connaissances. Elles vont devenir la connaissance d'un élève, c'est-à-dire une réponse assez naturelle, à des conditions relativement particulières, conditions indispensables pour qu'elles aient un sens pour lui. Chaque connaissance doit naître de l'adaptation à une situation spécifique, car on ne crée pas les probabilités dans le même genre de contexte et de rapports avec le milieu que ceux dans lesquels on invente ou utilise l'arithmétique ou l'algèbre.
> Le professeur doit donc simuler dans sa classe une micro-société scientifique s'il veut que les connaissances soient des moyens économiques pour poser de bonnes questions et pour trancher des débats, s'il veut que les langages soient des moyens de maîtriser des situations de formulation et que les démonstrations soient des preuves.
> Mais il doit aussi donner les moyens à ses élèves de retrouver dans cette histoire particulière qu'il leur a fait vivre, ce qu'est le *savoir* culturel et communicable qu'on a voulu leur enseigner. Les élèves doivent à leur tour *redécontextualiser* et *redépersonnaliser* leur savoir et ceci de façon à

[1]Dans ce texte, les génériques masculins ont souvent été utilisés, sans aucune discrimination et uniquement pour alléger le texte.

> identifier leur production avec le savoir qui a cours dans la communauté scientifique et culturelle de leur époque.
> Bien sûr, il s'agit d'une simulation, qui n'est pas la « vraie » activité scientifique, de même que le savoir présenté de façon axiomatique n'est pas le « vrai » savoir. (Brousseau, 1998, pp. 49-50).

L'enseignant a donc la responsabilité de créer dans sa classe les conditions qui permettent à ses élèves de vivre à leur échelle les tribulations d'une société mathématicienne. L'approche proposée est donc résolument socio-constructiviste. Les élèves vont être les bâtisseurs de leurs connaissances qu'ils acquerront en interagissant avec leur milieu ainsi qu'en se confrontant à leurs pairs.
Depuis le début de l'introduction généralisée des nouveaux moyens en Suisse romande, l'IRDP suit cette innovation, en mettant en place une recherche comprenant deux volets distincts. Le premier volet, qui est en voie d'achèvement, a pour objet d'observer dans une perspective didactique, les réactions qu'une telle innovation provoque dans la classe et l'établissement (Tièche Christinat & Delémont, 2005 ; Delémont & Tièche Christinat, 2003 ; Mottier Lopez & Tièche Christinat, 2001 ; Tièche Christinat, 2000 ; Tièche Christinat & Knupfer, 1999).
Le deuxième volet, réalisé par un consortium romand, vise à cerner les compétences et connaissances en mathématiques mobilisables par les élèves de 2^e^ et 4^e^ primaire ayant bénéficié des nouveaux moyens. Le présent travail est un compte rendu de l'évaluation des compétences des élèves de 4^e^ primaire. L'évaluation des élèves de 2^e^ primaire a déjà fait l'objet d'une publication (Antonietti, 2003b).
Mais qu'entendons-nous au juste par *compétence* ? Nous nous référerons spécifiquement à Jonnaert :

> À travers une compétence, un sujet mobilise, sélectionne et coordonne une série de ressources (dont certaines de ses connaissances, mais aussi une série d'autres ressources qui seraient affectives, sociales et celles reliées à la situation et à ses contraintes) pour traiter efficacement une situation. Une compétence suppose, au-delà du traitement efficace, que ce même sujet pose un regard critique sur les résultats de ce traitement qui doit être socialement acceptable. (Jonnaert, 2002, p. 41).

Globalement, nous retiendrons que la compétence est un savoir-agir fondé sur la mobilisation et l'utilisation d'un ensemble de ressources[2]. Par cette idée de « savoir-agir », la compétence devient ainsi indissociable des *contextes* dans lesquels elle se manifeste et des *situations* qu'elle permet de traiter. Dans notre étude, nous accorderons donc une grande importance à la description des problèmes et à la manière dont les élèves les résolvent afin de pouvoir évaluer de façon satisfaisante leurs compétences (chapitre 3).

[2] Cette formulation est très proche de celle que l'on trouve dans le programme d'études du Québec (MEQ, 2001).

Dans le chapitre 4, nous définirons un seuil minimal de compétences en mathématiques et regarderons s'il est atteint par les élèves. Cette démarche est une des particularités de Mathéval 4P. Il y a deux ans, nous n'avions pas procédé ainsi et il nous fût difficile de savoir si les objectifs définis dans le plan d'études étaient atteints ou non.
Nous compléterons la description des compétences des élèves de 4P par deux brèves comparaisons (chapitre 5) : l'une avec les compétences des élèves de 2P ayant aussi appris les mathématiques avec les nouveaux moyens, et l'autre avec les compétences des élèves ayant bénéficié des anciens moyens. La première comparaison nous permettra d'apprécier les progrès que font les élèves en deux ans de scolarité. La seconde nous permettra, par contraste, de mettre en évidence les qualités et les défauts des nouveaux moyens.
Nous présenterons dans le chapitre 6 ce que pensent les enseignants des nouveaux moyens et la manière dont ils les utilisent.
Dans le dernier chapitre, nous examinerons dans quelle mesure les compétences en mathématiques des élèves sont influencées par certaines caractéristiques qui leur sont propres – comme leur âge, leur sexe, leur nationalité, leur langue maternelle ou leur niveau socio-économique – ou par d'autres facteurs comme les pratiques enseignantes ou la structure de la classe dans laquelle ils se trouvent.

Première partie

Méthode

Dans cette première partie nous allons décrire les élèves, les enseignantes et les enseignants que nous avons interrogés lors de notre enquête (chapitre 1). Ensuite nous présenterons les instruments que nous avons élaborés et utilisés pour mener nos investigations à bien, puis nous décrirons aussi sommairement les conditions dans lesquelles se déroula l'épreuve de mathématiques (chapitre 2).

Chapitre 1

Échantillon

Les sept cantons romands – Berne, Fribourg, Genève, Jura, Neuchâtel, Valais et Vaud – ont participé à notre enquête. Pour assurer une certaine fiabilité aux résultats de notre étude, nous avons interrogé vingt classes de quatrième année primaire par canton, soit un total de 140 classes sur l'ensemble de la Suisse romande.
Ce plan expérimental est similaire à celui que nous avions utilisé en 2002 pour évaluer les compétences en mathématiques des élèves de deuxième année primaire. Un tel plan permet de bien recouvrir la Suisse romande et offre aussi la possibilité de comparer les cantons entre eux.

1.1 Échantillonnage

L'échantillon que nous avons constitué est un échantillon stratifié en grappes dans lequel chaque canton est une strate et chaque classe est une grappe. Au sein de chaque strate, les grappes sont choisies selon un tirage systématique. Les informations auxiliaires utilisées pour ce tirage sont, d'une part, le type de classe (*i.e.* classe à degré unique, à deux degrés ou à degrés multiples) et, d'autre part, la taille de l'agglomération dans laquelle se trouve la classe. Pour chaque canton, la probabilité d'inclusion d'une classe dans l'échantillon est proportionnelle à l'inverse du nombre de classes de 4P dans ce canton (tableau 1.1). Tous les élèves de quatrième des classes désignées font partie de l'échantillon[1].
Les 140 classes tirées au sort ont été sollicitées pour participer à l'enquête Mathéval 4P. Toutes les classes contactées acceptèrent de collaborer. La passation des épreuves se fit durant le mois de mai 2004.

[1]Rappelons qu'un sondage en grappes est un cas particulier du sondage à plusieurs degrés : « Ayant tiré un certain nombre d'unités à l'avant dernier degré de tirage, on réalise l'enquête au dernier degré de tirage auprès de TOUS les individus inclus dans ces unités. On dit que l'on réalise une enquête exhaustive dans les unités de l'avant dernier degré de tirage » (Ardilly, 1994, p. 113).

Tableau 1.1 – *Nombre de classes de 4P dans les divers cantons de Romandie.*

	Canton						
	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD
Nombre de classes de 4P	59	143	297	75	135	142	428

Dans les paragraphes suivants, nous allons caractériser les élèves ayant participé à l'enquête (§ 1.2) ainsi que leurs enseignantes et enseignants (§ 1.3).

1.2 Les élèves

Le nombre total d'élèves interrogés est de 2252. Les effectifs par canton sont reportés dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2 – *Nombre d'élèves interrogés par canton.*

	Canton							
	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD	Total
Effectif	347	339	311	232	334	351	338	2252

1.2.1 Âge

La distribution des âges des élèves interrogés est représentée dans la figure 1.1. Leur âge moyen vaut 125.8 mois soit à peu près 10 ans et demi (l'écart-type vaut $s = 6.4$ mois).
L'âge moyen des élèves que nous avons interrogés diffèrent d'un canton à l'autre ($F = 80.5$, $ddl_1 = 6$, $ddl_2 = 2245$, $p < 0.05$)[2] (tableau 1.3). Ces différences peuvent être imputées au fait que les règles définissant l'âge d'admission à l'école primaire ne sont pas les mêmes dans les différents cantons suisses romands[3]. Plus le jour déterminant pour l'entrée à l'école primaire est avancé dans l'année, plus la cohorte des élèves est jeune. À un écart d'un mois entre deux dates d'admission correspond *grosso modo* un écart d'un mois entre l'âge moyen des cohortes (figure 1.2).

[2]Dans ce rapport, chaque fois que nous effectuerons un test statistique, nous indiquerons entre parenthèses la valeur empirique de la variable de décision utilisée, les degrés de liberté (*ddl*) et le résultat de la comparaison entre la probabilité critique (p) et le seuil de signification (α) que nous avons systématiquement fixé à 5%.

[3]Centre d'information et de documentation IDES. *Données de base sur le système éducatif en Suisse et dans la Principauté du Liechtenstein*, modifié le 22 août 2003 [consulté le 15 février 2005]. <http ://edkfmpro.unibe.ch/ides/mainUmfragen_f.html>

Figure 1.1 – *Histogramme des âges des élèves interrogés.*

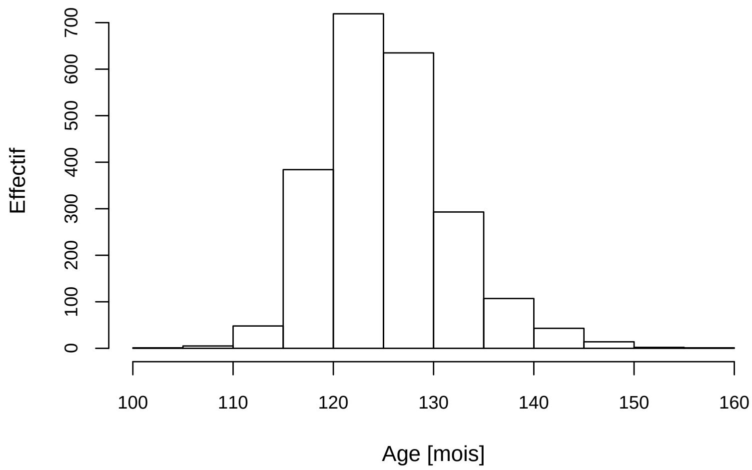


Tableau 1.3 – *Moyenne et écart-type des âges des élèves interrogés exprimés en mois selon les cantons.*

	Canton						
	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD
Moyenne	128.7	128.6	121.5	128.1	124.8	122.7	126.6
Écart-type	5.9	5.8	5.6	5.8	6.2	5.3	5.9

1.2.2 Sexe

Parmi les élèves interrogés 1117 sont des filles et 1135 des garçons. La proportion des filles et des garçons est *grosso modo* la même dans tous les cantons ($\chi^2 = 2.81$, $ddl = 6$, $p > 0.05$)[4] (tableau 1.4).

1.2.3 Nationalité

Parmi les élèves interrogés, 1998 sont nés en Suisse. Parmi ces élèves, 1575 ont l'un de leurs parents au moins qui est né en Suisse et 423 ont leurs deux parents nés à l'étranger. Parmi les 254 élèves nés à l'étranger, 76 ont l'un de leurs parents au moins qui est né en Suisse et 178 ont leurs deux parents nés à l'étranger.

[4]Nous avons effectué ce test en tenant compte de la structure de l'échantillon – échantillon stratifié en grappes. À l'avenir, nous procéderons toujours ainsi, sauf mention contraire. Notons néanmoins que si nous avions ici traité à tort notre échantillon comme un échantillon obtenu par tirage aléatoire simple sans remise le résultat du test aurait été quasiment le même.

Figure 1.2 – *Âge moyen des cohortes cantonales selon le jour déterminant pour l'entrée à l'école primaire avec un intervalle de confiance à 95%.*

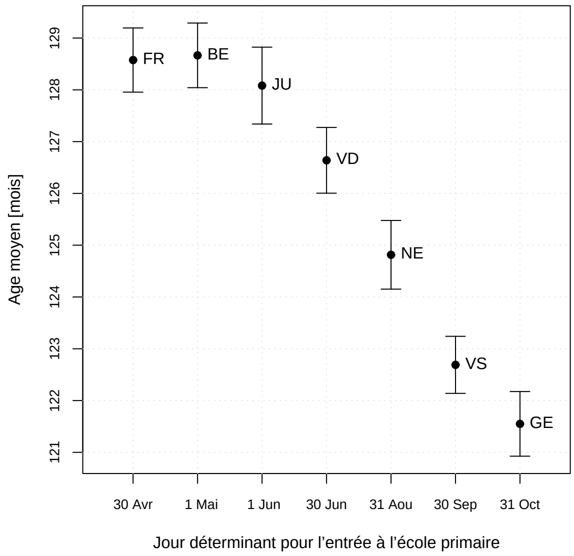


Tableau 1.4 – *Nombre de filles et de garçons interrogés par canton. Les proportions exprimées en pourcent sont indiquées entre parenthèses.*

	Canton							
	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD	Total
Filles	173	173	148	115	177	165	166	1117
	(50)	(51)	(48)	(50)	(53)	(47)	(49)	(50)
Garçons	174	166	163	117	157	186	172	1135
	(50)	(49)	(52)	(50)	(47)	(53)	(51)	(50)

La répartition des élèves selon leur nationalité et leur origine n'est pas la même dans tous les cantons ($\chi^2 = 69.68$, $ddl = 18$, $p < 0.05$) (tableau 1.5).
Les cantons de Berne, de Fribourg, de Neuchâtel et du Valais ont une composition très similaire à celle de l'échantillon romand complet. Par contre les cantons du Jura, de Genève et de Vaud s'en distinguent. Mais, alors que le Jura a une plus forte proportion d'élèves suisses, les cantons de Genève et Vaud en ont une beaucoup plus faible.

1.2.4 Langue maternelle et bilinguisme

Parmi les élèves interrogés, 1830 sont francophones – ils affirment que la langue qu'ils parlent le plus souvent à la maison est le français –, les 422 autres sont allophones. La proportion d'élèves francophones n'est pas la même dans tous

Tableau 1.5 – *Nationalité et origine des élèves interrogés selon les cantons. Les proportions exprimées en pourcent sont indiquées entre parenthèses. Nous considérons qu'un élève né en Suisse est de nationalité suisse et que si l'un de ses parents au moins est né en Suisse, il est d'origine suisse.*

		Canton							
Nationalité	Origine	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD	Total
Suisse	Suisse	263	248	179	196	237	253	199	1575
		(76)	(73)	(58)	(84)	(71)	(72)	(59)	(70)
Suisse	Autre	48	52	85	22	59	68	89	423
		(14)	(15)	(27)	(9)	(18)	(19)	(26)	(19)
Autre	Suisse	9	11	12	4	17	9	14	76
		(3)	(3)	(4)	(2)	(5)	(3)	(4)	(3)
Autre	Autre	27	28	35	10	21	21	36	178
		(8)	(8)	(11)	(4)	(6)	(6)	(11)	(8)

les cantons ($\chi^2 = 48.30$, $ddl = 6$, $p < 0.05$). Cette proportion est la plus grande dans le canton du Jura et la plus faible dans les cantons de Genève et Vaud (tableau 1.6). La proportion d'élèves francophones dans un canton est corrélée positivement à la proportion d'élèves de nationalité suisse ($r = 0.923$, $t = 5.35$, $ddl = 5$, $p < 0.05$) (figure 1.3).

Tableau 1.6 – *Nombre d'élèves francophones et allophones dans l'échantillon selon les cantons. Les proportions exprimées en pourcent sont indiquées entre parenthèses.*

	Canton							
	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD	Total
Francophone	285	282	229	214	286	290	244	1830
	(82)	(83)	(74)	(92)	(86)	(83)	(72)	(81)
Allophone	62	57	82	18	48	61	94	422
	(18)	(17)	(26)	(8)	(14)	(17)	(28)	(19)

Parmi les élèves interrogés, 915 se déclarent bilingues – ils parlent plus d'une langue à la maison. La proportion d'élèves bilingues est la plus forte dans les cantons de Berne, de Genève et de Vaud. Cette proportion est la plus faible dans le canton du Jura. Ces différences de proportion sont statistiquement significatives ($\chi^2 = 49.43$, $ddl = 6$, $p < 0.05$) (tableau 1.7).

La plupart des élèves monolingues sont francophones (96%) et la majorité des élèves bilingues parlent le plus souvent le français à la maison (60%). Quand les élèves parlent plusieurs langues à la maison, le français est presque toujours l'une d'entre elles (96%).

FIGURE 1.3 – *Proportion d'élèves francophones en fonction de la proportion d'élèves de nationalité suisse. La droite représentée est la droite des moindres carrés.*

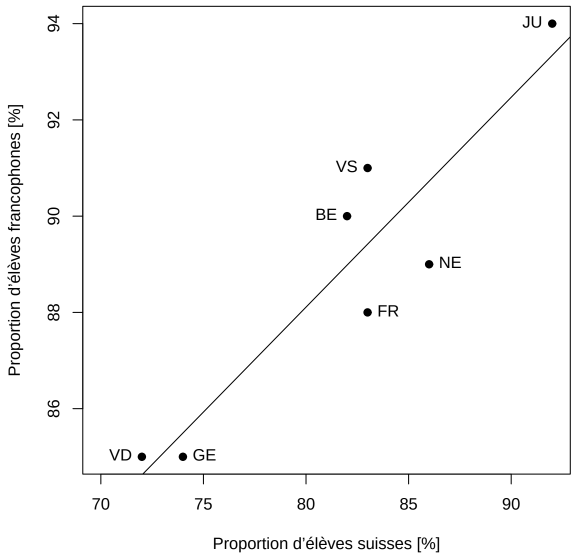


TABLEAU 1.7 – *Nombre d'élèves parlant plus d'une langue à la maison selon les cantons. Les proportions exprimées en pourcent sont indiquées entre parenthèses.*

	Canton							
	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD	Total
Monolingue	161	222	158	191	197	220	188	1337
	(46)	(65)	(51)	(82)	(59)	(63)	(56)	(59)
Bilingue	186	117	153	41	137	131	150	915
	(54)	(35)	(49)	(18)	(41)	(37)	(44)	(41)

1.2.5 Niveau socio-économique

Il nous est paru indispensable de pouvoir aussi disposer d'informations concernant le milieu familial des élèves. C'est pour cette raison que nous avons demandé à chaque élève de nommer et de décrire la profession de ses parents. Grâce à une méthode développée par Ganzeboom et al. (1992), il est possible de convertir les descriptions faites par les élèves en un indice socio-économique reflétant le statut professionnel des parents.

Cet indice regroupe les attributs des professions qui permettent de transformer en revenu le niveau d'éducation des parents en neutralisant l'effet de l'âge. Il est calculé sur la base d'une hiérarchisation optimale des groupes de profes-

sions qui maximise l'effet indirect du niveau de formation sur les revenus par l'intermédiaire de la profession. Les valeurs de l'indice sont comprises entre 0 et 90 : plus les valeurs sont élevées, plus elles dénotent un statut professionnel élevé des parents d'un élève. L'indice socio-économique que nous utiliserons est basé sur la profession du parent ayant le statut le plus haut.
L'attribution d'un indice socio-économique (SEI) à la description d'une profession se fait en deux temps. Dans un premier temps, on caractérise la profession en utilisant la classification internationale type des professions de l'Organisation internationale du Travail (ISCO)[5]. Puis, dans un deuxième temps, on convertit le code ISCO en un indice socio-économique (SEI) en recourant à la liste fournie par Ganzeboom et al. (1992)[6].
Afin d'illustrer cette démarche, nous présentons quelques exemples dans le tableau 1.8.

TABLEAU 1.8 – *Descriptions de professions faites par des élèves, code ISCO et valeur de l'indice socio-économique (SEI) associés. Les exemples sont ordonnés selon l'indice socio-économique.*

Profession	Description	ISCO	SEI
Nettoyeuse	Elle nettoie des objets et des tables, le sol, les chaises et les toilettes	9132	16
Maçon	Il travaille dans le ciment	7122	29
Esthéticienne	Elle rend les gens beaux	5141	29
Animatrice	Elle anime les enfants	3330	38
Policier	Il dirige la circulation et arrête les voleurs	5162	50
Diététicienne	Si quelqu'un se trouve gros, elle peut l'aider à devenir moins gros	3223	51
Secrétaire	Elle fait des factures, elle fait des téléphones et plein d'autres choses	4115	53
Banquier	Il garde l'argent dans de grands coffres	2411	69
Enseignant	Il fait quelques leçons aux élèves et il fait plein de séances	2320	69
Psychologue	Il soigne des gens qui sont malades de la tête	2445	71
Statisticien	Il compte	2122	71
Chimiste	Il fait des cigarettes moins chimiques	2113	74

En Suisse romande, la moyenne de l'indice socio-économique vaut 49 et son écart-type 16, comme dans les pays de l'OCDE (OCDE, 2001). Le premier

[5] Organisation internationale du Travail. *Résolution concernant la révision de la Classification internationale type des professions (CITP-88) adoptée par la quatorzième Conférence internationale des statisticiens du travail (octobre-novembre 1987)*, modifié le 4 octobre 2004. <http ://www.ilo.org/public/french/bureau/stat/res/>

[6] Cette liste est aussi disponible à l'adresse suivante : International stratification and mobility file. *Tools for standardizing occupation codes*, modifié le 30 janvier 2005. <http ://home.fsw.vu.nl/~ganzeboom/ismf/index.htm>

quartile Q_1 vaut 36, le deuxième Q_2 vaut 50 et le troisième Q_3 vaut 60. Les trois quartiles Q_1, Q_2 et Q_3 permettent de définir quatre niveaux socio-économiques. Le premier niveau, que nous nommerons *niveau socio-économique inférieur* NSE1, réunit les élèves dont l'indice socio-économique est inférieur à Q_1. Les secteurs caractéristiques de ce niveau sont les petites exploitations agricoles, la métallurgie, la mécanique, les taxis, le transport routier et la restauration. Le deuxième niveau, que nous nommerons *niveau socio-économique moyen inférieur* NSE2, réunit les élèves dont l'indice est compris entre Q_1 et Q_2. Les professions les plus couramment associées à ce niveau sont la vente, la gestion de petites entreprises et certaines professions du secteur de la santé. Le troisième niveau, le *niveau moyen supérieur* NSE3 réunit, quant à lui, les élèves ayant un indice compris entre Q_2 et Q_3. Parmi les professions correspondant à ce niveau, citons l'enseignement, l'ingénierie et la comptabilité des entreprises. Enfin, le quatrième niveau, le *niveau socio-économique supérieur* NSE4, réunit les élèves ayant un indice supérieur à Q_3. Ce niveau rassemble des professions telles que la médecine, l'enseignement universitaire ou le droit.

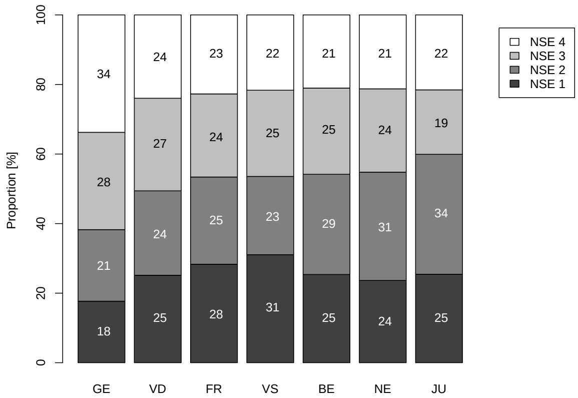
Déterminons, pour chaque canton, la proportion d'élèves situés à chacun des quatre niveaux socio-économiques (tableau 1.9 et figure 1.4).

TABLEAU 1.9 – *Distributions des élèves selon leur niveau socio-économique. Les proportions exprimées en pourcent sont indiquées entre parenthèses.*

	Canton							
	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD	Total
NSE1	88	96	55	59	79	109	85	571
	(25)	(28)	(18)	(25)	(24)	(31)	(25)	(25)
NSE2	100	85	64	80	104	79	82	594
	(29)	(25)	(21)	(34)	(31)	(23)	(24)	(26)
NSE3	86	81	87	43	80	87	90	554
	(25)	(24)	(28)	(19)	(24)	(25)	(27)	(25)
NSE4	73	77	105	50	71	76	81	533
	(21)	(23)	(34)	(22)	(21)	(22)	(24)	(24)

Le canton ayant le plus d'élèves de niveau socio-économique moyen supérieur ou supérieur est le canton de Genève, celui en ayant le moins est le canton du Jura. Ceci est probablement dû au fait que Genève est un canton typiquement urbain, alors que le canton du Jura est un canton typiquement rural. Les autres cantons occupent une position intermédiaire : ils sont moins urbains que Genève et moins ruraux que le Jura. Ces différences sont statistiquement significatives ($\chi^2 = 52.03$, $ddl = 18$, $p < 0.05$).

FIGURE 1.4 – *Comparaison de la répartition des élèves selon leur niveau socio-économique. Les cantons sont ordonnés selon la proportion d'élèves ayant un indice inférieur à l'indice romand médian ($Q_2 = 50$).*



1.2.6 Redoublement

Sur l'ensemble des élèves que nous avons interrogé, 11% ont redoublé une année. Les cantons romands ne recourent pas tous au redoublement de la même manière ($\chi^2 = 17.43$, $ddl = 6$, $p < 0.05$). Deux cantons se distinguent particulièrement, ce sont les cantons de Berne et de Vaud. Dans ces cantons environ un élève sur 6 est, en 4^e année, un redoublant. Dans les autres cantons, cette proportion est d'un élève sur 10 (tableau 1.10).

TABLEAU 1.10 – *Nombre d'élèves ayant redoublé selon les cantons. Les proportions exprimées en pourcent sont indiquées entre parenthèses.*

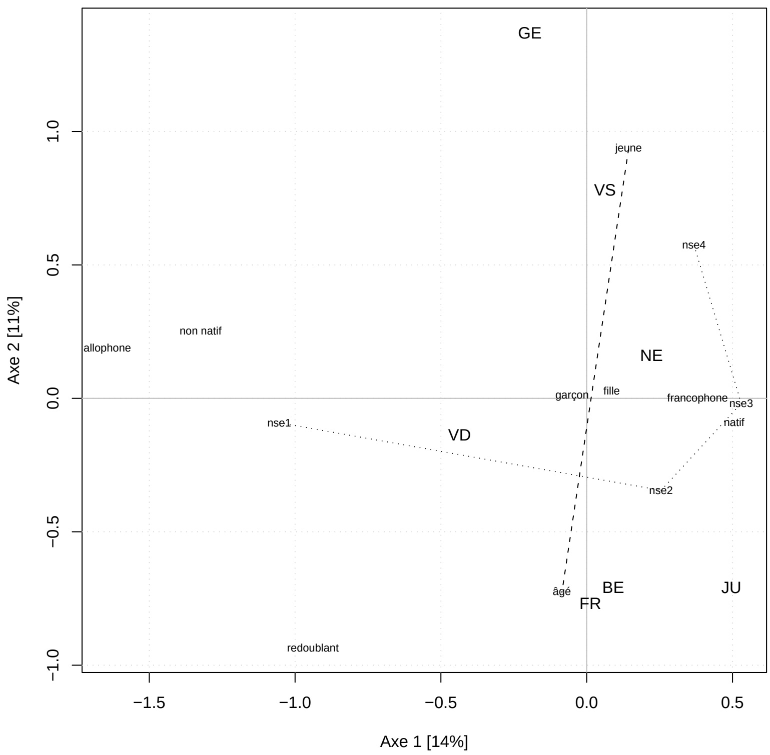
	Canton							
	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD	Total
Aucun redoublement	300	305	279	211	301	321	285	2002
	(86)	(90)	(90)	(91)	(90)	(91)	(84)	(89)
Redoublement	47	34	32	21	33	30	53	250
	(14)	(10)	(10)	(9)	(10)	(9)	(16)	(11)

1.2.7 Représentation synthétique

Afin de fournir une description générale de la structure des échantillons cantonaux, nous allons effectuer une analyse factorielle des correspondances multiples de l'ensemble des variables socio-démographiques qui caractérisent les élèves (Escofier & Pagès, 1998 ; Lebart, Morineau & Piron, 1997). Une telle

analyse vise à rassembler en un ou plusieurs graphiques la plus grande partie de l'information contenue dans les tableaux de contingence analysés.
Nous nous limiterons à un seul graphique (figure 1.5). Le premier axe contient 14% de l'inertie totale, le second en contient 11%. L'origine est placée au centre de gravité du nuage de points, elle correspond à la situation d'indépendance. On y trouve les deux modalités de la variable *Sexe*.
Le premier axe factoriel oppose les élèves natifs aux élèves non natifs, les élèves francophones aux élèves allophones. Les modalités *natif* et *francophone* s'attirent, comme à l'opposé les modalités *non-natif* et *allophone*.
Le deuxième axe, quant à lui, oppose les élèves les plus jeunes aux élèves les plus âgés.

FIGURE 1.5 – *Représentation des variables socio-démographiques caractérisant les élèves sur le premier plan factoriel.*



Dans le plan défini par les deux premiers axes factoriels, les modalités de la variable *Niveau socio-économique* ne sont pas alignées. Selon le premier axe, le niveau socio-économique inférieur (NSE1) s'oppose aux niveaux socio-économiques moyen inférieur (NSE2), moyen supérieur (NSE3) et supérieur (NSE4). Selon le deuxième axe, c'est le niveau socio-économique supérieur (NSE4) qui s'oppose aux trois autres niveaux (NSE1, NSE2 et NSE3). Cela signifie que parmi les élèves non-natifs et allophones, il y a une surreprésenta-

tion d'élèves de niveau socio-économique inférieur et que parmi les élèves les plus jeunes, il y a une surreprésentation d'élèves de niveau socio-économique supérieur – ce sont en effet les parents qui ont un statut socio-économique élevé qui, le plus souvent, entreprennent des démarches pour que leur enfant puisse commencer l'école plus tôt.
Le point représentant les redoublants se trouve sur la première diagonale principale. Ce point est attiré à la fois par les modalités *allophone* et *non-natif* et par la modalité *âgé*. Ces élèves sont évidemment plus âgés que leurs camarades et sont plus fréquemment issus d'un milieu étranger modeste (Bless et al., 2005).
Examinons maintenant la position des cantons dans le premier plan factoriel. Le premier axe oppose Genève et Vaud au Jura. Les autres cantons occupent sur cet axe une position centrale. Nous avions déjà souligné le fait que la proportion des élèves non-natifs et allophones était plus grande dans les cantons de Genève et de Vaud et plus petite dans le canton du Jura (§ 1.2.3 et § 1.2.4). Le deuxième axe, quant à lui, ordonne les cantons en fonction de l'âge moyen des élèves. Comme nous le savons déjà, les élèves les plus jeunes sont, en Suisse romande, ceux du canton de Genève et les plus âgés ceux des cantons de Berne et Fribourg (§ 1.2.1).

1.3 Les enseignants

Un questionnaire a été envoyé à chaque enseignant intervenant dans les classes impliquées dans notre recherche[7]. Nous avons finalement reçu 151 questionnaires issus des sept cantons participant à Mathéval. La répartition des questionnaires en fonction du canton de provenance est donnée dans le tableau 1.11. Tous ces questionnaires ont été dépouillés puis analysés ; les principaux résultats mis en évidence sont présentés ci-après.

Tableau 1.11 – *Nombre de questionnaires retournés par canton.*

	Canton							
	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD	Total
Questionnaires	22	20	20	20	24	25	20	151

1.3.1 Sexe

Dans notre échantillon d'enseignants, les femmes sont majoritaires et représentent plus des deux tiers de l'effectif. Des différences cantonales peuvent être

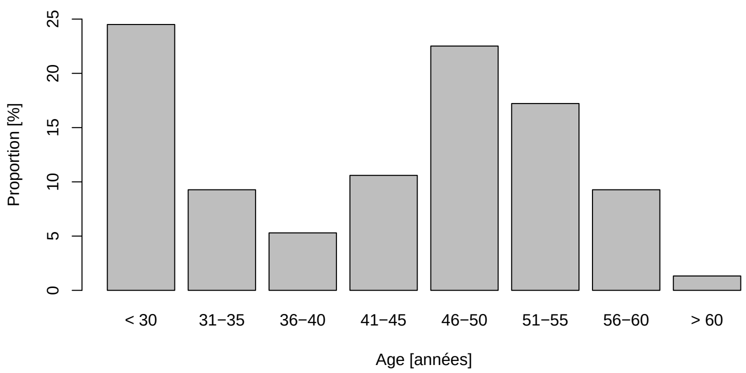
[7]Lorsque plusieurs enseignants travaillent dans une même classe, chacun d'entre eux a reçu un exemplaire du questionnaire.

mises en évidence. Ainsi, dans les cantons de Fribourg et du Valais la proportion de femmes est nettement inférieure à la moyenne ; dans le premier cas elle est de l'ordre de 55% et de 50% dans le deuxième. A l'inverse, la proportion de femmes est de 85% dans le canton de Genève et elle s'élève même à 92% dans le canton de Vaud.

1.3.2 Âge

La pyramide des âges présentée ci-après (figure 1.6) montre que les répondants âgés de plus de 40 ans représentent 60% de notre échantillon, et les moins de 30 ans représentent presque le quart de l'effectif. Un creux important de répondants âgés de 31 ans à 45 ans est observable.

FIGURE 1.6 – *Âge des répondants.*

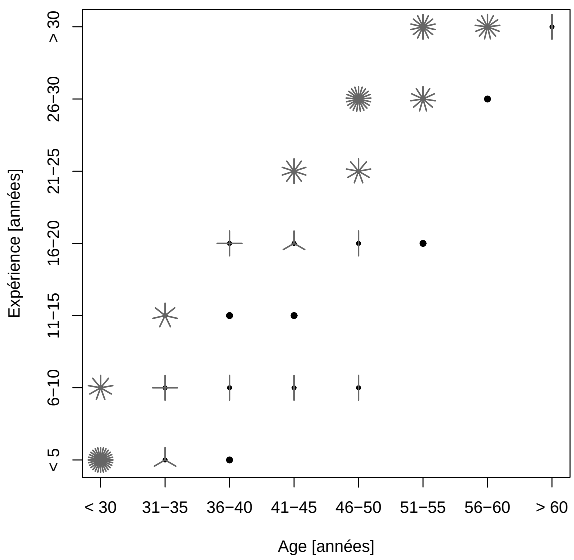


Des différences non négligeables sont observées entre les cantons. Dans le canton de Genève les enseignants qui ont répondu à notre questionnaire sont nettement plus jeunes que dans les autres cantons, la part des plus de 40 ans ne représente que 30% alors que dans les cantons de Berne et du Valais cette proportion est d'environ 75%.

1.3.3 Expérience

Considérons maintenant l'expérience des répondants en regardant le nombre d'années d'activité dans l'enseignement. Nous constatons que cette expérience est directement corrélée à l'âge de l'enseignant ($r = 0.93$). Pour cette variable, nous pouvons relever que la majorité des enseignants concernés sont très expérimentés ; plus de la moitié d'entre eux ont plus de vingt ans de pratique. La figure 1.7 présente la corrélation existante entre l'âge et le nombre d'années de pratique.

Figure 1.7 – *Corrélation entre l'âge des répondants et leur expérience. Ce diagramme en tournesols permet de visualiser le nombre d'enseignants à chaque emplacement. Le nombre de pétales d'un tournesol est égal au nombre d'enseignants se trouvant en son centre. Si à un endroit il n'y a qu'un enseignant, le tournesol n'est représenté que par son cœur – un point.*



1.3.4 Effectif des classes

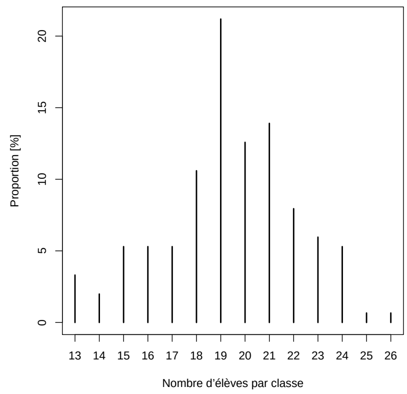
La grande majorité (plus de 70%) des répondants travaillent actuellement dans une classe de 4P et les autres enseignent dans une classe à deux degrés. Le canton du Jura se distingue ; ses enseignants sont les seuls à travailler majoritairement (65%) dans des classes à deux degrés.
Concernant le nombre d'élèves par classe, la moyenne romande se situe à 19 élèves mais des différences entre les cantons sont à relever. En effet, nous observons de grandes différences de position des distributions cantonales et ces différences sont significatives ($F = 2.9$, $ddl_1 = 6$, $ddl_2 = 144$, $p < 0.05$). C'est dans le canton du Jura que nous trouvons la plus forte proportion de classes de moins de 18 élèves et c'est dans le canton du Valais qu'il y a la plus forte proportion de classes de plus de 21 élèves. Le canton de Genève se distingue par le fait que ses effectifs sont très homogènes (toutes les classes comptent des effectifs allant de 17 à 23 élèves), contrairement au Valais qui présente une grande dispersion de ses effectifs (figure 1.8).

1.3.5 Taux d'occupation

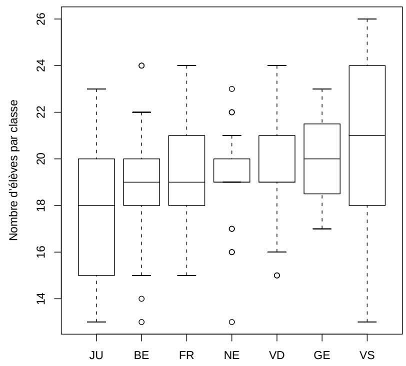
Une majorité d'enseignants (58%) travaillent à temps complet et un peu plus d'un tiers occupent un poste à temps partiel dont le taux d'occupation est d'au

FIGURE 1.8 – *a) Effectif des classes. b) Distributions des effectifs des classes selon les cantons. Les boîtes à moustaches sont ordonnées en fonction de la valeur de la médiane.*

a)

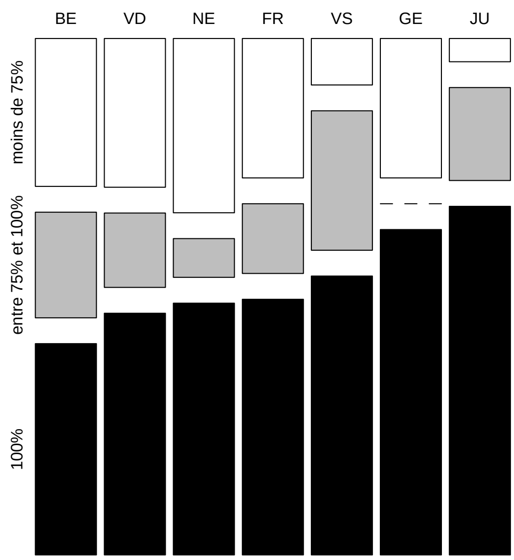


b)



moins 50%. Seuls six enseignants sur un total de 151 sont engagés à moins de 50%. Le canton de Berne est le seul dans lequel les postes à temps complet sont moins nombreux que ceux à temps partiel et c'est dans les cantons du Jura, de Genève et du Valais que les postes à temps complet sont les plus nombreux (figure 1.9). Une différence est observée entre les hommes et les femmes ; les hommes occupent majoritairement un poste à 100% alors que les femmes sont plus nombreuses à travailler à temps partiel.

FIGURE 1.9 – *Taux d'occupation selon les cantons.*



1.3.6 Comparaison des enseignants de Mathéval 2P et 4P

Lors des deux enquêtes Mathéval, 2P ainsi que 4P, ce sont au total 140 classes qui ont été impliquées. Le questionnaire de Mathéval 2P a été rempli par 145 enseignants et 151 enseignants ont rempli celui de Mathéval 4P. Lors de Mathéval 2P, les femmes représentaient près de 95% de la population de répondants alors que pour l'enquête actuelle cette proportion n'est plus que d'un peu plus de 68%. Lors des deux enquêtes, la majorité de la population était âgée de plus de 40 ans (proportion de plus de 50% lors de 2P et d'un peu plus de 60% en 4P) et nous observons dans les deux cas un faible effectif dans la classe d'âge 36-40 ans. En ce qui concerne le nombre moyen d'élèves par classe, il était de l'ordre de 18 lors de l'enquête 2P et il est d'environ 19 pour l'enquête actuelle. En 2P, plus de la moitié (57%) des enseignants occupaient un poste à temps partiel alors que les répondants de 4P travaillent majoritairement (58%) à plein temps.

Chapitre 2

Instruments

Pour pouvoir répondre aux questions de recherche énoncées dans l'introduction, nous avons construit deux questionnaires – l'un destiné aux élèves (§ 2.1), l'autre aux enseignants (§ 2.2) –, ainsi qu'une épreuve de mathématiques (§ 2.3).

2.1 Questionnaire aux élèves

Ce questionnaire est succinct ; il nous permet simplement de relever l'âge, le sexe, la nationalité, la langue maternelle et le niveau socio-économique des élèves ayant participé à l'enquête Mathéval 4P. Il nous fournit également une information concernant le retard scolaire éventuel des élèves. Il nous renseigne aussi sur le goût des élèves pour les mathématiques, sur leurs préférences en maths ainsi que sur leur plaisir à travailler seul ou en groupe en classe de mathématiques. Ce questionnaire a été rempli par les élèves qui pouvaient, en cas de besoin, demander de l'aide à leur enseignant.

2.2 Questionnaire aux enseignants

Un questionnaire a été élaboré et adressé aux enseignants dont les classes ont été choisies pour participer à l'enquête ; il se compose de 31 questions distribuées en quatre parties. La première partie rassemble des informations générales concernant le répondant, la deuxième s'intéresse à l'utilisation qu'il fait des nouveaux moyens d'enseignement pour les mathématiques, la troisième porte sur sa pratique et sa manière de gérer et organiser son enseignement des mathématiques, la quatrième et dernière partie se focalise sur sa façon d'évaluer le travail des élèves et sur les difficultés qu'il rencontre lors de cette tâche. Les questions sont pour la plupart fermées, mais certaines sont ouvertes et des espaces de précisions et de commentaires complètent plusieurs questions.

2.3 Épreuve de mathématiques

Nous avons essayé, lors de l'élaboration de l'épreuve de mathématiques destinée aux élèves de 4P, de pallier quelques défauts de celle concoctée pour les élèves de 2P (Antonietti, 2003b).

2.3.1 Design expérimental

L'épreuve de 2P était relativement courte, les contenus mathématiques enseignés à ce degré n'étaient pas totalement couverts par notre évaluation. L'épreuve de 4P contient donc plus de problèmes. Ne pouvant néanmoins pas soumettre les élèves à une épreuve trop longue, nous avons opté pour un design de testage incomplet (Antonietti, 2003a). L'épreuve de mathématiques est donc fragmentée et chaque élève n'est soumis qu'à une portion de l'épreuve complète. Mais, pour pouvoir néanmoins comparer les élèves les uns aux autres, il faut que le plan de testage soit connexe[1]. Nous avons créé un tel plan en répartissant les problèmes en 8 blocs disjoints et en formant, à partir de ces blocs, 8 cahiers différents. Le premier cahier est constitué des blocs 1 et 2, le deuxième des blocs 2 et 3, et ainsi de suite jusqu'au huitième cahier qui lui est constitué du bloc 8 et du bloc 1. L'épreuve complète contient 56 problèmes. Chaque bloc en contient 7 et chaque cahier 14 (figure 2.1).
Les cahiers sont formés de deux parties distinctes. Dans la première, il y a 8 problèmes relativement faciles ; dans la seconde, il y en a 6 plus difficiles qui pour être résolus nécessitent une démarche tortueuse, souvent des tâtonnements, de l'intuition parfois. Chaque élève ne reçoit qu'un seul cahier.

FIGURE 2.1 – *Répartition des problèmes, P01 ... P56, dans les différents blocs et cahiers.*

	Bloc 1	Bloc 2	Bloc 3	Bloc 4	Bloc 5	Bloc 6	Bloc 7	Bloc 8
	P01...P07	P08...P14	P15...P21	P22...P28	P29...P35	P36...P42	P43...P49	P50...P56
Cahier 1	× ··· ×	× ··· ×						
Cahier 2		× ··· ×	× ··· ×					
Cahier 3			× ··· ×	× ··· ×				
Cahier 4				× ··· ×	× ··· ×			
Cahier 5					× ··· ×	× ··· ×		
Cahier 6						× ··· ×	× ··· ×	
Cahier 7							× ··· ×	× ··· ×
Cahier 8	× ··· ×							× ··· ×

2.3.2 Contenu de l'épreuve

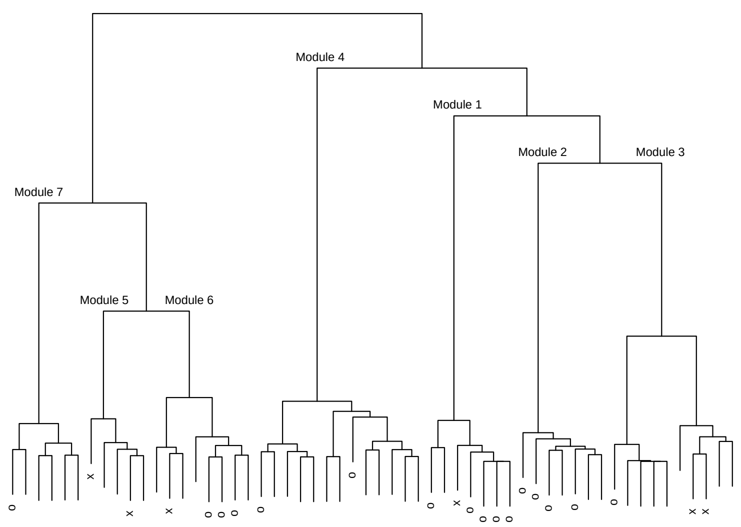
Les problèmes de l'épreuve proviennent de trois sources différentes. Un premier lot de 16 problèmes est issu de l'enquête faite par l'IRDP quelques semaines

[1]Deux blocs quelconques i et j sont toujours reliés par une chaîne.

après la rentrée scolaire de septembre 1979 dans les classes de cinquième année pour évaluer le programme de quatrième année (Hutin et al., 1991). Ces problèmes nous permettront de comparer, sur quelques points, les performances d'élèves ayant appris les mathématiques avec des moyens d'enseignement différents (§ 5.2). Un deuxième lot de 6 problèmes a été emprunté à l'enquête que nous avons menée en 2002 auprès d'élèves de 2P (Antonietti, 2003b). Ces problèmes, mal réussis en 2P, nous permettront d'esquisser l'évolution de quelques compétences mathématiques dans les premiers cycles de l'école primaire (§ 5.1). Un troisième lot de 34 problèmes a été créé pour l'occasion. Ces problèmes s'inspirent plus ou moins directement des nouveaux moyens (Danalet et al., 1999).

En créant l'épreuve, nous nous sommes efforcés de couvrir au mieux l'ensemble des sept modules des nouveaux moyens. Afin de nous assurer de la représentativité de notre épreuve, nous avons demandé à douze experts – enseignants, formateurs, inspecteurs ou chercheurs – d'attribuer chacun des problèmes de l'épreuve à un ou deux modules. Il est possible, à partir des attributions faites par les experts, de regrouper les problèmes selon leur ressemblance. C'est ce que nous avons fait grâce à une méthode de classification hiérarchique ascendante. Le résultat de cette classification est présenté dans la figure 2.2 et dans le tableau 2.3 (p. 34).

FIGURE 2.2 – *Résultat de la classification hiérarchique ascendante des problèmes de l'épreuve de mathématiques réalisée à partir de l'avis de douze experts. Les ronds* (○) *symbolisent les problèmes empruntés à l'évaluation des anciens moyens et les croix* (×) *symbolisent les problèmes issus de Mathéval 2P.*



Cette classification montre que les domaines enseignés sont bien recouverts par notre épreuve de mathématiques. Notons néanmoins qu'un léger glissement de sens a eu lieu concernant les problèmes du module 1. Si, selon les concepteurs des nouveaux moyens, ce module devait rassembler des problèmes ouverts, faisant souvent appel pour être résolus à des compétences transversales – comme sélectionner et organiser des informations, formuler des hypothèses et les vérifier ou conduire un raisonnement déductif – les problèmes de notre épreuve rattachés au module 1 sont plutôt des problèmes de logique, qui, pour être résolus, nécessitent la connaissance de la signification des connecteurs logiques, des quantificateurs existentiel et universel, la capacité d'établir la valeur de vérité d'une proposition et de conduire un raisonnement transitif. Ces problèmes sont, soulignons-le, pour la plupart tirés des anciens moyens.
Par ailleurs, la classification présentée à la figure 2.2 illustre bien comment s'apparentent les modules. Ces derniers se regroupent en deux grands domaines. Le domaine numérique, formé des modules 1, 2, 3 et 4, d'une part, et le domaine géométrique, d'autre part, qui rassemble les modules 5, 6 et 7. Au sein du domaine numérique, un partage s'effectue entre les modules déjà anciens qui portent sur le nombre et le champ additif et celui, plus nouveau, qui se réfère au champ multiplicatif. Au sein du domaine géométrique, une division apparaît entre le champ de la mesure et les deux autres modules beaucoup moins distinguables qui traitent globalement de géométrie plane et de l'espace.

2.3.3 Passation

Tous les élèves des classes concernées passèrent l'épreuve de mathématiques durant le mois de mai 2004. La passation se déroula sur deux matinées : l'une pour résoudre les problèmes de la première partie de l'épreuve, l'autre pour résoudre ceux de la seconde partie.
Les élèves disposèrent d'une heure et demie au plus pour résoudre chacune des parties de leur cahier. La résolution des problèmes se fit directement dans les cahiers avec l'interdiction de recourir à la calculette.
Le nombre maximum d'élèves qui, dans une classe, reçurent le même cahier n'excéda jamais 4. Deux élèves assis l'un à côté de l'autre reçurent toujours un cahier différent. Le tableau 2.1 indique comment sont répartis les cahiers dans les cantons.

TABLEAU 2.1 – *Répartition des cahiers dans les cantons.*

Cahier	Canton BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD	Total
1	43	43	43	31	40	45	45	290
2	44	45	40	30	44	46	43	292
3	46	41	41	32	42	45	43	290
4	45	44	41	33	45	45	43	296
5	44	44	35	29	43	46	43	284
6	43	42	39	28	41	44	44	281
7	45	42	37	25	40	41	39	269
8	37	38	35	24	39	39	38	250
Total	347	339	311	232	334	351	338	2252

2.3.4 Difficulté des problèmes

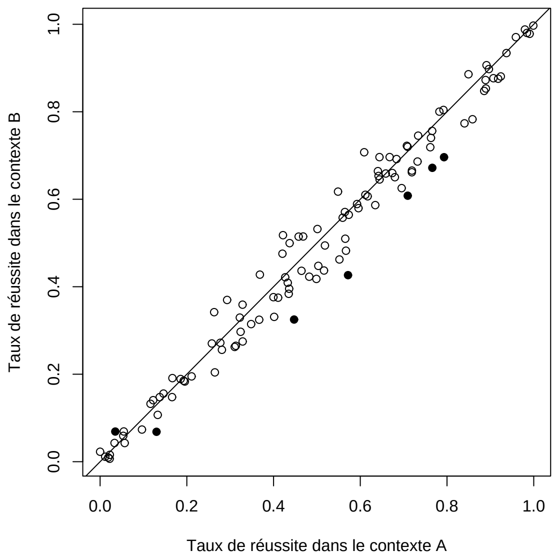
En demandant aux élèves de résoudre les problèmes de notre épreuve, nous effectuons ce que Luce et Tukey (1964) nomment une mesure conjointe simultanée (Coombs et al., 1975 ; Brogden, 1977). À partir des observations, nous tirons des informations concernant à la fois les compétences des élèves et la difficulté des problèmes. Dans les paragraphes qui suivent, nous allons brièvement caractériser les problèmes de l'épreuve de mathématiques selon leur difficulté, ceci fournira un premier aperçu des qualités métrologiques de notre épreuve.

Rôle du contexte

Vu le plan expérimental pour lequel nous avons opté, chaque problème a été soumis aux élèves dans deux contextes différents. En effet, un problème du bloc i ($i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ 8\}$) apparaît toujours une première fois dans le cahier i et une seconde fois dans le cahier $8 - [(9 - i) \text{ modulo } 8]$.
Afin de savoir si le contexte général dans lequel un problème est posé influence sa difficulté, nous allons calculer puis comparer les taux de réussite de chacun des problèmes résolus dans deux contextes différents ou plutôt de chaque item. En effet, beaucoup de problèmes de notre épreuve sont composés de plusieurs parties ou items. Au total l'épreuve en compte 113. L'évaluation des items se fait exclusivement de manière dichotomique : à un item juste, nous attribuons le score 1 et à un item faux le score 0 (les critères de correction de chaque item sont définis précisément au chapitre 3). Et c'est à partir des réponses des élèves codées en 0 et 1 que nous estimons les taux de réussite en tenant compte de la structure de l'échantillon et de la manière dont les cahiers ont été distribués dans les classes (Cochran, 1977 ; Levy & Lemeshow, 2003 ; Tillé, 2001).
Dans la figure 2.3, chaque point représente un item. L'abscisse d'un point représente son taux de réussite dans le contexte A (*i.e.* dans le cahier i), son

ordonnée représente son taux de réussite dans le contexte B (*i.e.* dans le cahier $8-[(9-i) \text{ modulo } 8]$). Les items pour lesquels la différence entre les deux taux de réussite est statistiquement significative au seuil de 5% sont représentés en noir. Ceux pour lesquels la différence entre les deux taux n'est pas significative sont représentés en blanc.

FIGURE 2.3 – *Taux de réussite des items selon le contexte. Les points noirs correspondent aux items n'ayant pas le même taux de réussite dans les deux contextes (le seuil de signification est fixé à 5%).*



Si le contexte n'avait aucun influence, tous les points se trouveraient sur la diagonale du carré de la figure 2.3. C'est, aux fluctuations d'échantillonnage près, ce que nous observons. Seuls 7 points s'écartent significativement de cette diagonale mais jamais de manière excessive[2].

À la lumière de ces résultats, nous considérerons que globalement la difficulté d'un problème – que nous définissons simplement par le complément à 1 de son taux de réussite – ne dépend pas du cahier dans lequel il se trouve.

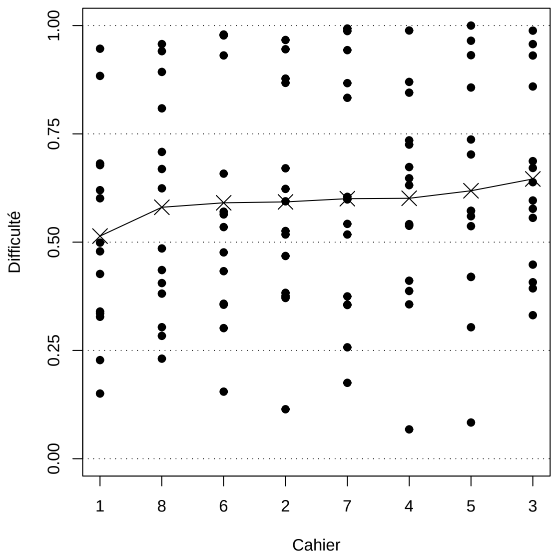
Comparaison des cahiers

Pour comparer la difficulté des cahiers, nous prendrons comme unité d'analyse le problème. La difficulté d'un problème est la moyenne des difficultés des items qui le composent. Et la difficulté d'un cahier est la distribution des difficultés des problèmes qu'il contient.

[2]Malgré un examen attentif des contextes dans lesquels ont été placés ces items, nous n'avons trouvé aucune explication probante des différences de taux de réussite. Nous sommes tentés de croire que ces quelques différences sont fortuites.

La figure 2.4 représente la difficulté des problèmes selon les cahiers. Dans chaque cahier les problèmes se distribuent uniformément sur l'intervalle [0, 1] de la variable *Difficulté* (aucun des 8 tests de Kolmogorov-Smirnov que nous avons effectués n'est significatif) et en moyenne ils ont *grosso modo* tous la même difficulté ($F = 0.31$, $ddl_1 = 6$, $ddl_2 = 2245$, $p > 0.05$).

FIGURE 2.4 – *Comparaison des cahiers selon leur difficulté. Chaque point représente un problème. Chaque cahier est formé de 14 problèmes. La position de la difficulté moyenne d'un cahier est marquée d'une croix (×). Les cahiers sont ordonnés selon leur difficulté moyenne.*



Une analyse à peine plus fine montre que les cahiers ne sont pas tout à fait équivalents. Le cahier 1, par exemple, est un peu plus facile que les autres, alors que le cahier 3 est un peu plus difficile (tableau 2.2).

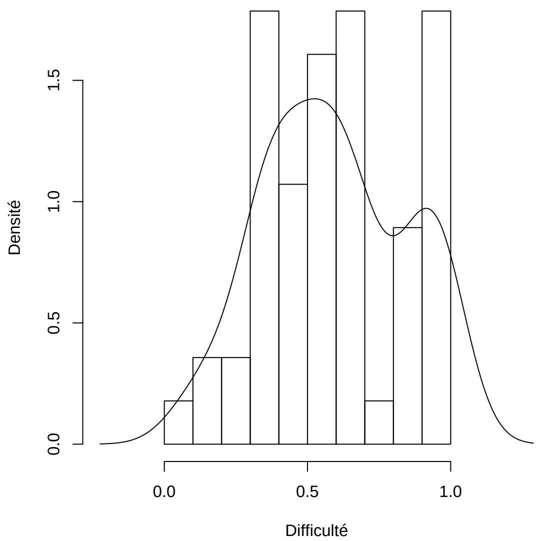
TABLEAU 2.2 – *Caractéristiques des différents cahiers.*

	Difficulté (D)		Nombre de problèmes			
Cahier	Moyenne	Écart-type	facile ($D < 0.25$)	moyennement facile ($0.25 \leq D < 0.50$)	moyennement difficile ($0.50 \leq D < 0.75$)	difficile ($0.75 \leq D$)
1	0.51	0.23	2	6	4	2
2	0.59	0.24	1	4	5	4
3	0.65	0.21	0	4	6	4
4	0.60	0.23	1	3	7	3
5	0.62	0.26	1	3	6	4
6	0.59	0.27	1	5	4	4
7	0.60	0.27	1	4	4	5
8	0.58	0.24	1	6	3	4

Comparaison des modules

Globalement, sur l'ensemble de l'épreuve, on ne peut pas considérer que la difficulté des problèmes suit une distribution uniforme sur l'intervalle $[0,\ 1]$ (le test de Kolmogorov-Smirnov nous contraint de rejeter cette hypothèse). La figure 2.5 illustre bien le fait que l'épreuve est formée de deux types de problèmes. Les problèmes du premier type, une majorité, sont moyennement difficiles et permettent d'évaluer des compétences qui, selon le plan d'études romand de mathématiques (Calame et al., 1997), devraient être facilement mobilisables en situation. Les problèmes du second type sont difficiles, ils permettent d'évaluer des compétences plus embryonnaires, qui sont en phase de construction ou de structuration.

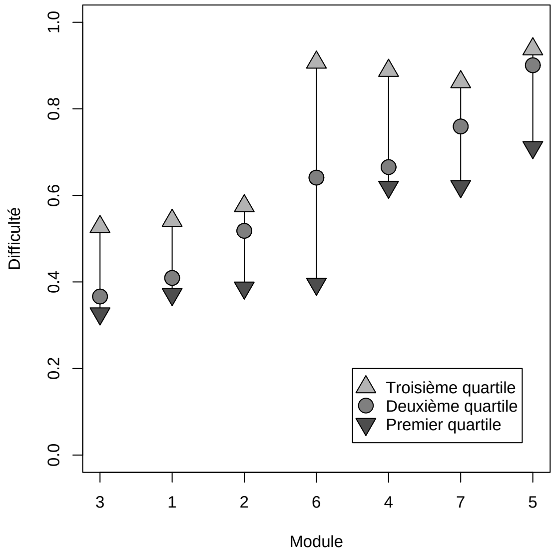
FIGURE 2.5 – *Distribution de la difficulté des problèmes. À l'histogramme est superposée la fonction de distribution lissée.*



Afin d'étayer nos dires, caractérisons la difficulté de l'ensemble des problèmes de chaque module par ses trois quartiles Q_1, Q_2 et Q_3 (figure 2.6).
Les modules les plus faciles, les mieux réussis donc, sont les modules ayant déjà fait l'objet d'un très gros investissement en 1^{re}, 2^{e} et 3^{e} année primaire, il s'agit des modules qui portent principalement sur le nombre et le champ additif. Le module qui porte sur la multiplication et les trois modules géométriques sont plus difficiles et créèrent passablement de difficultés aux élèves.
En résumé donc, la difficulté d'un problème ne dépend pas du cahier dans lequel il est placé[3] ; les cahiers dans lesquels sont répartis les problèmes sont de

[3] C'est pour cette raison que dorénavant nous estimerons la difficulté d'un problème à partir de l'ensemble des réponses des élèves y ayant travaillé, tous cahiers confondus.

FIGURE 2.6 – *Difficulté des modules. Les modules sont ordonnés selon leur difficulté médiane.*



même facture ; par contre la difficulté d'un problème dépend très fortement du module auquel il est rattaché. Les problèmes de géométrie sont ainsi beaucoup plus difficiles que les problèmes d'arithmétique.

Tableau 2.3 – *Classification des problèmes de l'épreuve selon l'avis de douze experts et leur attribution dans les cahiers.*

		Cahiers	Source
	Module 1 : Des problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement		
1	Douceurs	8 & 1	Anciens moyens
2	Carrés, ronds et triangles	4 & 5	Anciens moyens
3	Pierre et les autres	2 & 3	Anciens moyens
4	La balance	6 & 7	Anciens moyens
5	Classe sportive	3 & 4	Anciens moyens
6	Le goûter	2 & 3	Mathéval 2P
7	Énigmes	5 & 6	
	Module 2 : Des problèmes pour approcher le nombre et lui donner du sens		
8	Des chiffres et des nombres	4 & 5	Anciens moyens
9	Craies et caramels	5 & 6	Anciens moyens
10	Centaines, dizaines et unités	8 & 1	Anciens moyens
11	Le plus proche	7 & 8	Anciens moyens
12	Plus petit, plus grand	1 & 2	
13	Mille millions de mille sabords	6 & 7	
14	Droite numérique	3 & 4	
	Module 3 : Des problèmes pour connaître l'addition		
15	La glace	1 & 2	Anciens moyens
16	Les bonbons	6 & 7	Mathéval 2P
17	Le voyageur de commerce intergalactique	1 & 2	Mathéval 2P
18	Les rangements de Kata	1 & 2	
19	La bonne combine	5 & 6	
20	Livraison de menhirs	2 & 3	
21	Le banquet des sorciers	6 & 7	
22	Menhir, menhir, ...	7 & 8	
23	Additions lacunaires	5 & 6	
24	La fête des sorciers	1 & 2	
	Module 4 : Des problèmes pour connaître la multiplication		
25	Calculs neptuniens	8 & 1	Anciens moyens
26	Les cahiers de Jean	3 & 4	Anciens moyens
27	Les devinettes de Kata	8 & 1	
28	Chandelles et chandeliers	6 & 7	
29	Les calculs de Kata	4 & 5	
30	Convoi de menhirs	2 & 3	
31	Le chocolat des lutins	3 & 4	
32	Le manteau de Sherlock Holmes	7 & 8	
33	111 triangles	2 & 3	
34	La fondue	4 & 5	
35	Les puces	1 & 2	
36	Repas de Fête	7 & 8	
37	Animaux fabuleux	5 & 6	
	Module 5 : Des problèmes pour explorer et organiser l'espace		
38	Le ver à fruit	3 & 4	Mathéval 2P
39	Les cubes	6 & 7	Mathéval 2P
40	Lettre à Élise	8 & 1	
41	Tricot	2 & 3	
42	Allô ! Allô !	4 & 5	
	Module 6 : Des problèmes pour approcher les figures géométriques et les transformations du plan		
43	Timbres poste	8 & 1	Anciens moyens
44	Solide	8 & 1	Anciens moyens
45	Prisme	4 & 5	Anciens moyens
46	Les remparts	7 & 8	Mathéval 2P
47	Croquis	3 & 4	
48	En trois	7 & 8	
49	Les papillons de Tchernobyl	5 & 6	
50	Platland	4 & 5	
	Module 7 : Des problèmes pour mesurer		
51	Quadrillage	2 & 3	Anciens moyens
52	La cage biscornue	6 & 7	
53	Un air de famille	1 & 2	
54	Ombres chinoises	3 & 4	
55	La fourmi Ariane	7 & 8	
56	La saucisse à rôtir	5 & 6	

Deuxième partie

Résultats

Chapitre 3

Analyse approfondie de problèmes

Dans ce chapitre nous allons décrire les compétences mathématiques que manifestent les élèves de 4P. Nous passerons en revue la majorité des problèmes que nous leur avons proposés[1]. L'ordre dans lequel nous présenterons les problèmes suit *grosso modo* l'ordre des thèmes des nouveaux moyens (*i.e.* le nombre, les opérations arithmétiques, l'espace et la mesure).

3.1 Décomposer un nombre en unités, dizaines et centaines

Le domaine de la numération est primordial en mathématiques et sa maîtrise par l'élève est un objectif essentiel visé par l'enseignement. Non seulement l'élève doit savoir compter, mais il doit pouvoir faire des comparaisons, des estimations, des groupements et saisir les règles du système numérique. Ces différentes connaissances que la scolarité 1P-4P limite au domaine des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$ impliquent la construction de la cardinalité et la compréhension de la numération positionnelle. Si ces notions ont été abordées dans les degrés 1 et 2, le programme des degrés 3 et 4 permet l'approfondissement de celles-ci par un travail sur des nombres plus grands, des situations plus *décontextualisées* et un abord plus analytique du système numérique. Si plusieurs travaux en psychologie portent sur la difficulté du transcodage entre le système numérique verbal et le système numérique écrit (Seron et al., 1991 ; Scheuer et al., 2000), la décomposition des nombres en différentes puissances de 10 et la structuration arithmétique des nombres sous forme d'échelles et d'intervalles sont également des notions que l'enfant ne maîtrise pas d'emblée. Les programmes de différents pays et le temps accordé à leur apprentissage attestent de cette lente élaboration par l'élève. En Suisse romande, les moyens

[1]Les problèmes sont rassemblés *in extenso* dans l'annexe (p. 161).

d'enseignement comportent plusieurs activités qui se réfèrent à ces notions. Nous avons recensés pour les degrés 3 et 4 confondus 12% d'activités pour approcher le nombre et lui donner du sens (module 2 des nouveaux moyens).
Deux problèmes *Craies et caramels* et *Centaines, dizaines et unités* traitent de la décomposition du nombre en groupes d'unités, de dizaines ou de centaines et permettent de saisir la compréhension qu'ont les élèves de la composition du nombre et dans un même temps de la numération de position.
Ces problèmes, tous deux issus des anciens moyens (Hutin et al., 1991), ciblent la même connaissance, à savoir la décomposition en puissances de 10 de nombres supérieurs à 100 (rappelons que 4371 est l'écriture abrégée de $4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$). La donnée du problème *Craies et caramels* (p. 170) montre par l'usage du terme *boîte* qu'il s'agit de regrouper plusieurs objets, la taille des groupes étant définie par le nombre d'objets que l'on peut mettre dans chaque boîte. Une approche plus concrète peut ainsi être envisagée. Par contre dans *Centaines, dizaines et unités* (p. 171), l'aspect purement formel et numérique prend le pas sur l'aspect palpable et réel. Les termes *centaine*, *dizaine* et *unité* nécessitent de raisonner en termes de sous-produits (il y a 43 centaines dans 4371) et non pas en termes d'identification du chiffre indiquant la puissance de 10 demandée (il y a 3 centaines dans 4371).
Comparons les réponses aux questions portant sur les mêmes nombres mais formulées une fois de manière concrète et une fois de manière plus abstraite (tableau 3.1). Les résultats montrent que le problème *Craies et caramels* est mieux réussi que *Centaines, dizaines et unités*. L'aspect concret de l'énoncé de *Craies et caramels* permet donc aux élèves de mieux comprendre le sens des questions.

TABLEAU 3.1 – *Comparaison des taux de réussite aux mêmes questions habillées différemment.*

		Formulation	Taille des regroupements	Taux de réussite [%]
1	Combien y a-t-il de dizaines dans 4371 ?	abstraite	10	27
2	Combien de boîtes de 10 caramels peut-on faire avec 4371 caramels ?	concrète	10	33
3	Combien y a-t-il de centaines dans 4371 ?	abstraite	100	33
4	Combien de boîtes de 100 craies peut-on faire avec 4371 craies ?	concrète	100	47

Notons que les erreurs résident souvent dans l'adjonction d'une dizaine ou d'une centaine, permettant ainsi de mettre en boîte les objets isolés. Les élèves constituent ainsi des boîtes qui ne sont pas tout à fait pleines. Dans le problème plus formel, les erreurs consistent essentiellement à indiquer le chiffre des centaines, dizaines ou unités au lieu de citer le nombre de centaines, dizaines ou unités. Ces réponses sont plus fréquentes que les réponses correctes et soulèvent la question de la compréhension du nombre, mais aussi le problème de l'enseignement reçu.

3.2 Comparer et écrire des nombres

L'écriture numérique est un système autonome, qui est universellement répandu. Les liens que ce système entretient avec la numération verbale ne sont pas toujours simples et la signification des chiffres qui le composent trouble l'esprit des élèves pendant plusieurs années. Comme nous le signalions plus haut, les épreuves de transcodage et l'interprétation des nombres écrits ont été largement étudiés. Les difficultés recensées, la lente construction du système positionnel et sa compréhension ont motivé les didacticiens à proposer de nombreuses activités autour de cette thématique à l'école. Trois problèmes de notre épreuve permettent de repérer les compétences des élèves dans ce domaine, il s'agit de *Le plus proche*, de *Plus petit, plus grand* et de *Mille millions de mille sabords.*

3.2.1 Le plus proche

Souligne parmi les nombres suivants celui qui est le plus proche de 1023 :

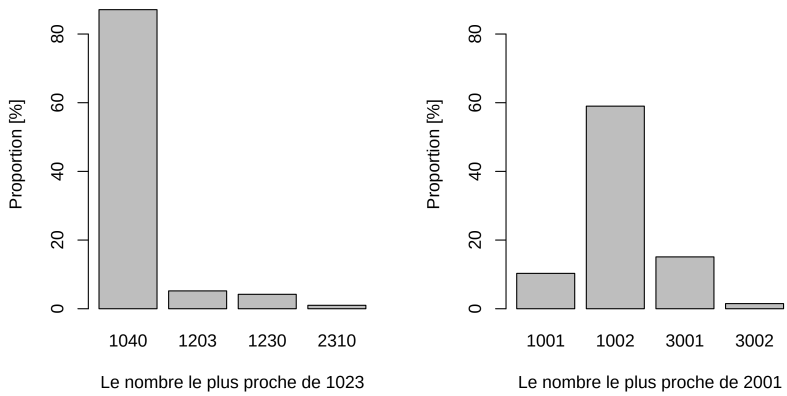
1203 1040 1230 2310

Et parmi les nombres suivants, souligne celui qui est le plus proche de 2001 :

1001 1002 3001 3002

L'écriture positionnelle est ici au cœur du problème. L'élève doit pouvoir non seulement tenir compte de la valeur positionnelle de chaque chiffre, en décomposant chaque nombre en puissances de 10, mais également évaluer l'écart existant entre les différentes valeurs. Cette opération doit être réitérée pour chaque nombre donné. Composé de deux items de difficulté inégale, le problème pose la délicate question du traitement des zéros intercalaires, qui sont fortement représentés dans les nombres du deuxième item et rendent le calcul de l'écart plus complexe. Le premier item est beaucoup plus simple car le nombre à approcher est plus petit que tous les nombres proposés $1023 < \min(\{1040,\ 1203,\ 1230,\ 2310\})$, il est donc le plus proche du plus petit nombre proposé. En revanche, dans le second item, le nombre à approcher a une valeur intermédiaire comprise entre le plus petit et le plus grand nombre proposé $\min(\{1001,\ 1002,\ 3001,\ 3002\}) < 2001 < \max(\{1001,\ 1002,\ 3001,\ 3002\})$.
Les deux items de ce problème obtiennent des taux de réussite très différents (figure 3.1).
Une très haute réussite caractérise le premier item (87% de réponses correctes), alors que le second n'est réussi qu'à 59%. Les erreurs permettent de souligner

FIGURE 3.1 – *Distribution des réponses au problème* Le plus proche.



la difficulté du calcul de l'écart, puisque 15% des élèves mentionnent la réponse 3001.

3.2.2 Plus petit, plus grand

Voici cinq chiffres :

4 1 9 0 3

a) Quel est le plus grand nombre qu'on peut composer avec ces cinq chiffres ?
b) Si on ne prend pas tous les chiffres, quel est le nombre le plus petit possible au-dessus de 1000 ?

Ce problème porte sur l'écriture positionnelle. La résolution du problème exige une certaine systématique de l'élève, afin de ne pas répéter un chiffre déjà utilisé. Le second item présente deux termes comparatifs qui s'opposent sémantiquement, puisque le nombre recherché doit être à la fois supérieur à mille et le plus petit possible. Il se pourrait que pour les enfants cette double contrainte puisse paraître quelque peu paradoxale, rendant ainsi la tâche difficile. Par ailleurs, l'obligation faite dans le premier item de prendre tous les chiffres disparaît dans le second.
Les élèves présentent un degré de réussite élevé au premier item (71%), ce qui n'est pas le cas au second (29%) (tableau 3.2). L'écart entre ces performances puise ses sources dans les caractéristiques que nous avons mentionnées plus haut. En effet, plus de 10% des élèves donnent au second item des réponses composées de 5 chiffres.
Notons que certains élèves n'ont pas compris l'énoncé correctement. Pour composer le plus grand nombre possible avec les chiffres 4, 1, 9, 0 et 3, ils les additionnent simplement et obtiennent alors 19. D'autres croient qu'on leur demande d'indiquer le plus grand chiffre et fournissent 9 comme réponse. Sur le même principe, ils répondent 0 à la seconde question.

TABLEAU 3.2 – *Les réponses les plus fréquentes fournies par les élèves au problème* Plus petit, plus grand.

	Le plus grand possible							
Réponse	9	17	94103	94301	94310			
Taux [%]	2	3	3	3	71			
	Le plus petit possible supérieur à 1000							
Réponse	0	10	1001	1034	1304	1349	10349	41903
Taux [%]	4	2	2	29	3	7	7	4

3.2.3 Mille millions de mille sabords

Écris en chiffres chaque nombre suivant :

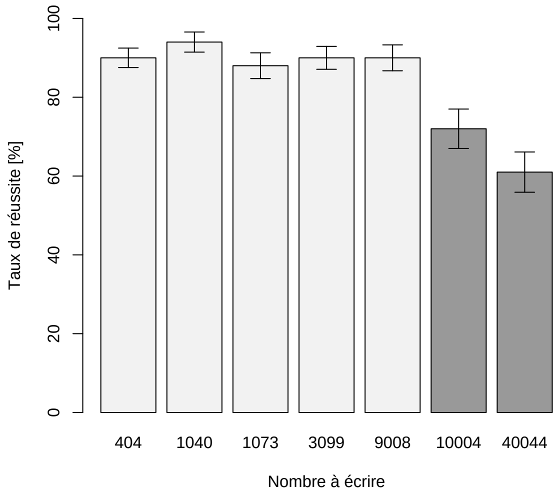
a) mille quarante
b) dix mille quatre
c) quatre cent quatre
d) quarante mille quarante-quatre
e) trois mille nonante-neuf
f) neuf mille huit
g) mille septante-trois

Il s'agit ici d'un problème lié au transcodage numérique. L'élève doit, à partir d'un nombre écrit en code alphabétique, le traduire en écriture numérique. Les nombres proposés vont de l'ordre de la centaine aux dizaines de milliers. De plus, la composition des items fait intervenir des zéros intercalaires comme éléments perturbateurs. L'ensemble des items est réussi par 43% des élèves. Nous notons en particulier un taux de réussite élevé pour tous les items comprenant des nombres de l'ordre de la centaine et du millier.
Par contre, le transcodage de nombres supérieurs à dix mille s'avère plus délicat, montrant ainsi que les règles acquises pour les nombres inférieurs ne sont pas généralisées d'emblée (figure 3.2). En effet, le taux de réussite est de 72% pour l'item dix mille quatre et de 61% pour l'item quarante mille quarante-quatre. Les erreurs les plus nombreuses portent comme dans les autres items sur l'omission d'un zéro. Aucune erreur de confusion de chiffre n'est à signaler. Les résultats illustrent à leur manière l'idée d'arithmétisation progressive que Gréco (1960) avait décrite lors de l'acquisition du concept de nombre.

3.3 Résoudre des problèmes additifs

Le module 3 des nouveaux moyens fait référence à l'ensemble des problèmes pour connaître l'addition. Largement exploré dès la première année, le champ conceptuel de l'addition relève aussi bien des connaissances autour du nombre que des opérations de réunion, transformation, réciprocité et complémentarité. À travers les activités enseignées dans ce module, les notions de somme,

FIGURE 3.2 – *Taux de réussite aux différents items du problème* Mille millions de mille sabords. *Sont représentés aussi les intervalles de confiance à 95% des taux de réussite.*



différence, équivalence sont abordées, ainsi que celles des opérations d'addition et de soustraction. Le cadre général de la résolution de problème crée les conditions nécessaires pour que l'élève puisse saisir la signification des notions mathématiques et qu'il apprenne les notations, les conventions et les règles nécessaires pour mathématiser une situation.

La connaissance du champ conceptuel de l'addition présuppose également que l'élève sache exécuter correctement un certain nombre de calculs additifs et soustractifs. Le répertoire additif abordé dès le premier degré est élargi à des nombres qui vont au-delà de mille et les algorithmes de l'addition et de la soustraction, enseignés dès la troisième année, supposent que les élèves ont acquis les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition qu'ils utilisent lors du calcul réfléchi.

Pour Vergnaud (1981, 1986), les problèmes additifs présentent des particularités qui nécessitent la mise en place de stratégies et de procédures variées. En raison de la complexité des connaissances mises en œuvre dans ces procédures de résolution, les problèmes ne sont pas tous d'égale difficulté. Mathéval 4P propose huit items relevant du champ conceptuel de l'addition, intégrés dans quatre situations-problèmes qui sont *La glace*, *Livraison de menhirs*, *Le banquet des sorciers* et *La fête des sorciers*.

Les quatre problèmes proposés aux élèves relèvent de situations problèmes désormais classiques et très présentes dans les manuels d'enseignement. Ils comportent une situation narrative qui décrit un état de départ et un état d'arrivée. Entre deux, une transformation ou un événement sont décrits. Le problème porte sur la recherche d'une étape du récit ou sur la comparaison entre différents moments. Les différents items qui les composent touchent ainsi la transformation d'états, la composition d'états et la comparaison d'états. Les différentes variétés de problèmes additifs de Mathéval sont présentées dans le tableau 3.3.

TABLEAU 3.3 – *Répartition des 8 items selon le type de problème et l'étape recherchée.*

Problème	Composition d'état	Transformation positive	Transformation négative	Comparaison
Livraison de menhirs (1)	Sous-ensemble			
Banquet des sorciers (1)	Sous-ensemble			
Fête des sorciers (1)	Tout			
Livraison de menhirs (2)		État intermédiaire		
Fête des sorciers (2)		État intermédiaire		
Glace			État final	
Banquet des sorciers (2)			État intermédiaire	
Fête des sorciers (3)				2^e^ ensemble

Si les modes de résolution peuvent être opérationnalisés sous la forme d'une addition ou d'une addition lacunaire, montrant l'usage des algorithmes ou du calcul réfléchi, ces problèmes nécessitent des connaissances variées et multiples portant sur les propriétés de l'addition (associativité et commutativité) ainsi que sur l'utilisation des outils de calcul tel qu'algorithme et calcul réfléchi.
Les habillages des quatre problèmes proposés sont différents et en ceci Mathéval 4P se distingue de Mathéval 2P. De plus certains items contiennent des informations non directement nécessaires à leur résolution, mais qui relèvent de la contextualisation du problème. La charge cognitive s'avère ainsi plus importante que dans Mathéval 2P. Nous notons cependant qu'aucun item ne contient de distracteur numérique.

3.3.1 La glace

> Jean a 1 franc et 70 centimes. Il s'achète une glace à 90 centimes. Combien lui reste-t-il ?

Problème de transformation négative dans le champ additif, *La glace* présente un énoncé dont l'ordre d'énumération des différents termes est similaire à celui que l'élève doit poser pour rechercher l'état final. À cette caractéristique il faut ajouter que *La glace* est également un problème de mesure qui pourrait nécessiter une conversion des francs en centimes, bien que l'on suppose que la pratique d'échanges monétaires annule cette opération et de fait contourne cette difficulté.
Le résultat correct est obtenu par 87% des élèves. Plus de 90% des réponses sont données en centimes. La présence de l'opération, qui n'est pas demandée

explicitement dans la donnée du problème est importante, puisque 76% des élèves posent l'opération, vraisemblablement par effet de contrat didactique.

3.3.2 Livraison de menhirs

a) Au lever du soleil, Karwa livre des menhirs. À midi, il livre encore 102 menhirs. En tout il a livré 500 menhirs. Combien de menhirs a-t-il livrés au lever du soleil ?

b) Warka travaille très vite. Cette semaine Warka ne fit que de la taille et sa réserve de menhirs a passé de 849 à 1021. Combien de menhirs Warka a-t-il taillés cette semaine ?

La composition d'états caractérise le premier item du problème *Livraison de menhirs* tandis que le second item met en scène une transformation positive ; tous deux relèvent de connaissances du champ conceptuel de l'addition. De plus, nous notons que dans le premier item, la recherche porte sur le premier sous-ensemble tandis que dans le second, les élèves sont appelés à rechercher l'état intermédiaire. Le premier problème énonce très distinctement trois moments chronologiques d'une journée et à chaque moment correspond une donnée numérique connue (il livre 102 menhirs) ou inconnue (il livre des menhirs). Le deuxième item est moins détaillé ; les données numériques connues qui permettent de calculer la transformation sont proches et ne se signalent pas par une caractéristique temporelle : « sa réserve de menhirs a passé de 849 à 1021 ». La recherche du premier sous-ensemble est réussi par 71% des élèves, tandis que la recherche de l'état intermédiaire atteint un taux de réussite plus faible (58%). Plusieurs élèves parviennent à dépasser l'ordre des événements donnés dans le premier problème et ordonnent les nombres de manière à faciliter leurs calculs. La majorité des calculs sont écrits en colonne et laissent des traces liées au traitement algorithmique de l'opération. L'explicitation du calcul est régulièrement faite par plus de 9 élèves sur 10 (93% et 91%).
Le détail des résultats laisse apparaître que pour la très grande majorité des élèves, le sens de l'opération à effectuer est compris. Moins de 10% des élèves traitent le premier problème comme une recherche d'état final, ne parvenant ainsi pas à tenir compte de la donnée et opérant de fait une addition. Les autres réponses sont ainsi issues d'une bonne compréhension du problème.
Dans le second item, cette même procédure qui consiste à additionner les nombres présents est effectuée par 12% des élèves. Les autres résultats peuvent être expliqués par des erreurs portant sur l'application des règles algorithmiques.
Nous notons que la variété des réponses est importante. En effet, nous trouvons pour le premier item 40 résultats différents et pour le second 79. Cette diversité signale de nombreuses erreurs portant sur les procédures de retenues. Malgré l'application de règles algorithmiques dont les élèves laissent des traces sur leur copie, nous avons repéré plusieurs erreurs classiques, telles que soustraire du plus petit nombre, ou emprunter une dizaine mais sans report de cet emprunt sur le chiffre suivant.

3.3.3 La fête des sorciers

a) Les invités se pressent pour entrer au château. 78 sorciers arrivent du nord, 234 du sud, 345 de l'est et 1088 de l'ouest. Combien de sorciers arrivent des quatre points cardinaux ?

b) Les sorciers doivent être 2000 en tout. Combien de sorciers doivent encore arriver ?

c) La fête bat son plein. Certains sorciers sont au bar, d'autres dansent. 81 sorciers dansent en formant une ronde, ils sont 73 de moins qu'au bar. Tous les sorciers qui sont au bar dégustent un jus de citrouille glacé. Combien sont-ils ?

La fête des sorciers regroupe trois items qui dans un habillage commun font intervenir trois types de situations.
Le premier item demande de composer différents états pour obtenir un tout. Il est compris par 91% des élèves qui posent effectivement une addition. Toutefois, les erreurs de calcul, voire parfois l'omission d'un des sous-ensembles à prendre en considération, entraînent un taux de réussite plus bas (74%). Additionner plusieurs nombres en colonne augmente la possibilité de faire des erreurs.
Le deuxième item de ce problème s'avère légèrement plus difficile pour les élèves. Le taux de réussite est de 69%. La forme soustractive est posée par 83% d'élèves, mais provoque plusieurs erreurs de retenue.
Le troisième item est conceptuellement le plus complexe. Il pose une comparaison entre deux ensembles, comparaison qui est sémantiquement négative « ils sont 73 de moins qu'au bar » mais qui paradoxalement joue le rôle de complémentaire du premier ensemble. La moitié des élèves donnent une réponse correcte à ce problème (49%), effectuant ainsi un calcul additif qui dans certains cas n'est pas inscrit. Un taux relativement élevé d'élèves (38%) sont piégés par l'aspect sémantique, ils posent une soustraction et obtiennent dès lors la réponse « 8 sorciers sont au bar ».

3.3.4 Le banquet des sorciers

a) Ymi dispose les friandises sur la table. Il y a 868 araignées en massepain, 354 biscuits au miel, 106 chocolats poivrés et des pains d'épice. Il se rappelle qu'il a confectionné 2064 friandises. Mais combien y a-t-il donc de pains d'épice ?

b) Ymi salive en regardant les 400 canapés aux œufs de crapauds. Quelques secondes plus tard le plat ne comporte plus que 378 canapés. Que s'est-il passé ?

Ce problème est de facture analogue au précédent, bien que le texte du problème soit un peu plus long. En effet, il comporte lui aussi un item mettant en scène une composition de plusieurs états et un deuxième item portant sur une transformation. À la différence de *La fête des sorciers*, l'item *a)* demande aux élèves de chercher un sous-ensemble, ce qui suppose dans un premier temps de calculer la somme des friandises confectionnées afin d'obtenir un premier état de la situation, et de trouver ensuite le complémentaire à la somme totale donnée. Les erreurs peuvent ainsi se glisser à deux moments de la résolution.

51% des élèves posent le calcul correctement et obtiennent la bonne réponse. Par ailleurs, nous constatons que 67% des élèves procèdent de la bonne manière pour résoudre le problème et que 12% ne donnent aucun signe de mathématisation de la résolution.
Le deuxième item est réussi par plus des trois quarts des élèves interrogés (76%). Le problème est mathématisé (87%) et la réponse numérique attendue est donnée dans 79% des cas. Nous constatons que peu d'élèves ne saisissent pas qu'il s'agit d'une transformation négative. En effet, moins de 1% des élèves donnent pour réponse 778. Les explications données montrent que les élèves saisissent le sens de l'opération.
Quant à savoir qui est à l'origine du méfait, les solutions des élèves sont multiples. Les sorciers, Ymi, voire un « on a volé 22 canapés » sont des réponses qui ont été données.
Dans ces deux problèmes concernant les sorciers, outre les erreurs classiques dans l'application de l'algorithme, nous notons également que, dans les cinq items, plusieurs élèves modifient les données lorsqu'ils posent l'opération, et parfois même le résultat du calcul, effectué correctement, est reporté sous une autre forme dans la réponse.

3.4 Résoudre des problèmes multiplicatifs

Piaget avait montré l'étroite dépendance entre trois structures, la numérique, l'additive et la multiplicative, qui s'élaborent en s'appuyant l'une sur l'autre, chacune étant nécessaire à la construction des autres. Plus tard, Vergnaud a mis l'accent sur l'importance de considérer non plus chaque notion comme une unité d'enseignement ou d'apprentissage, mais de viser plutôt les vastes champs conceptuels que suggèrent ces trois grands domaines.
L'analyse *a priori* des problèmes soumis aux élèves nous a d'emblée replongés dans ces aspects théoriques de l'apprentissage mathématique. En effet, pour résoudre les différents problèmes relatifs à ce champ, il faut non seulement posséder un ensemble de concepts mais encore percevoir (avant de les maîtriser) les relations qui existent entre nombre, addition et multiplication afin de les différencier et de les coordonner.
Ce véritable tissu d'ingrédients que forment structures, notions et champs conceptuels met du temps à se construire et à devenir fonctionnel. Ce qui explique, en partie du moins, le niveau peu élevé de réussite à certains problèmes relevant de la multiplication.
L'évaluation Mathéval soumet donc les élèves de 4P à des activités susceptibles de rendre compte du niveau d'élaboration de la multiplication et tente aussi de cerner quels aspects sont acquis et lesquels ne sont qu'en voie de construction. Par exemple, on sait que la plupart des élèves construisent relativement facilement la multiplication comme alternative à l'itération additive, mais qu'ils vont mettre des années pour maîtriser les notions de proportion et de fonction.

Les problèmes de cette enquête ont été pensés pour cerner le mieux possible cette variété de concepts et de niveaux.

3.4.1 Les calculs de Kata

Les calculs de Kata est composé de *petits* problèmes multiplicatifs. Ce sont de courts énoncés utilisant les mêmes nombres afin de les épurer au maximum de difficultés relatives à la lecture ou au maniement de nombres compliqués. La recherche porte sur chacun des différents termes de l'équation $a \times b = c$.

a) Kata doit distribuer des fioles de potion à ses copines. Combien de fioles faut-il pour 10 copines qui recevront 20 fioles chacune ?
b) Un balai magique est fait de 20 brins de paille. Combien de balais magiques fabrique Kata avec 200 brins ?
c) Kata dispose de 200 graines pour nourrir ses crapauds. Elle les distribue toutes. Les 10 crapauds en reçoivent chacun la même quantité. Combien de graines reçoit chaque crapaud ?
d) Pour l'école des sorcières Kata dispose de 20 grimoires. Chacune des 200 élèves sorcières en veut un. Combien de grimoires doit commander Kata ?

Le premier problème consiste à rechercher le produit : $10 \times 20 = c$. Le deux suivants portent sur la recherche d'un des facteurs, a ou b, connaissant le produit c : $20 \times b = 200$ puis $a \times 10 = 200$. Ils peuvent donner lieu à des conduites de partage ou de distribution pour être résolus.
Décontextualisés, les deux problèmes *b)* et *c)* se traduisent par une même opération, une multiplication lacunaire ou une division. Dans leur contexte respectif, les difficultés ne sont pas les mêmes, nous verrons que le second est moins bien réussi peut-être à cause du fait que le produit est énoncé en dernier. Enfin, le quatrième problème vise la différenciation additif/multiplicatif, puisque après trois items portant sur la multiplication, celui-ci est résolu grâce à une soustraction.
Le problème *a)* qui consiste à rechercher le produit final est bien réussi. 87% des élèves donnent une bonne réponse et presque tous posent un calcul correct. À l'item *b)*, il s'agit de recourir à l'opération inverse. Seuls 52% des élèves répondent correctement et plus de 10% des élèves n'entrent même pas en matière. L'erreur la plus fréquente (plus de 13%) consiste à multiplier les deux nombres du problème.
La question *c)* qui présente le même schéma que la précédente lorsqu'elle est décontextualisée, est mieux réussie (68%) probablement parce que l'énoncé évoque explicitement l'action de distribution. La plupart des élèves posent correctement la division (200 : 10). La même proportion d'élèves qu'en *b)* n'essaient pas de répondre. Ce taux de non-réponses augmente encore légèrement à la question suivante *d)* bien qu'il s'agisse d'un problème additif simple nécessitant une soustraction. On peut imaginer que les élèves qui refusent la division aux items précédents n'essaient pas de voir s'ils arriveraient à répondre ici. À peine plus de la moitié des élèves trouvent la réponse correcte grâce à la

soustraction (53%). Le manque de réussite peut s'expliquer de plusieurs façons : d'abord, cette question est placée après trois problèmes multiplicatifs. En effet, plus de 10% des élèves recourent à une multiplication. Ensuite, son énoncé ne comporte pas d'indices susceptibles de suggérer la soustraction. Il s'agit vraiment d'entrer dans le problème et d'en comprendre le sens.
En résumé, les réponses aux *Calculs de Kata* n'atteignent pas le niveau que l'on aurait pu attendre pour une série de problèmes qui apparaissent tels quels, mis à part l'habillage, dans les moyens de 4P. Il est vrai que ces derniers, *Un pour tous* et *Tous pour un*, sont chapeautés par une consigne qui demande explicitement quels sont les items qui peuvent être résolus par une multiplication, ce qui oriente les élèves vers une réflexion différenciatrice.

3.5 Effectuer un partage

Dès la 2P, des activités de partage sont proposées aux élèves dans le but de les faire raisonner sur une pratique qui leur est plus ou moins courante. Très tôt, en effet, l'enfant comprend le sens de partager en créant deux ou plusieurs parties – et en renonçant ensuite à la plupart d'entre elles ! Et puis il y a partage et partage. S'il s'agit de donner la moitié de ses bonbons, que se passe-t-il quand on en possède un nombre impair ? Les situations mathématiques scolaires prévoient deux façons de partager les quantités discrètes : le partage équivalent, où toutes les parties comprennent le même nombre d'éléments, et le partage inégal.
La compréhension du processus de partage ou celui de distribution sert la notion de division. *Chandelles et chandeliers* met bien en évidence la synthèse conceptuelle en offrant différentes approches pour sa résolution.

3.5.1 Chandelles et chandeliers

Ymi et Kata décorent la grande salle du château pour le banquet des sorciers. Ils ont chacun 100 bougies. Kata doit garnir le plus possible de chandeliers à 8 branches et Ymi doit garnir le plus possible de chandeliers à 11 branches. Combien de chandeliers complets chacun pourra-t-il garnir ?

Si la démarche la plus rapide consiste en une division avec reste, d'autres, telles que le partage équivalent ou le recours aux multiples, proches de l'itération ($11 + 11 + 11 + \dots$ ou $8 + 8 + 8 + \dots$), dénotent de la part des élèves des compétences à utiliser leurs connaissances pour mener à bien une tâche.
Contrairement au problème de partage *Les colliers de Louisa* soumis aux élèves de 2P, l'énoncé de *Chandelles et chandeliers* (p. 189) ne comporte pas d'illustration représentant la totalité des objets à partager. En 2P, il s'agissait de partager en quatre parties équipotentes 22 perles, dessinées sur deux rangées de onze. Presque deux tiers des élèves avaient réussi le problème en travaillant sur le dessin et en formant les sous-collections grâce à des cordes ou des barres

de séparation. Les traces laissées sur le dessin témoignent des essais successifs de beaucoup d'élèves pour trouver le meilleur partage, c'est-à-dire celui qui donne des colliers comportant tous le même nombre de perles, en laissant un reste minimal. La présentation de *Chandelles et chandeliers* comporte bien un dessin mais celui-ci sert d'illustration plutôt que d'une donnée du problème ou d'un support utilisable. L'élève voit donc ce qu'est un chandelier à 11 branches mais il doit encore imaginer un chandelier à 8 branches ainsi que deux collections de 100 bougies.

Si très peu d'élèves s'aident d'un dessin, en revanche près des deux tiers ont recours à une représentation numérique, le plus souvent un calcul. La division euclidienne, qui constitue l'outil le plus formalisé et qui pourrait sembler le plus canonique, ne permet que rarement la réussite car les élèves n'en maîtrisent pas la technique. Les quelques élèves qui maîtrisent déjà cette opération ont donné des réponses avec des décimaux, sans être capables de raisonner sur le sens d'un tel résultat.

La partie théorique du module 4 dans le livre du maître stipule : « En quatrième, on se contente de calculer les premiers quotients rencontrés par des soustractions successives ou d'approcher les dividendes par des multiples du diviseur » (Danalet et al., 1999, p. 164). Ce sont justement ces démarches auxquelles ont eu recours la plupart des élèves, seulement elles n'ont été menées à bien que par 40% d'entre eux environ. En effet, beaucoup d'élèves connaissent et pensent à utiliser les soustractions successives, ou les multiples, mais ne les ont pas suffisamment élaborés pour résoudre le problème. Quelques réussites sont dues à des tâtonnements, consistant à effectuer des multiplications par 8 et par 11 ($8 \times \ldots$ ou $11 \times \ldots$) jusqu'à un produit proche de 100.

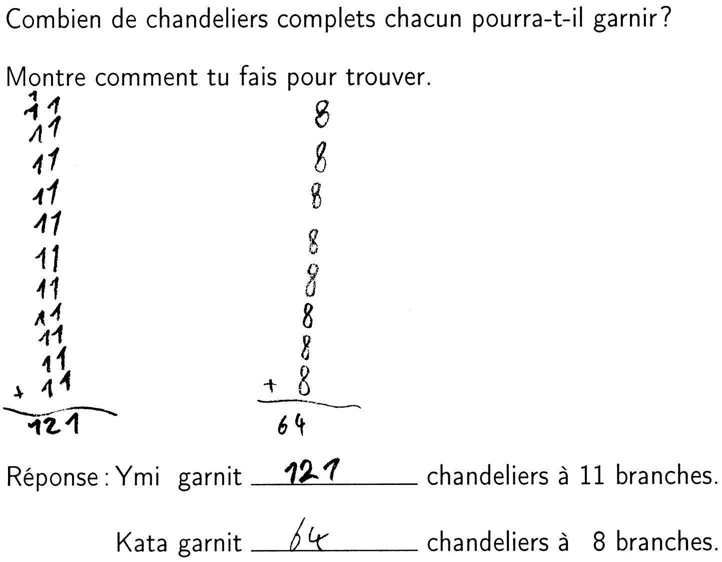
Une grande partie des erreurs viennent de ce que les élèves n'approchent pas vraiment le contexte pour en comprendre le sens. Ils ont vaguement l'intuition de l'aspect multiplicatif du problème ou rattachent celui-ci à la classe des situations multiplicatives, mais ne peuvent mener la tâche à son terme. C'est pourquoi on trouve beaucoup de calculs consistant à multiplier deux données : 8×11 ou, plus encore, à multiplier 8 et 11 par 100.

Ainsi on constate qu'en fin de 4P, certains concepts relatifs à la multiplication sont en phase de construction et n'ont pas encore atteint la réversibilité. En tout cas, pour plus de la moitié des élèves, le partage ou la distribution, même en acte, ou encore la notion de multiple, ne constituent pas un moyen efficace pour résoudre des problèmes. Tout se passe comme si ces notions n'étaient pas coordonnées les unes aux autres, même partiellement, pour former la structure multiplicative ou le champ multiplicatif (figure 3.3).

3.5.2 Les puces

Nous classons aussi dans les problèmes de partage *Les puces*. La notion de puissance n'étant pas encore au programme, c'est celle de moitié qu'on devrait trouver et la démarche attendue est la répétition du partage par deux. Une des

FIGURE 3.3 – *Traces laissées par un élève lors de la résolution du problème* Chandelles et chandeliers.



Combien de chandeliers complets chacun pourra-t-il garnir?

Montre comment tu fais pour trouver.

11	8
11	8
11	8
11	8
11	8
11	8
11	8
+ 11	+ 8
11	
11	
11	
121	64

Réponse : Ymi garnit 121 chandeliers à 11 branches.

Kata garnit 64 chandeliers à 8 branches.

difficultés réside dans la grandeur des nombres et il sera intéressant d'observer les démarches de partage de ces nombres. Une autre est relative à la notion de temps et à celle d'intervalles temporels.

> Le pharmacien adore son chien. Il aime aussi les puces de son chien. Régulièrement il les compte. Aujourd'hui, il en a dénombré 4096. Il y a dix jours, il y en avait la moitié, soit 2048. Il y a 20 jours, il y en avait 1024. Le nombre de puces double systématiquement en 10 jours. Il y a 30 jours, combien y avait-il donc de puces sur le chien du pharmacien ? Depuis combien de temps les deux premières puces vivent-elles sur le dos du chien du pharmacien ?

Le problème *Les puces* donne lieu à des démarches très intéressantes qui couvrent souvent toute la page et plus encore. La quantité de traces est relative à la complexité du problème et de la tâche demandée ainsi qu'à la forte charge cognitive que celle-ci suppose. Les deux questions sont emboîtées en ce sens que la première induit la démarche. 57% des élèves sont capables de trouver la moitié de 1024 mais seulement 19% arrivent correctement au bout des partages. Il est difficile de savoir comment s'y sont pris les élèves pour diviser par deux lorsqu'ils ne notent pas explicitement les divisions. Certaines réponses permettent toutefois de mettre le doigt sur les erreurs lorsqu'ils procèdent par calcul réfléchi. Par exemple, la moitié de 512 donne pour certains 206. Et comme la moitié de 206 est 103, les réponses suivantes traduisent l'embarras à traiter le partage de la demie ($103 \rightarrow 51\frac{1}{2}$ ou $512 \rightarrow 256 \rightarrow 127 \rightarrow 63\frac{1}{2}$). Beaucoup de traces provenant de calculs effacés indiquent le tâtonnement suivant :

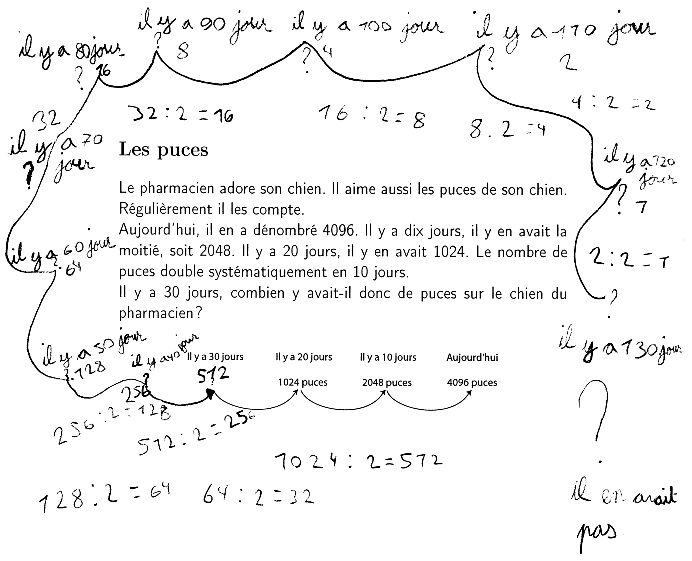
deux nombres sont additionnés jusqu'à obtenir la somme voulue, par exemple $512 + 512 = 1024$, puis $256 + 256 = 512$, etc.
La plupart des démarches représentées consistent en une série de nombres reliés entre eux par des traits ou des flèches, d'autres en tableaux qui mettent en relation le nombre de puces et le nombre de jours. Les élèves qui procèdent par suite de nombres de puces doivent ensuite dénombrer les jours. Certains élèves donnent la liste complète des nombres de 512 à 2 mais dénombrent ensuite incorrectement le nombre de jours. C'est ce qui permet de comprendre la difficulté que représentent les intervalles temporels. Cette remarque renvoie à l'analyse des résultats au problème *Convoi de menhirs* (p. 65). De plus, l'élève ne doit pas oublier de donner du sens lorsqu'il compte les intervalles car chaque saut représente non pas un mais dix jours (figure 3.4).
La primauté de l'addition affecte beaucoup de démarches. Certes, l'addition de deux termes équivalents remplace la multiplication par deux, ce qui est fort acceptable. Mais on observe souvent des élèves qui enlèvent un nombre de jours au nombre de puces. On constate que le sens même de l'addition n'est pas acquis puisque ces élèves additionnent (ou soustraient) des éléments appartenant à des ensembles de nature différente.

3.6 Utiliser des rudiments de combinatoire

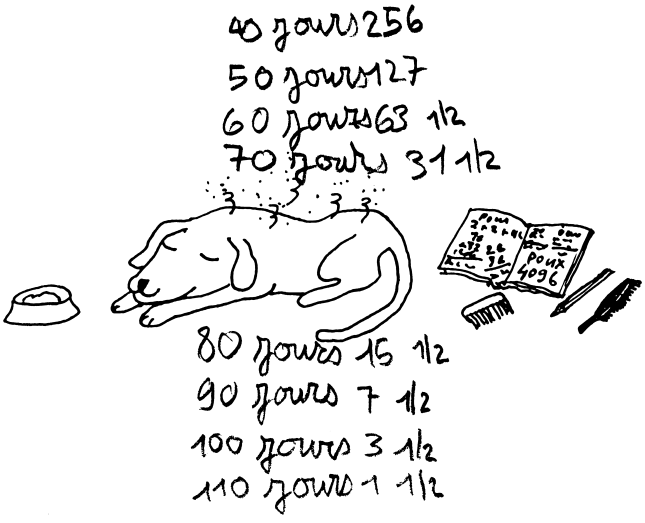
La combinatoire constitue un vaste champ à l'intérieur du champ mathématique de la multiplication mais aussi dans celui des structures logico-mathématiques appartenant au développement de la pensée et servant même de méthode à proprement parler du raisonnement hypothético-déductif. C'est dire à quel ensemble structurel et fonctionnel important et délicat, long à construire et plus long encore à maîtriser nous avons affaire. C'est pourquoi, s'il est encore un peu prématuré en fin de 4P de parler de compétence lorsqu'il s'agit de combinatoire, l'on peut s'attendre à ce que certaines connaissances de ce domaine soient déjà acquises par les élèves, telles qu'un produit cartésien ou l'ensemble exhaustif de combinaisons portant sur un petit nombre d'éléments. Dans ce dernier cas, des activités sont proposées dès la 2P aux élèves, pour lesquelles il s'agit alors de trouver le maximum de possibilités sans pour autant en exiger l'exhaustivité. Sur le plan mathématique, la combinatoire recouvre un ensemble d'opérations différentes qui permettent de calculer des situations diversifiées comme, par exemple, des combinaisons d'éléments pris n à n, des arrangements ou des permutations.

FIGURE 3.4 – *Traces laissées par deux élèves lors de la résolution du problème* Les puces.

a)



b)



3.6.1 Les cahiers de Jean

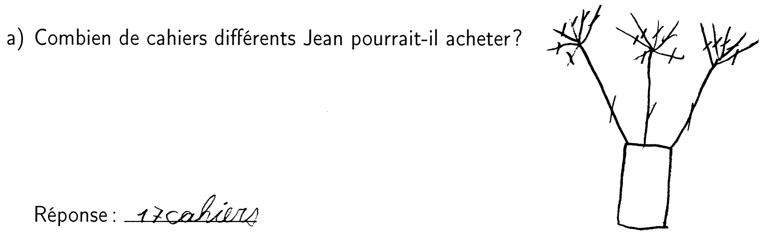
Quel que soit le type particulier de combinatoire, tout commence par la formation d'un couple, notion de base de la multiplication. Le produit cartésien est l'ensemble des couples formés à partir des éléments de deux ensembles. Son intérêt est considérable dans l'apprentissage de la multiplication : il offre l'occasion de chercher tous les couples différents possibles, et pas seulement

leur nombre. Il permet d'attirer l'attention sur l'aspect ensembliste de la multiplication. Enfin, sa construction joue sur l'action de l'apprenant : la mise en relation.
Ce sont plutôt les anciens moyens qui insistaient sur le produit cartésien, les nouveaux, quant à eux, préfèrent une approche plus diversifiée de la multiplication.

> Jean entre dans une papeterie pour acheter un cahier. On lui en présente des minces, des épais et des moyens. Il a encore le choix entre des couvertures jaunes, rouges, vertes, bleues, grises et brunes.
>
> a) Combien de cahiers différents Jean pourrait-il acheter ?
>
> b) Combien de cahiers différents peut-il acheter, si chaque cahier existe en 3 grandeurs ?
>
> c) Dans un autre magasin, on lui présente 40 cahiers différents. Peux-tu imaginer combien il y a de couleurs ? de grandeurs ? d'épaisseurs ?

Pour répondre à la question *a)*, il s'agit de faire correspondre chacune des trois épaisseurs avec chacune des six couleurs. Comme toutes les qualités sont décrites, l'élève peut recourir au dessin ou aux listes, au schéma sagittal ou à l'arbre de classement. Ce genre de démarche, qui ne requiert pas d'emblée un calcul, est favorisé par le fait que l'énoncé ne stipule pas le nombre des éléments relatifs à une qualité. Par exemple, les couleurs sont énumérées, ainsi que les épaisseurs, mais il incombe à l'élève d'en définir le cardinal.
La troisième question est différente : elle donne le nombre de cahiers et sa résolution suppose des opérations logiques inverses à celles des deux premières. Si l'élève formé avec les anciens moyens reconnaissait d'emblée le type de problème, relatif au produit cartésien, comme l'est *Les cahiers de Jean*, celui de notre échantillon doit vraiment entrer dans la problématique de la combinatoire. Parmi les 64% des élèves qui explicitent leur démarche, 61% donnent la réponse correcte à la question *a)*. Comme on pouvait s'y attendre, on relève des démarches par addition $(3 + 6)$, les élèves n'opérant pas la différenciation additif/multiplicatif. Peut-être n'ont-ils pas eu l'occasion de construire la différence entre des actions de réunion et des actions de mise en relation. Parmi les représentations correctes et exhaustives qui permettent la réussite, on trouve des schémas reliant chaque épaisseur à chaque couleur. Mais beaucoup d'élèves qui pensent à utiliser ces modes de représentation ne les mènent pas à terme ou ne savent pas en lire le produit (figure 3.5).
La question *b)* comporte beaucoup d'implicite. C'est à l'élève que revient la charge de comprendre qu'elle n'est que la suite de la précédente, en ajoutant encore un critère : la grandeur. L'obstacle était-il trop grand ? Seuls 23% des élèves interrogés ont répondu correctement. En ce qui concerne les représentations, on observe que les élèves reprennent celles qu'ils ont créées pour *a)* ou, que le plus souvent, ils multiplient seulement le produit déjà obtenu par trois. L'erreur principale consiste à répondre 18 comme pour la question précédente. Certains ont multiplié 6 par 3, l'erreur résidant à la question *a)*. Quant aux

FIGURE 3.5 – *Traces laissées par un élève lors de la résolution du problème* Les cahiers de Jean.



autres, peut-être ont-ils confondu épaisseur et grandeur, ou encore ont-ils redistribué les couleurs juste avec ces trois grandeurs, sans tenir compte des trois épaisseurs.
La question *c)* impose des opérations logiques ou arithmétiques inverses de celles qu'il convenait d'utiliser pour *a)* et *b)*. La réversibilité d'une opération peu maîtrisée constitue un véritable obstacle. C'est ainsi que beaucoup d'élèves, ayant choisi d'effectuer une décomposition, opèrent par addition et non par multiplication. 14% répondent par exemple : 10, 10, 20 ou 15, 15, 10 (c'est-à-dire : $10 + 10 + 20 = 40$ ou $15 + 15 + 10 = 40$).
La même proportion d'élèves, environ (19%), opèrent par multiplication et décomposent correctement 40 en $10 \times 2 \times 2$ et les autres en $2 \times 4 \times 5$.

3.6.2 Repas de fête

Cette forme de combinatoire où l'on recherche tous les cas possibles est aussi illustrée par un problème créé spécialement pour Mathéval : *Repas de fête*.

La maman de Madeleine n'a pas beaucoup d'imagination. Pour les grandes occasions, elle compose toujours le menu en choisissant une entrée, un plat principal et un dessert.
Elle choisit :

POUR L'ENTRÉE	POUR LE PLAT PRINCIPAL	POUR LE DESSERT
Terrine ou Crevettes ou Saumon	Gigot d'agneau ou Filets mignons	Glace vanille-fraise ou Salade de fruits ou Crème caramel

Combien de menus différents peut-elle ainsi composer ?

Rien de nouveau toutefois dans cette sorte de problème, rechercher l'ensemble de tous les menus possibles est aussi courant dans les nouveaux que dans les anciens moyens.

La situation est proche de la deuxième question du problème *Les cahiers de Jean*, sauf que l'étape intermédiaire n'apparaît pas. On a directement les éléments de trois ensembles à combiner.
Contrairement au problème *Les cahiers de Jean*, *Repas de fête* semble poser moins de difficulté aux élèves, quoique la réussite ne concerne guère encore qu'un élève sur deux (49%). D'une part, la présentation du problème est plus explicite et les nombres d'éléments un peu plus petits ($3 \times 2 \times 3$ contre $3 \times 6 \times 3$), d'autre part ce genre de problème existe dans les moyens d'enseignement. Les démarches sont variées et réparties de façon presque égale : 26% recourent directement au calcul ($3 \times 2 \times 3$), 23% dressent une liste et 20% dessinent un arbre de classement. L'erreur la plus fréquente (12%) consiste à additionner les éléments au lieu d'opérer une combinatoire. Il existe aussi des procédures mixtes où les éléments des deux premiers ensembles sont combinés (3×2) puis le produit obtenu est additionné au cardinal du troisième ensemble ($3 \times 2 = 6$; $6 + 3 = 9$).

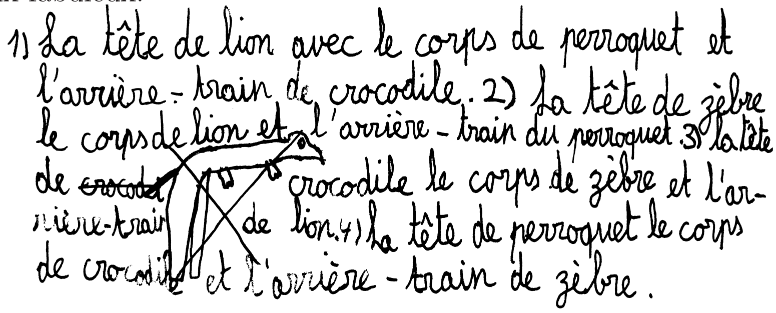
3.6.3 Animaux fabuleux

> Pour fabriquer un animal fabuleux, il faut choisir une tête, un corps et un arrière-train. Les trois parties d'un animal fabuleux proviennent toujours d'animaux d'espèces différentes. Tu disposes de lions, de perroquets, de crocodiles et de zèbres. Combien d'animaux différents peux-tu créer ?

Animaux fabuleux est un problème dont la formulation mathématique est très complexe. Il s'agit de former tous les arrangements sans répétition de trois éléments choisis dans un ensemble de quatre. Or le nombre d'arrangements A_p^n de p objets choisis dans un ensemble de n objets est égal à $A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$ où $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$. Dans le cas de notre problème, le nombre d'animaux formés d'une tête, d'un corps et d'un arrière-train provenant d'un lion, d'un perroquet, d'un crocodile ou d'un zèbre est égal à $A_3^4 = \frac{4!}{1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$. Bien évidemment, les élèves de 4P ne sont pas capables d'un tel degré de formalisation, et d'ailleurs il n'y a nul besoin de l'atteindre pour résoudre ce problème. Toutefois, la plupart des démarches pour résoudre correctement ce problème se mathématisent par $4 \times 3 \times 2$. *Animaux fabuleux* appartient à cette espèce de problèmes dont la résolution est possible à des degrés très divers, chacun de ces degrés pouvant être mathématisé.
Ce type de combinatoire consiste en quelque sorte en un découpage du produit cartésien. Dans *Repas de fête*, on a trois ensembles : entrée, plat principal, dessert, avec respectivement 3 puis 2 puis 3 éléments différents. On combine tous les éléments des deux premiers ensembles (entrée et plat principal). Puis on combine les éléments de ce nouvel ensemble (ensemble produit) par ceux du troisième ensemble (dessert). Sur le plan arithmétique, cela donne $3 \times 2 = 6$ puis $6 \times 3 = 18$. Dans *Animaux fabuleux*, on a aussi 3 ensembles : tête, corps, arrière-train et 4 mêmes éléments par ensemble. On devrait avoir $4 \times 4 \times 4$

animaux fabuleux si la contrainte de la consigne ne précisait : « Les trois parties d'un animal fabuleux proviennent toujours d'animaux d'espèces différentes. » Il s'agit donc d'éliminer toutes les combinaisons qui ont deux ou trois éléments communs : d'abord, il y a 4 combinaisons avec les animaux qui ont trois parties de la même espèce (*aaa*, *bbb*, *ccc*, *ddd*), ce sont les 4 animaux réels. Ensuite, il y a les 12 combinaisons présentant une tête et un corps de la même espèce (*aab*, *aac*, *aad*, *bba*, *bbc*, *bbd*, *cca*, *ccb*, *ccd*, *dda*, *ddb*, *ddc*). Puis il y a les 12 animaux qui auraient le corps et l'arrière-train d'une même espèce (*baa*, *caa*, *daa*, *abb*, *cbb*, *dbb*, *acc*, *bcc*, *dcc*, *add*, *bdd*, *cdd*). Enfin, il reste à enlever les 12 combinaisons formant des animaux avec une tête et un arrière-train de la même espèce (*aba*, *aca*, *ada*, *bab*, *bcb*, *bdb*, *cac*, *cbc*, *cdc*, *dad*, *dbd*, *dcd*). On obtient bien $64 - 4 - 12 - 12 - 12 = 24$.
Cet exemple met bien en évidence que tout découpage engendre des difficultés supplémentaires par rapport à la notion de base, les arrangements comportant plus de difficultés à surmonter que le produit cartésien.
Comme pour plusieurs problèmes de Mathéval, il est dommage que les élèves essaient de résoudre *Animaux fabuleux* par un calcul, même s'il s'agit, chez 31% d'entre eux, d'une multiplication. Il y a néanmoins 22% des élèves qui établissent une liste, 14% qui dessinent, et 8% qui utilisent un arbre de classement. Quel que soit le moyen de représentation ou de calcul, seuls 5% trouvent la réponse correcte.
Presque un élève sur trois trouve 12 au lieu de 24, et 17% des élèves ne recourent pas à la combinatoire : ils se contentent de 4 animaux fabuleux, ce qui correspond aux quatre têtes différentes (figure 3.6).

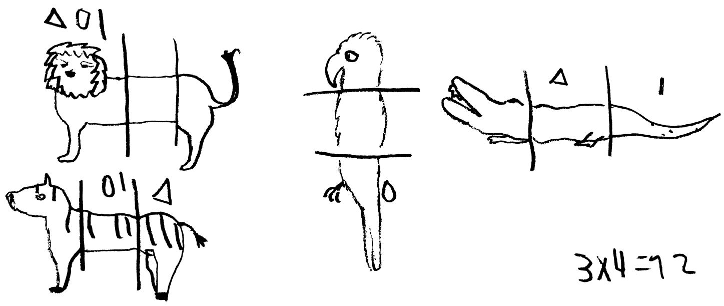
FIGURE 3.6 – *Traces laissées par un élève lors de la résolution du problème* Animaux fabuleux.



La situation de cette évaluation ne permet malheureusement pas de relancer ces élèves en leur proposant un cinquième arrangement pour voir s'ils en chercheraient d'autres. À l'autre extrême, quelques élèves établissent toutes les combinaisons à la manière d'un produit cartésien ($4 \times 4 \times 4$).
La réponse 12 est obtenue de manières diverses, la plupart des élèves se contentant de donner le calcul $3 \times 4 = 12$. Certains commencent par représenter la situation et font des tableaux ou des bouts de listes. C'est ainsi qu'on peut

suivre ça et là un raisonnement. Par exemple, l'élève comprend qu'il y a 4 animaux dont chacun présente 3 parties. Il opère alors la multiplication 3×4 comme dans la figure 3.7

FIGURE 3.7 – *Traces laissées par un élève lors de la résolution du problème* Animaux fabuleux.



D'autres élèves arrivent à 12 par le biais d'un arbre de classement : 4 branches étiquetées avec le nom d'un des quatre animaux puis chacune des branches est prolongée par trois petites branches. Cet arbre est donc correct mais incomplet. D'autres types d'arbres en revanche donnent aussi 12 combinaisons mais de manière erronée, dont celle qui consiste à dessiner trois branches étiquetées : tête, corps et arrière-train, suivies chacune de quatre branches portant la mention des quatre animaux.
Parmi les réponses correctes, on trouve des représentations en tableau. Par exemple, l'élève établit les combinaisons pour un animal puis multiplie le nombre de combinaisons obtenu par 4.

Tête	**Corps**	**Arrière**
lion	crocodile	perroquet
lion	crocodile	zèbre
lion	perroquet	crocodile
lion	perroquet	zèbre
lion	zèbre	crocodile
lion	zèbre	perroquet

$6 \times 4 = 24$

3.7 Calculer une aire rectangulaire

3.7.1 Le manteau de Sherlock Holmes

Cette approche de la multiplication s'apparente à celle de la mesure d'aire : une figure rectangulaire comportant une ou plusieurs parties est divisée en petits carrés unités. Le dénombrement de ces petits carrés s'effectue grâce à diverses démarches dont la plus simple, la plus courante, mais pas toujours la plus efficace, est le comptage.

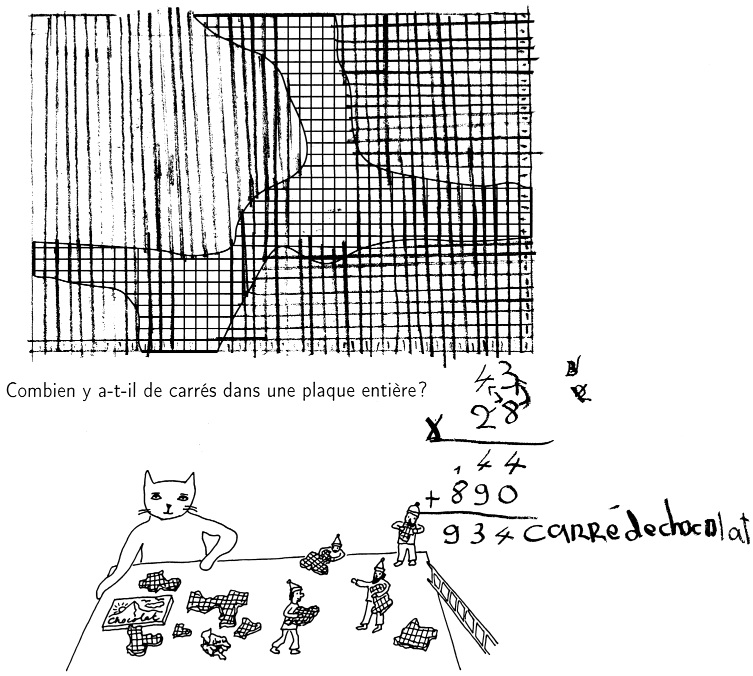
On peut supposer que, mis à part le comptage par pointage des carrés, la plupart des élèves calculent le nombre de carrés de la partie supérieure, puis l'ajoutent au nombre de carrés de la partie inférieure (p. 193).
Une difficulté relative à ce problème réside dans le grand nombre de carrés. C'est justement cette difficulté qui devrait conduire les élèves à trouver d'autres conduites que le dénombrement par pointage.
Le manteau de Sherlock Holmes n'offre pas un très bon score (37%), malgré la possibilité de dénombrer les carrés unité par comptage, avec ou sans pointage ; ce qui met bien en évidence qu'une démarche élémentaire n'est pas toujours le meilleur gage de réussite. Il faut relever que ces conduites, d'après ce que nous pouvons observer, sont très souvent doublées d'une autre démarche. C'est ainsi qu'on observe plus de 90% des figures qui portent des traces de comptage, pointage ou coloriage. Mais on relève aussi que 78% des élèves laissent des traces de multiplication et 82% ont visiblement découpé le manteau en rectangles.
Presque deux tiers des élèves découpent le manteau en deux ou plusieurs rectangles, puis procèdent à des multiplications mais aussi à diverses formes de comptages, ce qui éclaire la difficulté de la tâche. La mesure d'aire n'en est qu'à ses débuts en 4P et constitue une réelle difficulté jusqu'en 7^{e}. De plus, si les élèves découpent le manteau en deux rectangles et en mesurent correctement les dimensions, encore doivent-ils réussir les multiplications.

3.7.2 Le chocolat des lutins

Un deuxième problème similaire, du moins en apparence, rend la démarche de comptage inopérante. Le rectangle dont il faut estimer l'aire, exprimée sous forme de nombre de carrés unités, n'offre qu'une toute petite partie pouvant servir de base à la mesure de ses dimensions.
L'approche de la situation-problème *Le chocolat des lutins* (p. 192) est très différente de la précédente puisque les dimensions du rectangle doivent être cherchées. Le dénombrement des carrés définissant la hauteur puis la largeur donne quasiment le même résultat : 57% des élèves parviennent à trouver qu'il y a 29 carrés en hauteur (avec encore 13% environ qui se trompent de plus ou moins une unité) et 56% qui dénombrent les 43 carrés de largeur (avec 17% qui trouvent un carré de plus ou de moins). La démarche n'est pas simple pour éviter de recompter plusieurs fois un carré, ou pour ne pas en oublier. Elle relève de ce que les didacticiens appellent parfois : déplacement dans le quadrillage. Cette technique faisait l'objet d'un apprentissage dans les anciens moyens et sa maîtrise n'était pas attendue avant la 5^{e}.
La démarche la plus couramment observée est le dessin de la plaque entière à partir de la portion présentée : 63% des élèves y recourent. Qu'ils redessinent ou s'en abstiennent, 81% effectuent des multiplications ou en laissent des traces.
30% des élèves opèrent la multiplication exacte de la largeur par la hauteur (29×43) et obtiennent la bonne réponse. Si on ajoute le pourcentage de ceux qui savent calculer cette aire mais qui se sont trompés un peu dans le dénom-

brement des deux dimensions, on peut dire qu'environ deux tiers des élèves de 4P savent comment calculer une aire rectangulaire (§ 3.15, p. 91). Il reste ensuite à réussir la part algorithmique des opérations (figure 3.8).

FIGURE 3.8 – *Traces laissées par un élève lors de la résolution du problème* Le chocolat des lutins.



3.8 Utiliser des proportions

La notion de proportion est acquise tardivement car elle s'appuie non seulement sur des schèmes de partage équivalent et d'opérations telles que prendre la moitié, le tiers, le double, etc. mais surtout parce que, au plan strictement mathématique, elle se fonde sur celle de rapport. C'est pourquoi, bien que les activités de proportionnalité soient proposées aux élèves dès l'école primaire, l'apprentissage de cette notion va bien au-delà et constitue un point fort de la 7^{e}.

Alors que les *petits* problèmes multiplicatifs (§ 3.4.1) jouent sur chacun des trois facteurs de l'équation $a \times b = c$, les activités qui portent sur les proportions nécessitent d'établir des relations entre quatre quantités $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

3.8.1 La fondue

> Pour faire de la fondue, il faut 250 grammes de fromage et 1 décilitre de vin blanc par personne. Pour un enfant, on compte la moitié. Pour 5 adultes et 4 enfants quelles quantités de fromage et de vin faut-il ?

Établir deux proportions, une qui concerne la quantité de fromage en relation avec le nombre de personnes et une autre, relative à la quantité de vin par rapport au nombre de personnes, distinguer ensuite entre ces proportions suivant qu'il s'agit d'adultes ou d'enfants, puis réunir enfin tous ces résultats, font de cette situation un problème assez consistant. Ce qui est de l'ordre des proportions n'est pas trop difficile puisque les quantités sont données pour une unité (un adulte ou un enfant), et que les coefficients de proportionnalité sont assez simples. En revanche, cette situation est relativement complexe en ce qui concerne la capacité de trier puis d'organiser les nombreuses données.
Sur le plan arithmétique, l'élève doit saisir que le rapport qui existe entre 1 et 5, formulé par l'opérateur « $\times 5$ », doit être le même qui existe entre 250 et la quantité recherchée.
Il en va de même en ce qui concerne le rapport entre quantité de vin et nombre d'adultes puis entre chacune de ces quantités d'ingrédients et le nombre d'enfants.
La première question est résolue par 26% des élèves qui donnent une réponse correcte pour la quantité de fromage avec une unité correcte en grammes (quelques élèves opèrent le changement d'unité en kilo), et 39% qui donnent une réponse correcte pour la quantité de vin avec une unité correcte. Ce score augmente un peu (respectivement de 9% et de 7%) si l'on ne tient pas compte des unités.

3.9 Construire des fonctions

Une fonction est un processus qui consiste à faire correspondre à chaque élément d'un ensemble de départ un élément d'un ensemble d'arrivée et un seul. Une fonction numérique de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est représentée par une formule qui la décrit le plus brièvement possible. Trouver la formule qui définit une fonction constitue une compétence tardive qui suppose une compétence élevée de formalisation. Toutefois, sans atteindre cette performance, les élèves de l'école primaire sont amenés progressivement à trouver ce que l'on peut appeler une règle ou un opérateur, ou encore une *machine* suivant l'appellation contrôlée des anciens moyens d'enseignement. Celle-ci est découverte en essayant de comprendre ce qui relie deux séries d'éléments. La difficulté pour les élèves est de comprendre que la même règle doit s'appliquer à tous les éléments. Deux problèmes relatifs aux fonctions ont été proposés aux élèves de 4P : *Les devinettes de Kata* et *111 triangles*.

3.9.1 Les devinettes de Kata

Kata joue avec ses élèves sorcières. À partir de chaque nombre proposé par ses élèves, Kata effectue toujours les mêmes opérations arithmétiques. Voici quelques exemples :

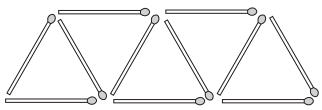
	Zoé dit :	10	Kata répond :	31
	Fifi dit :	4	Kata répond :	13
	Zaza dit :	3	Kata répond :	10
Complète :	a) Lulu dit :	5	Kata répond :	
	b) Irma dit :	100	Kata répond :	
	c) Zoé dit :	1	Kata répond :	
	d) Fifi dit :	0	Kata répond :	
	e) Irma dit :		Kata répond :	100

Les devinettes de Kata présente peu de difficulté en ce qui concerne l'approche du problème. La consigne est relativement inductrice en ce sens qu'elle précise qu'il s'agit d' « effectuer toujours les mêmes opérations ». Il y en a donc au moins deux. De plus, si le premier opérateur trouvé vaut +21 ($10 + 21 = 31$), il ne résiste pas à l'exemple suivant puisque $4 + 21$ n'égale pas 13. La conduite la plus simple semble consister à trouver ce qui rapproche 10 de 31 puis 4 de 13, et abandonner le recours à l'addition. Mais il est vrai que *saisir* l'augmentation multiplicative et préciser ensuite qu'elle vaut $\times 3$ nécessite une certaine maîtrise des tables de multiplication que la plupart des élèves de 4P ne possèdent pas encore. De plus, il faut avoir déjà le sens de l'approximation pour *lire* les multiples 30, 12 et 9 alors qu'il s'agit de 31, 13 et 10. Enfin, une autre difficulté tient sans doute au fait que les élèves n'ont pas tellement l'habitude de combiner deux opérations différentes pour créer un tel opérateur : $(x \times 3) + 1$. Une fois celui-ci trouvé, restait encore tout un lot d'obstacles à surmonter : la multiplication par 100 et par 1, celle du zéro qui annule la multiplication mais pas l'addition et, finalement le processus inversé où il faut commencer par soustraire avant de diviser.
Nous observons d'abord que la plupart des élèves n'ont pas été rebutés par *Les calculs de Kata* mais s'y sont engagés avec toutes sortes de procédures qu'il est malheureusement souvent difficile de retrouver.
Le fait que 42% des élèves répondent correctement au premier item laisse supposer que pas loin de la moitié des élèves ont au moins pressenti l'aspect multiplicatif des devinettes. Mais il est aussi intéressant d'observer le manque de stabilité de cette intuition : ayant bien dû opérer par multiplication pour obtenir 16 à la question *a)*, certains élèves ont écrit +11 sur la question et ont continué à répondre en opérant par addition.
Les autres questions ne sont pas tellement moins réussies malgré les difficultés supplémentaires : 39% savent multiplier par 100 ; 42% ne sont pas gênés par l'unité, 39% surmontent l'obstacle du zéro et 31% sont capables de retrouver l'inverse. Enfin, quasiment un élève sur quatre répond correctement à l'ensemble des items.
Parmi les erreurs, on constate une absence de différenciation entre les propriétés du 1 et du 0 par rapport à l'opération. Certains élèves, qui répondent 4 au

troisième item : $(1 \times 3) + 1 = 4$, donnent la même réponse à l'item suivant alors que le 0 remplace le 1. D'autres enfin, ayant trouvé la fonction, surmonté les différents obstacles, butent sur l'inverse et commencent par la division : $(100 : 3) - 1$ au lieu de $(100 - 1) : 3$.

3.9.2 111 triangles

Pour former cette suite de 5 triangles, il a fallu 11 allumettes. Combien faut-il d'allumettes pour former une suite de 111 triangles ?



111 triangles est encore plus complexe que *Les devinettes de Kata* car l'élève ne dispose pas de deux ensembles numériques. Il a un dessin et une consigne, et c'est à lui d'organiser les ensembles à partir de ces données, avant de pouvoir trouver l'opérateur-fonction. Ce problème s'apparente à un travail de recherche. C'est pourquoi son approche requiert de reconstruire mentalement la formation de la figure proposée, de comprendre qu'il y a d'abord un premier triangle formé, par définition, de trois allumettes, puis un deuxième qui n'en comporte pas trois mais deux, la troisième allumette du premier triangle servant de premier côté au deuxième triangle.
Une des démarches les plus simples et cohérentes pour résoudre ce problème consiste à établir un tableau de deux ensembles de données : le nombre de triangles et le nombre d'allumettes. Ces listes établies, on peut les mettre en relation et trouver une fonction, comme c'est le cas pour *Les devinettes de Kata*.

Nombre de triangles	Transformation	Nombre d'allumettes
1	$(1 \times 2) + 1$	3
2	$(2 \times 2) + 1$	5
3	$(3 \times 2) + 1$	7
4	$(4 \times 2) + 1$	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
111	$(111 \times 2) + 1$	223

La situation *111 triangles* est menée à bien par 4% des élèves et près d'un élève sur cinq ne s'y est pas risqué. L'observation des réponses et des démarches met bien en évidence les principales difficultés de cette situation : son approche, sa représentation et son attribution à la classe de problèmes relatifs aux fonctions. Mais reconnaître un problème de fonction nécessite quelque habitude que visiblement peu d'élèves ont déjà eu l'occasion d'acquérir.
Heureusement, comme pour plusieurs autres problèmes de Mathéval, *111 triangles* peut être résolu sans atteindre ce niveau de connaissance. Les élèves qui

donnent la réponse correcte (223) ont des procédures qui prennent en compte la façon dont est constituée la série de triangles, ce qui révèle une jolie compétence à se représenter le problème et à le traduire sur le plan arithmétique.

Exemple 1 – *Le premier triangle a 3 allumettes, les autres 2.*
$110 \times 2 = 220$
$220 + 3 = 223$

Le raisonnement sous-jacent est donc le suivant : sur 111 triangles, 110 ne sont formés que de deux allumettes (soit déjà 220 allumettes), plus le premier qui en a 3 (soit $220 + 3$).

Exemple 2 – $111 \times 2 = 222$
$222 - 2 = 220$
$220 + 3 = 223$

Cette fois-ci le raisonnement doit être : si les 111 triangles étaient formés de 2 allumettes, on aurait 222 allumettes, mais le premier triangle n'étant pas formé de 2 allumettes, on les enlève ($222 - 2 = 220$), puis on ajoute les 3 allumettes qui constitue le premier triangle ($220 + 3 = 223$).
L'erreur la plus souvent observée vient d'élèves qui n'ont pas conscience de la façon dont est formée la série : d'abord 3 puis 2 allumettes. Ils multiplient donc 111 par 3 ou redessinent des triangles isolés, formés évidemment chacun de 3 allumettes.
Une autre erreur assez fréquente (environ 11%) et attendue est l'assimilation de *111 triangles* à un problème de (fausse) proportion : 11 allumettes donnent 5 triangles donc 55 allumettes (ou encore 555) donnent 111 triangles.

Exemple 3 – 55 triangles
111 allumettes
On n'a qu'à rajouter un 5 à 5 ce qui nous fait 55
On n'a qu'à rajouter un 1 à 11 ce qui nous fait 111

Exemple 4 – $5 \leftrightarrow 11$
$10 \leftrightarrow 22$ $\qquad 2200 + 22 + 11 = 2233$
$100 \leftrightarrow 2200$

Ainsi, sur le plan cognitif, la multiplication s'élabore parallèlement à l'addition mais, pour devenir instrumentale, elle doit se différencier de cette dernière pour que les deux opérations puissent ensuite se coordonner entre elles. On le constate, en 4P, cette différenciation commence seulement à s'opérer et pour beaucoup d'élèves, elle devrait être aidée par des situations propres à faciliter cette évolution. Les questions de Mathéval mettent bien en évidence cette difficulté et permettent de comprendre l'importance de situations-problèmes assez riches pour donner du sens à ces deux grands champs conceptuels.

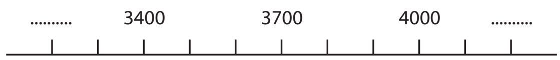
3.10 Modéliser des situations complexes

Les intentions de l'enseignement en mathématiques décrites dans le plan d'études romand soulignent l'importance de la résolution de problèmes. Celle-ci est

perçue comme moyen pour permettre l'exploration de notions et propriétés mathématiques diverses, l'acquisition de techniques et pour communiquer à l'aide d'un langage mathématique idoine les résultats. La résolution de problèmes devrait favoriser l'activité mathématique des élèves au-delà d'un seul champ notionnel. Pour apprécier leurs capacités à transcender les frontières d'un seul champ conceptuel, nous avons donc inclus dans notre épreuve quelques problèmes complexes chevauchant plusieurs domaines des mathématiques élémentaires.
Droite numérique et *Convoi de menhirs* font appel à la notion d'intervalle qui évoque aussi bien le numérique que le spatial. *Classe sportive* et *Menhir, menhir, ...* impliquent quant à eux l'articulation de connaissances relevant de la logique et du numérique.

3.10.1 Droite numérique

Les droites sont graduées régulièrement. Écris le nombre qui convient sur chaque pointillé. Voici une droite :



En voici une autre :

Droite numérique est un problème mathématique relativement complexe, qui pose le problème de la graduation. Pour résoudre un tel problème, les élèves doivent tenir compte de l'ordre de succession des points sur une droite et de l'intervalle qui les sépare, la contrainte voulant que deux marques successives soient équidistantes. Le calcul de l'intervalle entre deux marques semble plus facile dans le premier cas (écart de 300 à partager en trois intervalles de 100) que dans le second (écart de 600 à partager en quatre intervalles de 150).
Les résultats indiquent que le premier item est mieux réussi que le second. En effet, 56% des élèves parviennent à trouver les deux nombres recherchés sur la première droite, tandis que seuls 34% y parviennent sur la seconde droite.
Manifestement la graduation par 100 est plus facile que celle par 150 ; nous pouvons supposer que l'exercice des comptines par sauts de 10 ou de 100 pratiqué dans les classes est à l'origine de cette réussite. Les réussites partielles au premier item indiquent que 61% des élèves parviennent à trouver au moins un nombre correct. Dans plus de 25% des cas les réponses incorrectes sont 3100 et 4300 qui sont le résultat des calculs suivants : $3400 - 300$ et $4000 + 300$. Ces réponses constituent le résultat de la première opération à mener pour résoudre la question, c'est-à-dire le calcul de l'intervalle entre les nombres et laissent de côté le problème des graduations intermédiaires.

Dans le deuxième item, 46% et 48% des élèves parviennent à attribuer une valeur correcte respectivement soit au premier soit au deuxième nombre recherché et ainsi à trouver la valeur d'un écart (150) ou de deux écarts (300) qu'ils additionnent aux nombres donnés. Les autres réponses indiquent que pour plusieurs élèves, l'écart pourrait être le même que celui de l'item précédent.
D'autres élèves (6%) procèdent en établissant un intervalle de 200, et obtiennent ainsi deux nombres 4900 et 5700. Erreur de partage de l'intervalle 600, utilisation d'un intervalle plus usuel fixé à 100, par effet d'habitude scolaire (comptage de 10 en 10, de 100 en 100), nous ne pouvons pas nous prononcer. Toutefois, nous constatons que si la majorité des élèves maintiennent l'écart régulier qu'ils se sont fixé ou qu'ils ont trouvé, d'autres élèves n'y parviennent pas encore.
Les erreurs des élèves, ainsi qu'un taux relativement élevé de non-réponses montrent la complexité d'un tel problème. Les élèves ne semblent pas posséder les connaissances suffisantes pour parvenir à déterminer correctement les quatre nombres demandés. Nous constatons cependant que le calcul de l'intervalle entre deux bornes données est effectué, mais que la difficulté procède du partage de l'intervalle et de la compréhension de la graduation.

3.10.2 Convoi de menhirs

En Gaule, on ne mesurait pas les longueurs en mètres mais en pieds. Un convoi de menhirs constitué de 6 chariots roule sur la Via Gallia. Les chariots ont 8 pieds de long et la distance entre chaque chariot est de 50 pieds. Quelle est la longueur totale du convoi ?

Convoi de menhir peut paraître relativement simple à un adulte surtout s'il en fait un schéma. Mais sa résolution nécessite toutes sortes de connaissances que l'élève doit maîtriser, organiser et synthétiser. Il appartient certes aux problèmes relatifs à l'addition et à la multiplication, mais il s'apparente aussi aux problèmes de partition. Ici la partition consiste à diviser un espace précis, mesuré, en tenant compte des intervalles et des bornes. Ce sont ces notions qui en font une situation intéressante.
Il n'y a que 13% des élèves qui parviennent à résoudre ce problème. Ce faible score s'explique de façon évidente par l'absence de dessins et de schémas. À peine 15% des élèves y recourent. Dès lors, malgré des suites de calculs corrects, la longueur réelle du convoi n'est pas trouvée.
Un élève sur quatre recourt à des multiplications mélangeant les données et un sur sept (14%) additionne simplement les nombres trouvés dans l'énoncé. En ce qui concerne les 25% de réponses multiplicatives, on trouve : 8×50 (longueur d'un chariot multipliée par longueur d'un espace), 6×50 (nombre de chariots multiplié par longueur d'un espace), 6×8 (une des multiplications attendues mais non suffisante), $6 \times 8 \times 50$ (longueur totale des chars multipliée par longueur d'un espace).

Quatorze pour cent des élèves ne font qu'une erreur, laquelle concerne l'intervalle. Ils multiplient correctement la longueur d'un chariot par le nombre de chariots (8×6), produit auquel ils additionnent la longueur totale des intervalles. Mais ils en comptent 6 et non 5, erreur qui aurait peut-être été évitée s'ils avaient fait un schéma de la situation.

Passons maintenant à la présentation des deux problèmes qui combinent logique et numération.

3.10.3 Classe sportive

> Dans une classe de 25 élèves, tous pratiquent la natation ou le ski. 14 d'entre eux savent skier ; 15 d'entre eux savent nager. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe qui savent à la fois nager et skier ?

Classe sportive comporte deux sous-ensembles dont les éléments respectifs sont les élèves qui nagent N et les élèves qui skient S. La question porte sur le cardinal de l'intersection $N \cap S$.
En ce qui concerne ce problème, 59% des élèves donnent la réponse correcte. Sur l'ensemble des élèves qui ont répondu, plus de 70% présentent au moins un calcul et seulement 8% s'aident d'un dessin.
La démarche correcte la plus couramment observée consiste en deux opérations : $14 + 15 = 29$ puis $29 - 25 = 4$.
C'est souvent la double appartenance de certains éléments qui fait obstacle. Voici, à ce sujet, les remarques de deux élèves :

> **Exemple 1** – *Il ne peut pas y avoir* 29 *élèves dans une classe qui en compte* 25 *!*
>
> **Exemple 2** – *Zéro parce qu'ils ne peuvent pas nager en même temps que skier.*

3.10.4 Menhir, menhir, ...

> Wirki et son frère Korwo ont taillé, avec leur père Barba, 60 menhirs en tout pour le village voisin. Les deux frères en ont taillé 48 tandis que Wirki et son père en ont taillé 33. Combien de menhirs chacun a-t-il taillés ?

Menhir, menhir, ... comporte trois sous-ensembles et on connaît le cardinal de leur réunion. La question porte sur le cardinal des sous-ensembles.
Définissons par B la collection de menhirs fabriqués par Barba, par W celle de Wirki, et par K celle de Korwo.
L'énoncé stipule que 48 menhirs appartiennent à $W \cup K$, 33 à $W \cup B$ et 60 à $W \cup K \cup B$. Autrement dit :

$|W \cup K| = 48$ $\qquad$ $|W \cup B| = 33$ $\qquad$ $|W \cup K \cup B| = 60$

Soient b le nombre de menhirs taillés par Barba, w le nombre de menhirs taillés par Wirki et k le nombre de menhirs taillés par Korwo, le problème peut se résoudre de la manière suivante :

1. $w+b+k = 60$ et $w+k = 48$, donc $b = (w+b+k)-(w+k) = 60-48 = 12$;
2. $w + b = 33$, ainsi $w = 33 - b = 33 - 12 = 21$;
3. finalement $k = 60 - w - b = 60 - 12 - 21 = 27$.

Menhir, menhir, ... est l'un des problèmes les plus difficiles de notre épreuve, aussi ne sommes-nous pas surpris du faible taux de réussite. Nous avons tout de même 5% de génies mathématiques en Suisse romande !
Une des conduites très souvent rencontrées consiste à assimiler ce casse-tête à un partage mais un partage partiellement équivalent. Normal, il s'agit d'une histoire de famille ! Les enfants consentent bien à différencier la part du père de celles des fils mais pas celles des deux fils. Un énoncé plus réservé quant aux liens familiaux aurait permis d'autres résultats. Est-ce dire qu'il faut vider les problèmes mathématiques de contenus affectifs ? Enseignants, didacticiens et créateurs de tests en oublieraient une loi fondamentale : à 9-10 ans, on ne sait pas abstraire totalement les données indispensables, on ne sait pas encore vraiment décontextualiser. Voici quelques exemples de réponse :

> **Exemple 1** – *Les deux frères ont taillés* 48 *menhirs, donc chacun* 24. *Et le père* 33.
>
> **Exemple 2** – $48 + 12 = 60$ *donc le père en taille* 12 *et chaque frère* 24.
>
> **Exemple 3** – $60 - 48 = 22$ *; donc chaque fils en taillent* 33 *et le père* 22.

3.11 Décrire et reproduire des figures

Voyons, d'une part, si les élèves de 4P connaissent le vocabulaire de base de la géométrie et, d'autre part, s'ils sont capables de l'utiliser à bon escient. Pour ce faire, nous analyserons les réponses des élèves à quatre problèmes qui sont *Solide* (p. 205), *Prisme* (p. 206), *Lettre à Élise* (p. 201) et *Allô ! Allô !* (p. 203). Les deux premiers nous permettront de savoir si les élèves connaissent quelques termes spécifiques que l'on utilise généralement pour décrire un solide. À travers les réponses au troisième problème, nous verrons dans quelle mesure les élèves réussissent à reproduire un arrangement de figures dont on fournit la description. Le dernier problème nous renseignera sur la capacité des élèves à décrire suffisamment précisément un dessin géométrique de telle sorte qu'on puisse le reproduire sans l'avoir vu.

3.11.1 Solide

Ce problème n'évalue pas exclusivement le vocabulaire géométrique. Pour en donner la solution, il faut, dans un premier temps, comprendre que le dessin

de l'objet d'étude est une projection cavalière d'un parallélépipède rectangle. Cet obstacle dépassé, il est alors possible de compter les faces, les arêtes et les sommets du parallélépipède pour autant que l'on sache ce qu'est une face, une arête ou un sommet. De bons dénombrements sont donc le signe de la connaissance du sens de ces termes.
Ainsi, 66% des élèves au moins savent ce qu'est une face, 54% savent ce qu'est une arête et 69% savent ce qu'est un sommet. Conjointement, plus de 41% des élèves savent ce que sont une face, une arête et un sommet.

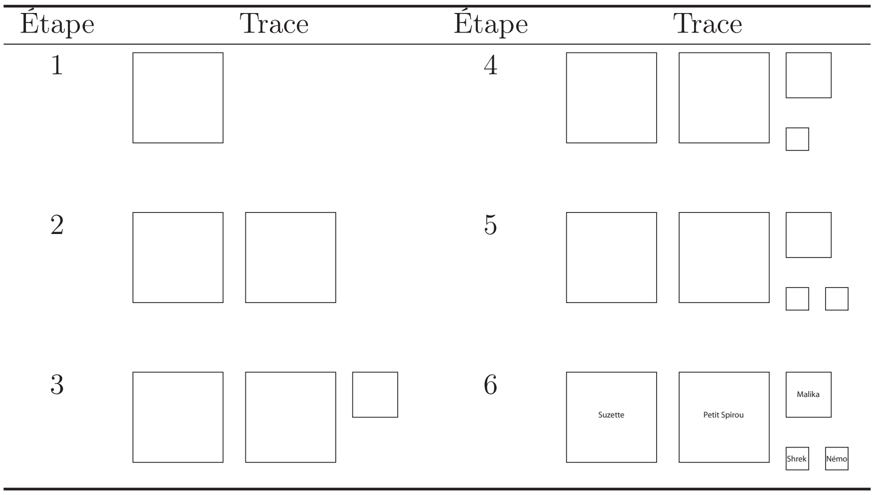
3.11.2 Prisme

Ce problème est similaire à *Solide*. Pour y répondre correctement, il faut savoir initialement décrypter la représentation qui est faite de l'objet à caractériser et reconnaître un prisme droit à base triangulaire à travers sa projection cavalière. 67% des élèves de 4P le font et dénombrent correctement les faces de ce prisme. 48% en dénombrent correctement les arêtes et 64% en dénombrent correctement les sommets. Ils sont 34% à répondre convenablement aux trois questions.
Ainsi, globalement, deux élèves sur trois savent ce que sont une face ou un sommet d'un solide, mais il n'y a plus qu'un élève sur deux qui sait ce qu'est une arête.

3.11.3 Lettre à Élise

Dans ce problème, il est demandé de dessiner l'agencement de plusieurs figures dont on définit successivement la position, la forme et les dimensions. Les étapes de la résolution de ce problème sont schématisées dans la figure 3.9.
La première étape consiste à placer en haut à gauche du quadrillage mis à disposition un carré de côté quelconque L. 55% des élèves réalisent cette première étape. La deuxième étape consiste à placer à droite du premier carré un autre carré de mêmes dimensions que le premier, les côtés supérieurs des deux carrés peuvent ne pas être alignés. 47% des élèves franchissent avec succès les deux premières étapes. La troisième étape consiste à tracer un carré de côté égal à la moitié du côté des deux premiers ; la longueur du côté de ce carré est donc $L/2$. Une contrainte supplémentaire exige que le bord supérieur de ce troisième carré soit aligné avec le bord supérieur du deuxième carré. 18% des élèves franchissent glorieusement cette troisième étape. La quatrième étape consiste à dessiner sous le troisième carré un nouveau carré de côté $L/4$. 11% des élèves arrivent à ce point sans accroc. La cinquième étape consiste à placer un dernier carré de côté $L/4$ à côté du quatrième carré. Quasiment tous les élèves qui franchissent la quatrième étape franchissent aussi la cinquième avec succès. La sixième et dernière étape consiste à étiqueter les cinq carrés. 6% des élèves seulement arrivent à ce stade et résolvent donc impeccablement le problème.

FIGURE 3.9 – *Étapes de la résolution du problème* Lettre à Élise.



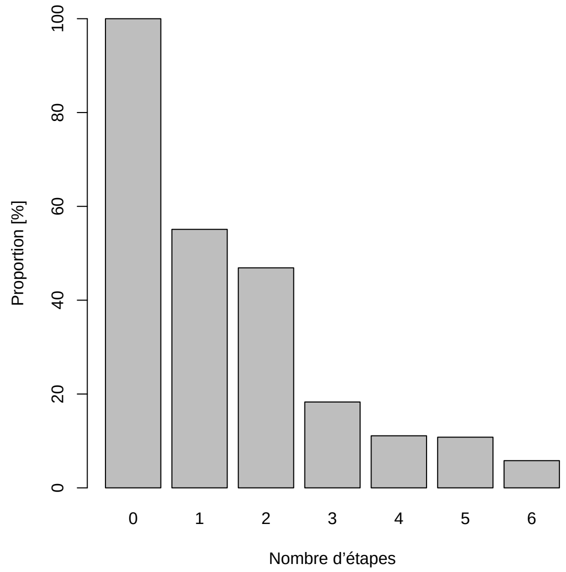
Dans la figure 3.10, nous avons représenté la proportion des élèves qui résolvent correctement les i premières étapes du problème sans se fourvoyer. Dans cette figure, la différence de hauteur entre deux barres successives i et $i+1$ représente la proportion des élèves qui après avoir franchi les i premières étapes s'achoppent à l'étape $i+1$. Nous constatons que deux étapes – la première et la troisième – sont particulièrement difficiles et provoquent de véritables hécatombes. Beaucoup d'élèves (45%) ont été effrayés par la longueur de la consigne et ne se sont pas attelés à la tâche, ils n'ont donc même pas dessiné le premier carré. Parmi ceux qui s'y attaquèrent beaucoup échouèrent à l'étape 3. Incontestablement, cette étape est la plus ardue de toutes.

En effet, pour placer correctement le troisième carré, qui représente le poster de Malika, il est nécessaire de tenir compte de nombreuses informations – 5 propositions distribuées dans quatre phrases –, alors que pour les autres étapes les informations sont moins abondantes, moins contraignantes et plus redondantes (tableau 3.4).

3.11.4 Allô ! Allô !

Ce problème permet d'apprécier la capacité des élèves à décrire un dessin géométrique. Les descriptions des élèves furent évaluées indépendamment par deux juges qui en cas de désaccord devaient trouver un compromis. Les juges évaluèrent les descriptions à l'aide d'une échelle ordinale en trois points. La première modalité de cette échelle – codée 0 – correspond à une description inadéquate ou incompréhensible, à partir de laquelle il est totalement impossible de reproduire la figure de référence. Voici quelques exemples de telles

FIGURE 3.10 – *Proportion des élèves franchissant les i premières étapes du problème sans embûche.*



descriptions[2] :

> **Exemple 1** – *Il a des lunettes une bouche tordue sur la gauche. Un nez carré une grosse verrue sur la joue. Il a des petits cheveux sur la tête et un bouton sur le front.*
>
> **Exemple 2** – *Je suis un garçon j'ai des cheveux bruns j'ai la peau blanche j'ai des yeux bleus et j'ai des taches de rousseur.*
>
> **Exemple 3** – *Bonjour Paul tu prends un crayon une feuille quadrillée. Je vais te dicter une forme tu la dessines sur une feuille quadrillée. Alors tu dessines une maison sur ta maison il doit y avoir 2 fenêtres et 1 porte. Dans tes fenêtres tu fais des volets.*
>
> **Exemple 4** – *À gauche tu avances d'un carré et tu descends de quatre carrés tu tournes à droite et tu avances de quatre carrés et tu montes de trois carrés et tu tournes à gauche et tu avances de trois carrés.*

La deuxième modalité de l'échelle – codée 1 – correspond à une description partielle, certains éléments importants sont omis. Si l'on se fie uniquement à la description proposée, la figure de référence ne peut être qu'ébauchée. Voici quelques exemples :

> **Exemple 5** – *Tu dois faire un carré avec 4 petits de chaque côté après tu laisses une ligne à gauche avec un carré entre et encore une ligne en bas du carré avec un carré entre.*

[2]La syntaxe est celle des élèves, mais l'orthographe a été corrigée.

Tableau 3.4 – *Répartition et caractérisation des informations fournies dans la description du problème* Lettre à Élise.

		Étape	Information
	Phrase 1		
1	Le poster de Suzette est carré	1	forme
2	Le poster de Suzette est en haut à gauche	1	position
	Phrase 2		
3	Le poster de Petit Spirou est à droite du poster de Suzette	2	position
	Phrase 3		
4	Les dimensions du poster de Petit Spirou sont les mêmes que les dimensions du poster de Suzette	2	dimensions
	Phrase 4		
5	Le poster de Malika est à droite du poster de Petit Spirou	3	position
	Phrase 5		
6	Le poster de Malika est carré	3	forme
7	Les dimensions du poster de Malika sont plus petites que les dimensions du poster de Petit Spirou	3	dimensions
	Phrase 6		
8	La longueur du côté du poster de Malika est égale à la moitié de la longueur du côté du poster de Suzette	3	dimensions
	Phrase 7		
9	Le bord supérieur du poster de Malika est aligné avec le bord supérieur du poster de Petit Spirou	3	position
	Phrase 8		
10	Le poster de Shrek est en dessous du poster de Malika	4	position
11	Le poster de Némo est en dessous du poster de Malika	5	position
12	Le poster de Némo est à côté du poster de Shrek	5	position
	Phrase 9		
13	Le poster de Shrek est à gauche du poster de Némo	6	position
	Phrase 10		
14	Le poster de Shrek est carré	4	forme
15	Le poster de Némo est carré	5	forme
16	La longueur du côté du poster de Shrek est égale à la moitié de la longueur du côté du poster de Malika	4	dimensions
17	La longueur du côté du poster de Némo est égale à la moitié de la longueur du côté du poster de Malika	5	dimensions

Exemple 6 – *C'est une feuille quadrillée carrée et elle a 6 carrés de côté plus un autre plus petit carré dedans il a 4 carrés de côté et en bas à gauche un plus petit carré de 1 côté il y a aussi une grande ligne en haut et en bas.*

Exemple 7 – *Fais un carré au milieu du carré en laissant une marge d'un carré après dans le carré que tu as fait tu fais un petit carré d'une catelle en bas à droite après entoure les trois carrés en bas du carré que* *tu as fait à l'horizontal et un autre en vertical plaqué contre le bord à droite de ton carré que tu as fait.*

La troisième modalité – codée 2 – correspond à une description suffisamment précise pour permettre de reproduire la figure de référence. Retranscrivons quelques réponses de ce type :

Exemple 8 – *Tu vas 4 carrés à droite, 4 carrés en bas, 4 carrés à gauche, 4 carrés en haut, 1 carré à droite, 4 carrés en bas, 1 carré en haut, 1 carré à gauche, 4 carrés à droite.*

Exemple 9 – *Sans prendre le crayon, tu pars du coin supérieur gauche et tu avances de 1 carré vers la droite, ensuite tu descends de 1 carré. Maintenant tu prends le crayon et avances de 4 carrés vers la droite ensuite descends de 4 carrés et tu avances de 4 carrés vers la gauche. Maintenant monte de 4 carrés. Tu as fait un carré, alors tu pars du coin inférieur gauche de ton carré et tu montes de 1 carré, tu avances de 4 carrés vers la droite. Maintenant tu repars du coin inférieur gauche de ton carré et avances de 1 carré vers la droite et tu montes de 4 carrés.*

Toujours sur le même principe, voici encore une autre description :

Exemple 10 – *Sans le crayon, tu vas en haut à gauche, tu descends de 1 carré tu vas d'un carré à droite et tu fais un point. C'est là que tu dois commencer. Tu traces 4 carrés à droite, tu descends de 3 carrés, tu vas à gauche de 4 carrés, tu descends de 1 carré, tu vas à droite de 4 carrés tu montes de 1 carré tu vas à gauche de 3 carrés, tu descends de 1 carré, tu montes de 4 carrés, tu vas à gauche de 1 carré, tu descends de 4 carrés et c'est fini !*

Nous avons reporté dans le tableau 3.5 la manière dont se répartissent les élèves selon la qualité de leur description.

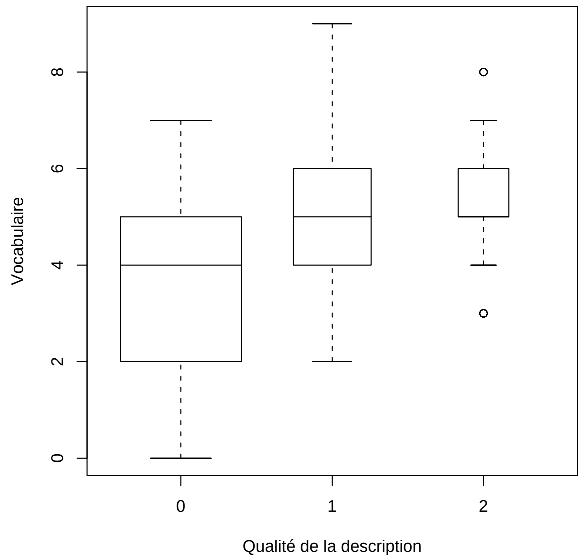
TABLEAU 3.5 – *Répartition des élèves selon la qualité de leur description.*

	Qualité de la description			Non
	0	1	2	réponse
Proportion [%]	56	25	10	9

Afin de savoir si la précision de la description est liée à l'utilisation du vocabulaire généralement dédié au repérage dans un plan, nous avons répertorié dans chaque description la présence ou non des quelques termes spécifiques suivants : *droite*, *gauche*, *haut*, *bas*, *horizontal*, *vertical*, *trait*, *droite* et *carré*. Représentons le nombre de termes de cette liste utilisés en fonction de la qualité de la description (figure 3.11).

Les élèves qui ne réussissent pas à décrire la figure de *Allô ! Allô !* recourent moins fréquemment aux mots de cette liste que ne le font leurs camarades qui

FIGURE 3.11 – *Étendue du vocabulaire géométrique utilisé selon la qualité de la description. La largeur des boîtes à moustaches est proportionnelle à la racine carrée de la taille des groupes.*



réussissent partiellement ou parfaitement à la décrire. En revanche, les élèves qui proposent une description partielle ou complète de la figure ne peuvent être distingués selon le vocabulaire qu'ils emploient. Ces élèves recourent au même lexique mais ne s'expriment pas exactement de la même manière. Pour s'en convaincre il suffit de comparer les deux descriptions suivantes qui toutes deux utilisent les mêmes termes de notre liste mais n'ont pas le même degré de précision :

Exemple 11	**Exemple 12**
*C'est un **carré**. À **gauche** il y a un **trait**, d'en **haut** jusqu'en **bas**, ça forme un rectangle. À gauche en bas il y a un carré et en bas de **droite** à gauche il y a un trait, ça forme aussi un rectangle.*	*Tu fais un **carré** de 4 cm sur 4 cm. Tu es tout en **haut** à **gauche** du carré. Tu sautes un centimètre vers la **droite**, depuis ce point tu descends de quatre centimètres vers le **bas**. Tu montes de un centimètre. Depuis là tu pars de un centimètre vers la gauche. Depuis cet endroit tu pars à droite et tu fais un **trait** de 4 cm.*
qualité = 1, vocabulaire = 6	qualité = 2, vocabulaire = 6

Ces descriptions sont faites selon le schéma le plus fréquemment choisi ($\sim 75\%$) pour décrire le dessin géométrique de *Allô ! Allô !* : un carré de côté 4 puis une horizontale et une verticale. Certains élèves ont néanmoins opté pour d'autres découpages, en voici deux exemples :

> **Exemple 13** – *C'est un carré avec quatre arêtes et quatre sommets. Il a 4 colonnes et 4 lignes. On a encadré la première colonne à gauche et on a aussi encadré la ligne de tout en bas.*

> **Exemple 14** – *Prends une feuille quadrillée. Tu dessines un carré de quatre carreaux et dans le carré tu dessines un carré de trois carreaux en haut à droite et en bas à gauche tu dessines un carré de un carreau.*

3.12 Découvrir et utiliser des transformations géométriques

Les élèves de 4P sont-ils capables de transformer une figure géométrique par rotation, sont-ils en mesure de découvrir le centre de symétrie d'un objet, sont-ils en mesure de distinguer deux formes chirales d'un objet géométrique ? L'analyse de leurs réponses aux problèmes *Timbres poste* (p. 204), *Platland* (p. 211), *En trois* (p. 209) et *Les papillons de Tchernobyl* (p. 210), nous fournira quelques informations à ce propos.

3.12.1 Timbres poste

Parmi 5 timbres orientés différemment, un seul se distingue des autres. Comment identifier l'intrus ? La stratégie la plus simple consiste à comparer successivement le premier timbre à tous les autres. Si le timbre 1 est différent de tous les autres, alors c'est l'intrus. Sinon l'intrus est le seul timbre qui est différent du timbre 1. Pour comparer deux timbres il faut voir si en faisant subir mentalement à l'un des timbres une rotation puis une translation, il est possible de le superposer à l'autre. Si c'est le cas les timbres sont les mêmes, sinon ils sont différents. Cette stratégie n'est pas optimale car elle nécessite, dans tous les cas, quatre comparaisons. Deux stratégies plus efficaces sont schématisées dans la figure 3.12. La première est une amélioration de la stratégie que nous venons de décrire. Cette stratégie intègre, au fur et à mesure des comparaisons, l'ensemble des informations déjà glanées. La deuxième stratégie se fonde sur un autre principe. Elle cherche à chaque comparaison, à obtenir un maximum d'informations. Lorsque le nombre d'objets est restreint, comme dans *Timbres poste*, l'avantage de cette deuxième stratégie n'est pas significatif. Par contre lorsque le nombre d'objets est grand, l'avantage de cette stratégie devient notoire. En effet si l'on a à chercher un seul intrus parmi n objets, la première stratégie nécessite en moyenne $\frac{n^2-n+4}{2n}$ comparaisons alors que la deuxième n'en nécessite que $\frac{n^2+6n-7}{4n}$.
Nous avons reporté dans la figure 3.13 la distribution des réponses des élèves. Par convention nous avons numéroté les timbres de gauche à droite et de haut en bas.

FIGURE 3.12 – *Stratégies permettant de découvrir l'intrus dans un ensemble de 5 objets.*

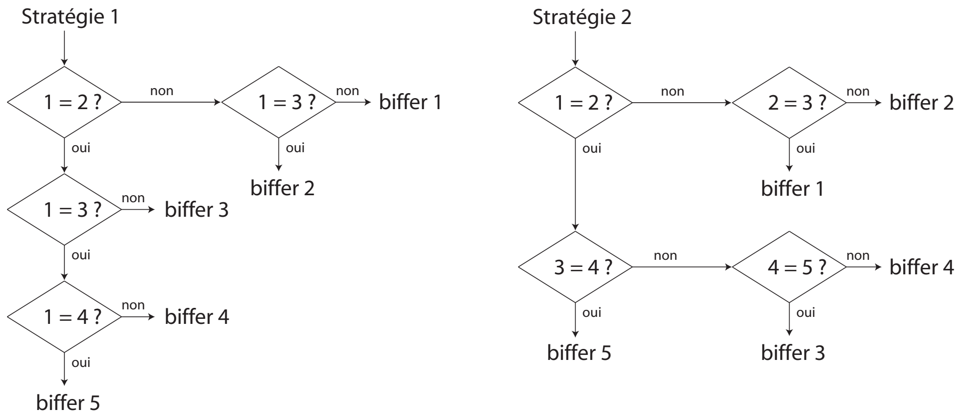
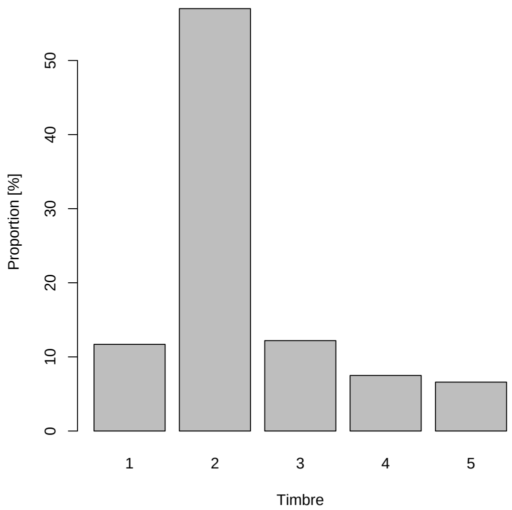


FIGURE 3.13 – *Distribution des réponses des élèves au problème* Timbres poste.



Plus de la moitié des élèves identifient correctement le timbre 2 comme étant l'intrus. L'erreur que les élèves commettent le plus souvent est de barrer l'un des timbres qui encadrent le véritable intrus, c'est-à-dire de biffer le timbre 1 ou le timbre 3.

Les timbres 4 et 5 sont tracés beaucoup moins fréquemment. Ceci suggère que les élèves ne font pas toutes les comparaisons avant de conclure. Au contraire, ils commencent par comparer les timbres 1 et 2, puis ils comparent les timbres 1 et 3 ou 2 et 3. À ce stade, ils disposent de toutes les informations nécessaires pour répondre correctement et en tirent judicieusement profit (tableau 3.6).

Après le résultat des deux premières comparaisons, ils peuvent se tromper dans

TABLEAU 3.6 – *Deux démarches efficaces pour résoudre le problème* Timbres poste.

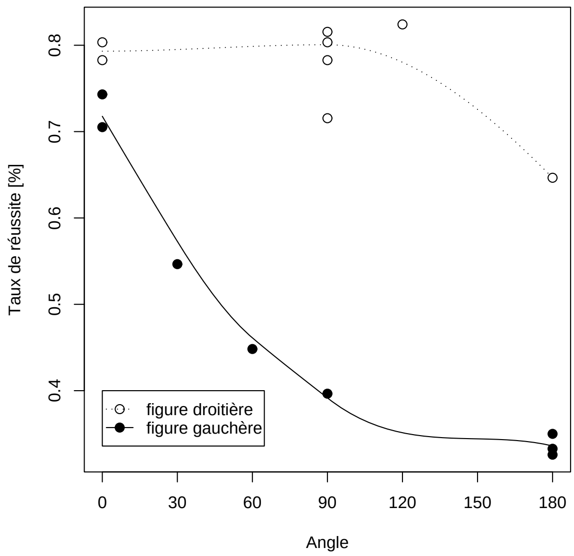
	Démarche 1	Démarche 2
Prémisse	• Tous les timbres sont les mêmes sauf un	• Tous les timbres sont les mêmes sauf un
Constat 1	• timbre 1 $\neq$ timbre 2	• timbre 1 $\neq$ timbre 2
Constat 2	• timbre 1 $=$ timbre 3	• timbre 2 $\neq$ timbre 3
Conclusion	Le timbre 2 est l'intrus	Le timbre 2 est l'intrus

leur raisonnement mais il y a peu de risque qu'ils décident de biffer un timbre qu'ils n'ont pas encore comparé ; ceci expliquerait que les timbres 4 et 5 placés sur la deuxième ligne, soient si rarement désignés comme intrus.

3.12.2 Platland

Une figure n'ayant pas d'axe de symétrie possède deux formes chirales. De manière arbitraire l'une est nommée droite D et l'autre gauche G. Pour déterminer la forme chirale d'une figure, il faut la comparer aux modèles D et G. La comparaison se fait comme dans le problème précédent par rotation puis translation mentale. Si une figure se superpose à sa forme D, alors elle est droite ; si elle se superpose à sa forme G, elle est gauche. L'identification de la forme chirale d'une figure est d'autant plus difficile que la rotation qu'il faut lui faire subir sur elle-même avant de la translater sur l'un ou l'autre des modèles est grande. Représentons le taux d'identification correcte des 16 figures de *Platland* en fonction de l'angle de rotation α (figure 3.14).
L'identification des figures droites (« *droitières* ») se fait très différemment de celle des figures gauches (« *gauchères* »), les taux de réussite sont très contrastés. Cette différence provient de la consigne. Dans l'énoncé du problème, le rôle joué par les figures gauches n'est pas le même que celui joué par les figures droites. Il est demandé aux élèves d'entourer les figures gauches. S'ils entourent effectivement une figure, c'est qu'ils considèrent qu'elle est gauche. En revanche, s'ils n'entourent pas une figure, cela ne veut pas dire qu'ils considèrent qu'elle est droite, cela peut aussi vouloir dire qu'ils ne savent pas si elle est droite ou gauche. En cas de doute, donc, les élèves n'entourent pas la figure, ils s'abstiennent et cela leur profite. En effet, si la figure est gauche et qu'ils doutent, ils ne l'entoureront pas et nous considérerons ceci comme une erreur. En revanche, si la figure est droite et qu'ils doutent, ils ne l'entoureront pas, mais, par la force des choses, nous considérerons cette non-réponse comme une bonne réponse. Ceci explique vraisemblablement que le taux d'identification correcte des figures droites soit si élevé (80%) et ne dépende quasiment pas de l'angle α de rotation.

FIGURE 3.14 – *Taux d'identification correcte des figures de* Platland *selon l'angle de rotation α qu'il faut leur imprimer avant de pouvoir les translater sur le bon modèle.*



Pour les figures gauches la situation est bien différente. Lorsque l'angle est nul, l'identification se fait correctement trois fois sur quatre. Mais lorsque l'angle augmente le taux d'identification diminue drastiquement. Cela traduit la difficulté qu'ont les élèves à véritablement effectuer des rotations mentales.

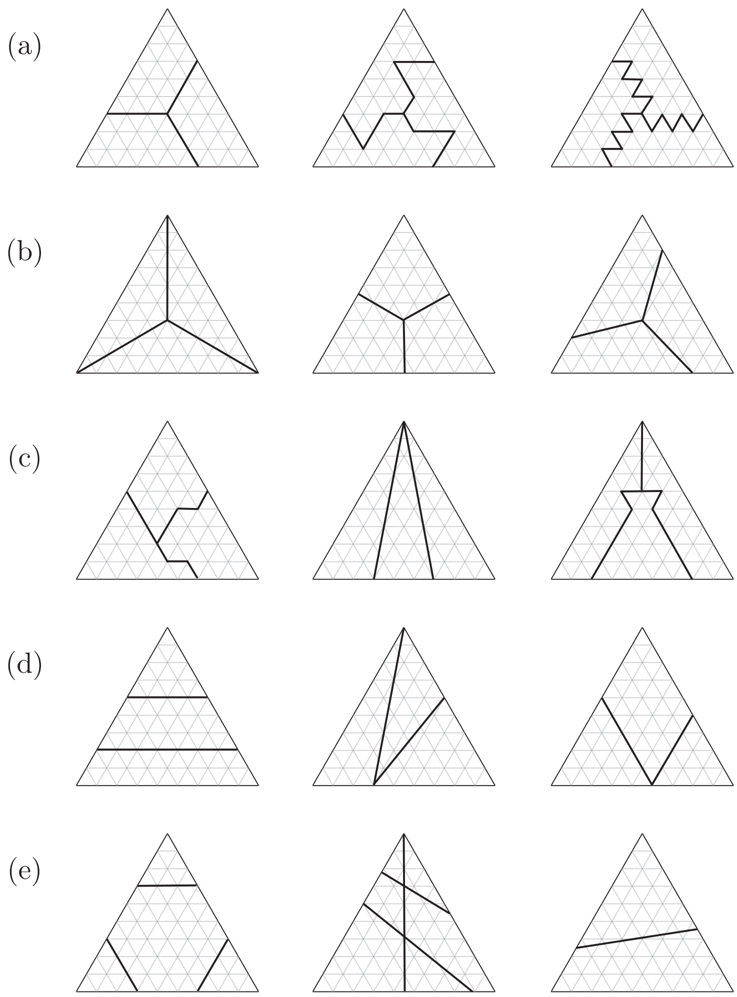
3.12.3 En trois

Comment partager un triangle équilatéral en trois parties égales ? Supposons que l'on ait réussi ce découpage en trois morceaux A, B et C. Une transformation du plan devrait permettre de superposer A à B, B à C et C à A. Cela suggère que le triangle découpé reste invariant par rotation de 120°. Lors de cette transformation par rotation, un seul point reste fixe, le centre de symétrie O du triangle. Ce point est ainsi commun à A, B et C. Il s'agit donc de construire trois lignes de partage qui passent par O et se recouvrent par rotation de centre O et d'angle 120°.

En 4P peu d'élèves (12%) ont eu cette idée (tableau 3.7). Parmi ceux-ci 75% partagent le triangle en suivant le maillage et les 25 autres pourcent non (figure 3.15).

Certains élèves pensent que deux figures sont égales si elles ont la même aire. Bien que l'égalité des aires soit une condition nécessaire à l'égalité géométrique, cela n'est pas suffisant. Ces élèves (5.4%) croient répondre correctement en partageant le triangle en trois parties de même aire. Pour ce faire, ils comptent

FIGURE 3.15 – *Différentes manières de découper le triangle équilatéral du problème* En trois. (a) *Découpages en trois parties de même forme fait en suivant le maillage.* (b) *Découpages en trois parties de même forme fait en ne suivant pas le maillage.* (c) *Découpages en trois parties de même aire mais de formes différentes.* (d) *Découpages en trois parties n'ayant ni la même forme, ni la même aire.* (e) *Autres découpages.*



le nombre de triangles élémentaires (ils en dénombrent 81), puis partagent ces triangles élémentaires en trois ensembles de même cardinal $81/3 = 27$).

D'autres élèves, plus nombreux (27%), se contentent de partager le triangle en trois, sans tenir compte ni de la forme, ni de l'aire des parties.

Les derniers qui laissent des traces de leur démarche (16.2%) ne réussissent à satisfaire aucune contrainte du problème, ils ne font qu'ébaucher une solution.

TABLEAU 3.7 – *Répartition des différents types de réponses au problème* En trois.

	Nombre de parties	Aire des parties	Forme des parties	Proportion [%]
Réponse	3	$=$	$=$	12.0
	3	$=$	$\neq$	5.4
	3	$\neq$	$\neq$	27.0
	$\neq 3$			16.2
Non réponse				39.4

Remarquons que la majorité des élèves (39.4%) ne sait pas comment s'attaquer à ce problème et laissent une page blanche, vierge de toute inscription.

3.12.4 Les papillons de Tchernobyl

Les papillons de Tchernobyl ont chacun deux ailes. Ces ailes peuvent être égales ou non. Si elles sont égales, elles peuvent être symétriques par rapport à un axe ou non. Si l'on représente par A l'ensemble des papillons ayant des ailes égales et par B l'ensemble des papillons symétriques par rapport à un axe, nous pouvons alors affirmer que $B \subseteq A$, car tous les papillons symétriques par rapport à un axe ont forcément des ailes égales. Mais l'inverse n'est pas vrai ($A \nsubseteq B$), car il existe des papillons ayant des ailes égales qui ne sont pas symétriques par rapport à un axe.
Le cardinal de A est égal à 10 ($|A| = 10$) ; le cardinal de B est égal à 6 ($|B| = 6$). La première question du problème porte sur le cardinal de l'ensemble $A \setminus B$: $|A \setminus B| = |A \cap \overline{B}| = 4$. La deuxième question porte sur le cardinal de $B \setminus A$. Comme $B \subseteq A$, $B \cap \overline{A} = \emptyset$; ainsi $|B \setminus A| = |B \cap \overline{A}| = |\emptyset| = 0$. Pour répondre à cette deuxième question, il n'y a pas besoin de compter, il suffit de raisonner ! Les élèves de 4P sont trop jeunes pour conduire de telles déductions. Beaucoup n'ont pas compris les termes mêmes de l'énoncé. Ils furent confrontés successivement à trois difficultés majeures.
La première difficulté provient de la formulation de la question « *Combien y a-t-il de papillons qui* ***ne*** *seront épinglés* ***que*** *par Albert ?* ». Les élèves ne savent pas comment interpréter le ***ne que*** exclusif de la question. Ils n'en tiennent pas compte. Seule une toute petite minorité y est sensible. La majorité, quant à elle, répond à la question « *Combien y a-t-il de papillons qui seront épinglés par Albert ?* ».
La deuxième difficulté est d'ordre conceptuel, elle concerne la distinction que l'on établit en géométrie entre deux figures égales et deux figures image l'une de l'autre par symétrie axiale. Pour beaucoup d'élèves de 4^{e} année, ces deux notions sont amalgamées et n'en forment qu'une. Certains élèves étendent donc

B à A (ce que nous symboliserons par $B^\star = A$) et considèrent que tous les papillons ayant des ailes égales possèdent une symétrie axiale – confondent-ils peut-être symétrie axiale et symétrie centrale ? –, d'autres restreignent A à B (ce que nous symboliserons par $A^\star = B$) et pensent que seuls les papillons symétriques par rapport à un axe ont des ailes égales.

La troisième difficulté est liée à la compréhension de la deuxième question « *Combien y a-t-il de papillons qui ne seront épinglés que par Bertrand ?* ». Si certains élèves sont cohérents et interprètent cette question de la même manière que la première (*i.e.* « *Combien y a-t-il de papillons qui seront épinglés par Bertrand ?* »), beaucoup comprennent dans ce contexte qu'il leur est demandé de calculer $|\Omega \setminus A|$, le cardinal du complément de l'ensemble A. Pour ces élèves les papillons épinglés par Bertrand sont simplement ceux qui n'ont pas été épinglés par Albert.

Nous répertorions dans le tableau 3.8 les réponses des élèves les plus fréquentes et les interprétons brièvement.

TABLEAU 3.8 – *Réponses les plus fréquentes au problème* Les papillons de Tchernobyl. *Les réponses sont ordonnées selon leur complexité. A est l'ensemble des papillons ayant deux ailes égales ; B est l'ensemble des papillons ayant deux ailes symétriques par rapport à un axe ; $A^\star$ est l'ensemble A restreint à B ; $B^\star$ est l'ensemble B étendu à A ; Ω est l'ensemble de tous les papillons, l'univers donc.*

Réponse			Difficulté surmontée			Proportion
$\lvert A \setminus B\rvert$	$\lvert B \setminus A\rvert$	Interprétation	1	2	3	[%]
4	6	$\lvert A \setminus B\rvert = 4$; $\lvert B\rvert = 6$	$\star$	$\star$	$(\star)$	6
10	6	$\lvert A\rvert = 10$; $\lvert B\rvert = 6$		$\star$	$\star$	4
6	6	$\lvert A^\star\rvert = 6$; $\lvert B\rvert = 6$			$\star$	8
10	10	$\lvert A\rvert = 10$; $\lvert B^\star\rvert = 10$			$\star$	
		$\lvert A\rvert = 10$; $\lvert \Omega \setminus A\rvert = 10$		$(\star)$		14
6	14	$\lvert A^\star\rvert = 6$; $\lvert \Omega \setminus A^\star\rvert = 14$				13

Notons qu'une petite fraction des élèves répond correctement 4 à la première question du problème. Ces élèves réussissent donc à repérer les papillons de l'ensemble A, ils pointent également correctement ceux de l'ensemble B et constatent que certains n'appartiennent qu'à A, ils les dénombrent et notent donc le résultat. Mais ces élèves ne peuvent admettre qu'à la deuxième question on leur demande de compter les papillons n'appartenant qu'à B, car il n'y en a pas ($B \cap \overline{A} = \emptyset$) ! Au lieu de répondre 0, ils comptent les éléments du seul ensemble qui possède des papillons symétriques ($B \cap A$), et ils répondent 6.

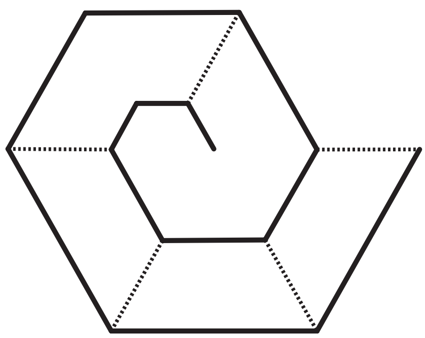
3.13 Mesurer des longueurs

Dans les nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques, de nombreuses tâches portent sur la mesure de longueur. Les élèves de 4^{e} année primaire devraient donc normalement avoir appris à effectuer une mesure à l'aide d'outils conventionnels comme une règle graduée, un mètre, voire une chevillère. Deux problèmes de notre épreuve permettent d'investiguer cette compétence, ce sont *La saucisse à rôtir* (p. 217), d'une part, et *La fourmi Ariane* (p. 216), d'autre part. Ces deux problèmes nécessitent chacun pour être résolus correctement la mesure de douze segments de droite. Mais, alors que dans le premier problème les longueurs s'expriment en centimètres[3], dans le second elles s'expriment en millimètres ou en dixièmes de millimètre. Afin de jauger la compétence des élèves à mesurer des longueurs, analysons en détail leurs réponses à ces deux problèmes.

3.13.1 La saucisse à rôtir

Il ne suffit pas de savoir mesurer une longueur pour résoudre correctement ce problème, bien d'autres compétences sont nécessaires. L'une des premières est de décrypter correctement les attentes des concepteurs du problème !
Un peu plus d'un élève sur quatre (27.7%) n'a pas compris le problème comme nous le souhaitions. Ces élèves ont été induits en erreur par l'habillage du problème. Pour eux, il était inconcevable qu'une saucisse puisse se réduire à un seul trait. Que diable, une saucisse n'est pas un cure-pipe ! C'est ainsi que par réalisme beaucoup proposent un découpage similaire à celui fait dans la figure 3.16 afin de reproduire, tant bien que mal, la saucisse que le chat de l'illustration découpe (p. 217).

FIGURE 3.16 – *Un découpage fréquemment proposé.*

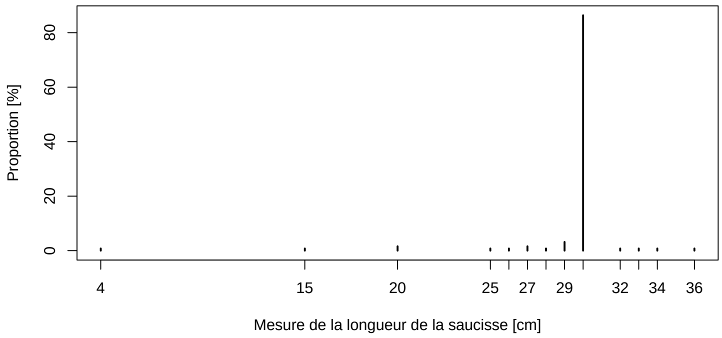


[3]Le rapport entre la longueur à mesurer exprimée en centimètres et une longueur étalon de 1 centimètre est un nombre entier.

Pour déterminer la longueur totale de la saucisse, les élèves utilisent principalement deux stratégies. La première consiste à déterminer la longueur de chacun des douze segments de droite puis à en calculer la somme. La seconde, un peu plus rare, consiste à reporter les segments les uns à la suite des autres sur une droite auxiliaire et ensuite à mesurer la longueur totale des segments concaténés. Ces deux méthodes conduisent forcément au même résultat car la mesure d'une somme de longueurs est égale à la somme des mesures de ces longueurs.

La majorité des élèves qui laissent une trace de leur démarche obtiennent comme mesure de la longueur de la saucisse 30 cm, ce qui correspond bien à la réalité (figure 3.17).

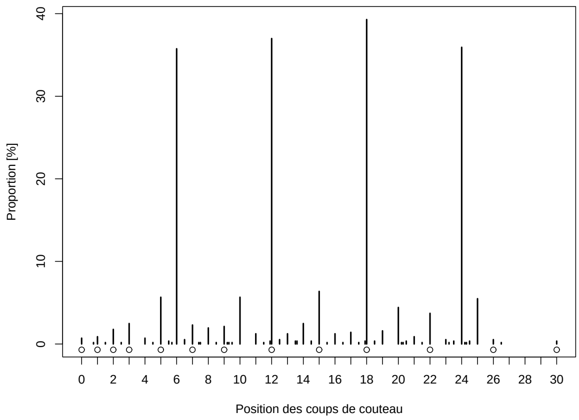
FIGURE 3.17 – *Mesure de la longueur de la saucisse. Les proportions sont calculées sur l'ensemble des élèves qui ont laissé une trace ; à ce stade, ils sont environ 25%.*



À ce point, le problème n'est pas encore entièrement résolu. La saucisse doit encore être partagée en 5 morceaux de même longueur. Pour déterminer la longueur de chaque morceau, quasiment tous les élèves choisissent la bonne opération arithmétique et divisent la longueur mesurée par 5 ; la plupart obtiennent 6. Ils n'ont plus qu'à reporter cette longueur le long de la saucisse. Une fraction des élèves se fourvoient et, au lieu de reporter une longueur de 6 cm (le quotient de la division), reportent une longueur de 5 cm (le diviseur de la division). Certains élèves, non sans malice, offrirent le morceau excédentaire au chat.

Dans la figure 3.18, nous avons représenté la distribution des coups de couteau. Les découpes se font principalement à 6, 12, 18 et 24 centimètres. Celles-ci forment le motif principal. Un deuxième motif est très visible, il rassemble les positions 5, 10, 15, 20 et 25. D'autres marques, plus discrètes, ont été faites, surtout à la jonction des segments de droite (*i.e.* aux positions 1, 2, 3, 7, 9, 22 et 26).

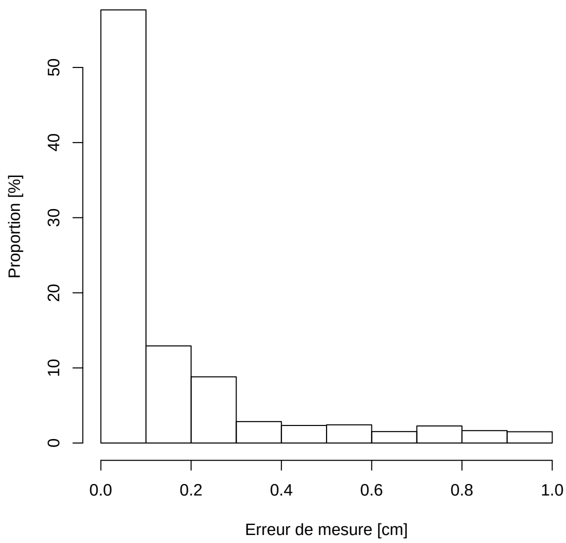
FIGURE 3.18 – *Distribution des coups de couteau. L'origine est placée arbitrairement à l'extrémité interne de la saucisse. Les petits ronds blancs marquent les extrémités des segments de droite qui forment les angles de la saucisse.*



3.13.2 La fourmi Ariane

L'énoncé n'a pas prêté à confusion. La plupart des élèves (95%) abordent le problème aisément et fournissent une réponse. Plus des deux tiers mesurent systématiquement les 12 segments de droite. La difficulté de ce problème réside dans le fait que sa résolution implique l'exécution d'une quantité d'opérations élémentaires relativement simples mais qui doivent toutes être réalisées correctement pour que le résultat final soit juste. Ceci explique en grande partie le taux de réussite modéré à ce problème (18%).
L'examen des opérations élémentaires de mesurage donne une vision différente des compétences des élèves.
Ces derniers utilisent correctement leur règle et placent bien le zéro de la graduation sur l'une des extrémités du segment à mesurer. Ils auraient pu se tromper en utilisant comme origine de la mesure, non pas le zéro de la graduation, mais le un. Nous aurions alors observé une erreur systématique de 1 centimètre, mais il n'en est rien.
Par ailleurs leurs mesures sont précises. En général, l'erreur de mesure relative est inférieure à 2%. En effet, les longueurs à mesurer sont comprises entre 4 et 10 centimètres et parmi les mesures effectuées plus de la moitié sont à moins d'un millimètre de la longueur réelle et presque toutes sont à moins de 5 millimètres (figure 3.19).
Les mesures des élèves auraient peut-être été encore plus précises si nous leur avions demandé d'exprimer la longueur du chemin parcouru par Ariane la fourmi non pas en centimètres mais en millimètres. Certains élèves interprètent la consigne comme une invitation à arrondir chacune de leurs mesures au centimètre. Dans la figure 3.20, nous avons représenté la proportion des élèves qui arrondissent leurs mesures intermédiaires. Quelques élèves ($\sim 5\%$) arron-

FIGURE 3.19 – *Distribution des erreurs de mesure.*



dissent de manière constante le résultat de leurs mesures vers le bas. D'autres, minoritaires aussi ($\sim$ 5%), arrondissent systématiquement vers le haut. Mais beaucoup ($\sim$ 35%) n'arrondissent au centimètre que si la longueur à mesurer est à moins de 2 millimètres d'une valeur entière. Si l'on demande, par exemple, à ces élèves de mesurer une longueur de 4.9 cm ils répondront 5 cm ; en revanche, si on leur demande de mesurer une longueur de 6.7 cm ou de 5.8 cm, ils n'arrondiront pas leur résultat et fourniront comme réponse 6.7 cm ou 5.8 cm respectivement. Les autres, une majorité donc ($\sim$ 55%), n'arrondissent jamais et expriment toujours le résultat de leurs mesures au millimètre près.

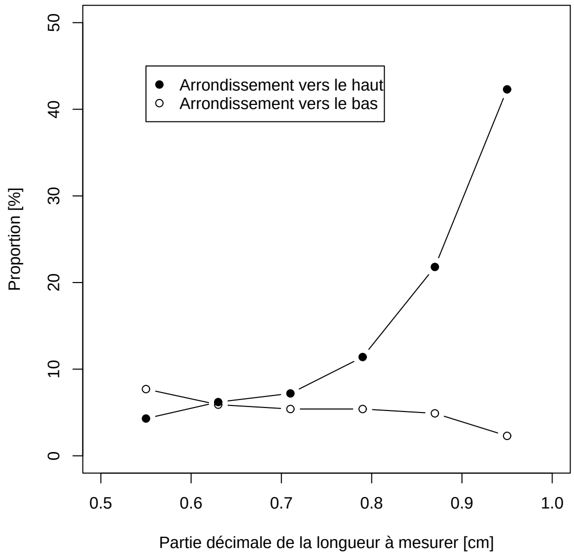
3.14 Comparer des aires

Les problèmes *Ombres chinoises* (p. 215) et *Un air de famille* (p. 214) portent tous deux sur la comparaison d'aires. Mais alors que le premier peut être résolu de manière élémentaire par comptage, le second implique des conduites de mesurage plus sophistiquées.

3.14.1 Ombres chinoises

Ce problème ne pose aucune difficulté de compréhension aux élèves, quasiment tous y répondent (96%). Si une majorité des élèves (58%) procèdent comme nous nous y attendions et comptent le nombre de carrés constituant chaque figure et inscrivent les résultats de leurs dénombrements dans leur cahier, beaucoup (38%) répondent aux deux questions que nous leur posons sans laisser

FIGURE 3.20 – *Proportion des élèves qui arrondissent leurs résultats au centimètre selon la partie décimale de la longueur à mesurer.*



aucune trace. Cela suggère deux hypothèses. Selon la première hypothèse, ces élèves auraient, comme leurs camarades, compté les carrés composant chacune des figures mais auraient noté leurs résultats non pas sur leur cahier mais sur une feuille annexe. Selon la seconde hypothèse, ces élèves auraient fait l'économie du dénombrement et auraient simplement comparé les aires du cobra, de l'autruche et du crocodile à l'oeil. Avant de revenir sur ces hypothèses, examinons plus en détail la manière dont les élèves calculent l'aire des surfaces.

Représentons dans la figure 3.21 les résultats de leurs dénombrements.

Pour chaque ombre, la distribution des dénombrements possède trois modes. Ces trois modes sont le reflet de trois stratégies différentes. La première stratégie de comptage est la plus rigoureuse. Elle consiste à compter l'aire grisée de chaque figure le plus précisément possible en tenant compte du partage des carrés en moitiés. La deuxième stratégie consiste à calculer, non pas l'aire de la surface grisée, mais une approximation supérieure de cette aire. Pour ce faire, il faut compter chaque carré grisé, partiellement ou totalement. La troisième stratégie consiste à calculer une approximation inférieure de l'aire grisée. Dans ce cas-ci, il ne faut compter que les carrés entièrement grisés (tableau 3.9). Pour le cobra, la première stratégie donne comme résultat 52.5, la deuxième donne 62 et la troisième 43. Pour l'autruche, la première stratégie donne 70, la deuxième 77 et la troisième 64. Finalement pour le crocodile, la première stratégie fournit comme résultat 68, la deuxième 76 et la troisième 60.

Les élèves sont très cohérents et n'optent chacun que pour une seule stratégie. La première stratégie est la plus fréquente, elle est employée par 70% des élèves.

FIGURE 3.21 – *Résultats des dénombrements selon l'ombre. Les aires calculées se trouvent en abscisse et la densité de fréquence des réponses se trouve en ordonnée. Dans les trois diagrammes les échelles sont les mêmes.*

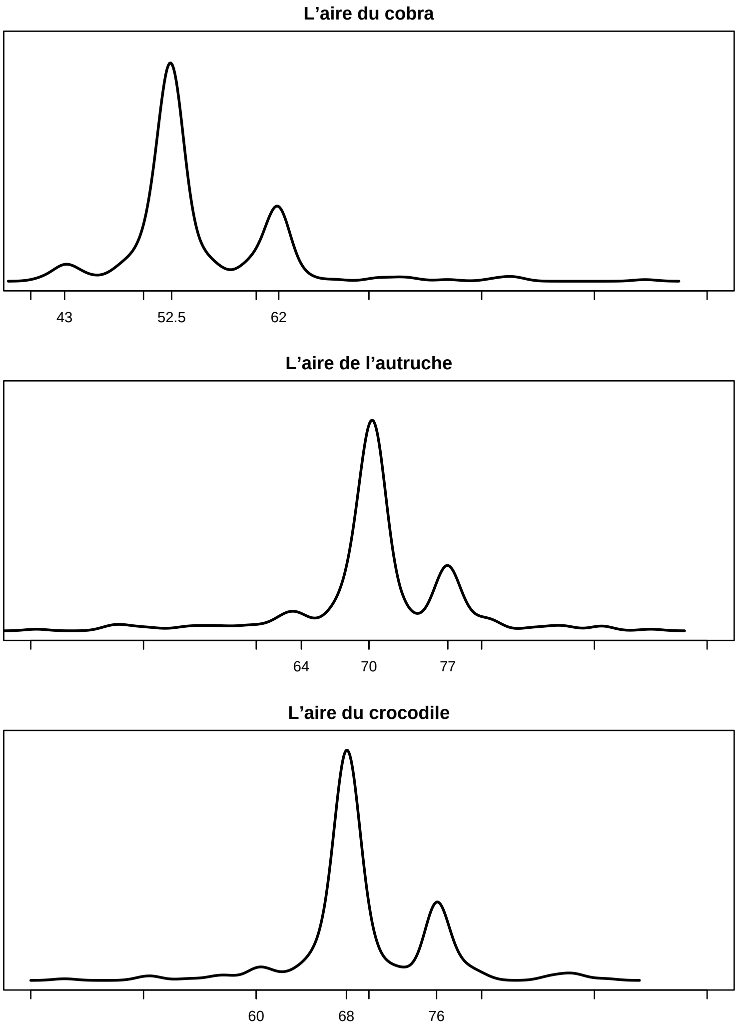
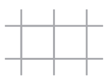
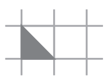
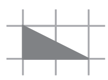


TABLEAU 3.9 – *Trois façons de mesurer une surface quadrillée grisée.*

	Stratégie				
1	Mesure exacte	0	1	1/2	1
2	Approximation supérieure	0	1	1	2
3	Approximation inférieure	0	1	0	0

La deuxième stratégie est moins souvent utilisée, elle est employée par un peu plus de 20% des élèves et la troisième par un peu moins de 10% des élèves. Or, quelle que soit la stratégie employée, l'ordre des mesures reste le même. Si l'on symbolise la mesure de l'aire d'une ombre par $\mathcal{A}$, son approximation supérieure par $\overline{\mathcal{A}}$ et son approximation inférieure par $\underline{\mathcal{A}}$, cela signifie que :

$$\begin{array}{lclcl} \mathcal{A}(\text{cobra}) & < & \mathcal{A}(\text{crocodile}) & < & \mathcal{A}(\text{autruche}) \\ \overline{\mathcal{A}}(\text{cobra}) & < & \overline{\mathcal{A}}(\text{crocodile}) & < & \overline{\mathcal{A}}(\text{autruche}) \\ \underline{\mathcal{A}}(\text{cobra}) & < & \underline{\mathcal{A}}(\text{crocodile}) & < & \underline{\mathcal{A}}(\text{autruche}) \end{array}$$

Ainsi, pour autant que les dénombrements soient fiables, n'importe quelle stratégie appliquée de manière constante conduit aux bonnes réponses.

Estimons maintenant la proportion des élèves qui répondent correctement à chacune des deux questions du problème *Ombres chinoises* selon qu'ils laissent une trace de leur démarche ou non (tableau 3.10).

TABLEAU 3.10 – *Taux de réussite à chacune des questions du problème* Ombres chinoises *selon la présence ou non d'une trace.*

		Trace	
		présente	absente
a)	Quel animal a la plus grande ombre ?	74%	54%
b)	Quel animal a la plus petite ombre ?	88%	72%

Les élèves qui comptent le nombre de carrés formant chaque ombre et qui en laissent une trace identifient pour la plupart correctement l'animal ayant l'ombre la plus grande ainsi que celui ayant l'ombre la plus petite.

Les élèves qui ne laissent pas de trace repèrent aussi très facilement l'ombre la plus petite, celle du cobra donc ; en revanche, ils ne réussissent à pointer correctement l'ombre la plus grande qu'une fois sur deux. Ce taux de réponses correctes est identique à celui que l'on aurait enregistré s'ils avaient choisi au hasard entre l'autruche et le crocodile.

Remarquons que le cobra est beaucoup plus petit que les deux autres animaux qui eux ont quasiment la même aire. Sans aucun calcul, il saute aux yeux que l'animal ayant la plus petite ombre est le cobra. Par contre, selon le même procédé, en un coup d'oeil, il est quasiment impossible de deviner qui, de l'autruche ou du crocodile, a la plus grande ombre. Le choix ne peut être que hasardeux.

À notre sens, ces observations étayent l'hypothèse selon laquelle les élèves qui n'ont laissé aucune trace de dénombrement auraient tout bonnement répondu à vue de nez.

3.14.2 Un air de famille

Il s'agit dans ce problème d'ordonner neuf quadrilatères selon leur aire. Pour faciliter la tâche, les figures ont été placées sur un quadrillage. Caractérisons brièvement ces quadrilatères par les longueurs de leurs côtés, leur périmètre et leur aire (tableau 3.11).

TABLEAU 3.11 – *Quelques caractéristiques des neuf quadrilatères du problème* Un air de famille. *L'unité de mesure est la longueur de la maille du quadrillage. Les mesures sont toutes arrondies au millième.*

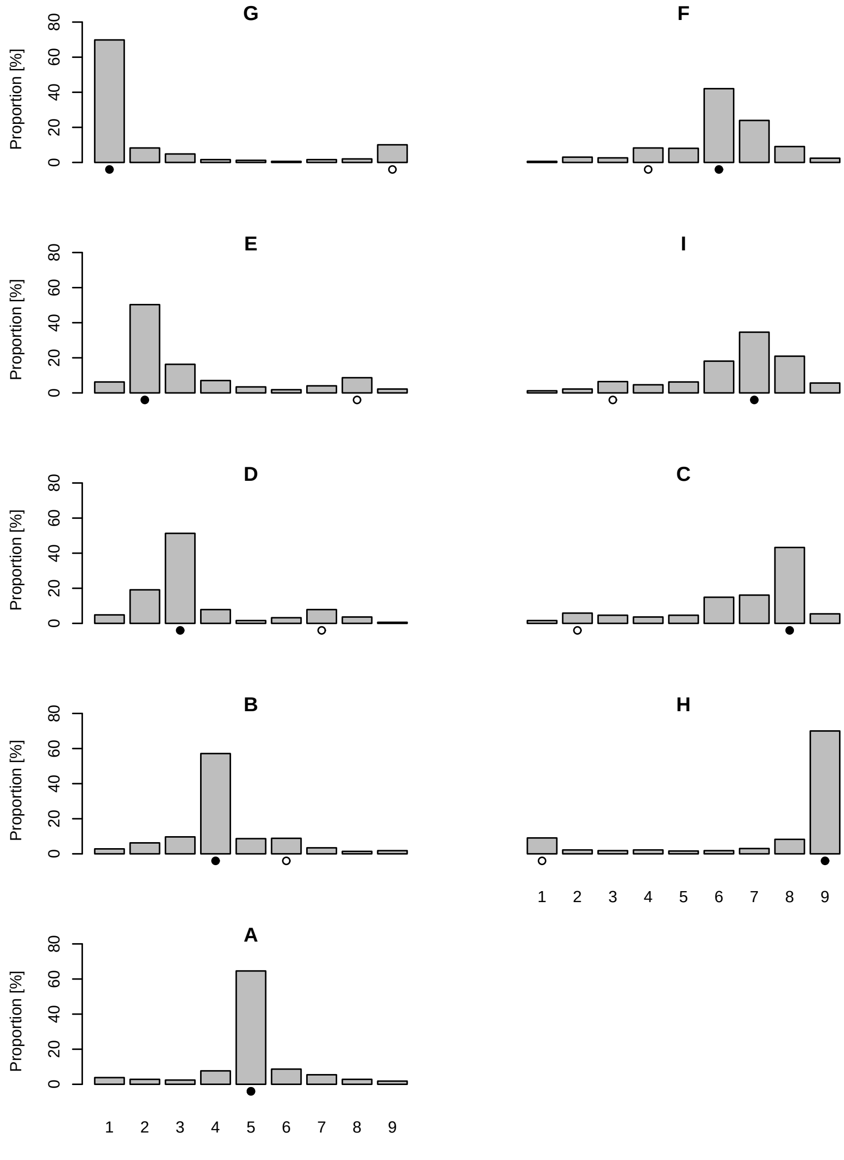
Figure	Forme	Largeur ou demi-largeur	Hauteur	Périmètre	Aire
G	carré	2.500	2.500	10.000	6.250
E	trapèze rectangle	2.625	2.500	10.263	6.563
D	rectangle	2.750	2.500	10.500	6.875
B	carré	2.750	2.750	11.000	7.563
A	rectangle	2.750	3.000	11.500	8.250
F	parallélogramme	3.000	3.000	12.083	9.000
I	trapèze rectangle	3.125	3.000	12.260	9.372
C	rectangle	3.250	3.000	12.500	9.750
H	carré	3.250	3.250	13.000	10.563

Nonante pour cent des élèves abordent ce problème et fournissent une réponse en assignant à chaque quadrilatère une position. Dans la figure 3.22, nous avons représenté la manière dont les élèves positionnent les différents quadrilatères.

Ainsi, par exemple, la majorité des élèves (70%) considère que le quadrilatère ayant la plus petite des aires est le quadrilatère G. Une majorité aussi considère que parmi les quadrilatères restants, le plus petit est le quadrilatère E. Nous constatons donc que, généralement, les élèves placent en première position la figure G, puis en deuxième position la figure E, puis successivement les figures D, B, A, F, I, C et H pour terminer. Le mode principal des distributions de la figure 3.22 est ainsi systématiquement égal à la position qu'occupe réellement le quadrilatère dans la série des quadrilatères ordonnés selon leur aire. Globalement, donc, les élèves réussissent à ordonner correctement les neuf quadrilatères du problème *Un air de famille*.

Remarquons qu'une minorité des élèves interprète de manière erronée le symbole $<$. Pour ce groupuscule $H < C$ signifie que l'aire de la figure H est plus grande que celle de la figure C. Lorsque l'on balaye la figure 3.22 de haut en bas et de gauche à droite, nous voyons que la distribution principale des réponses se déplace de gauche à droite. Mais, si l'on est attentif, l'on s'aperçoit qu'une distribution secondaire se déplace dans le sens contraire, de droite à gauche. Cette distribution secondaire est le reflet des réponses des élèves ayant mal interprété le symbole $<$.

FIGURE 3.22 – *Positions assignées par les élèves aux différents quadrilatères du problème* Un air de famille. *Dans cette figure les formes sont classées selon leur aire ($G < E < D < B < A < F < I < C < H$).*



Comment les élèves résolvent-ils ce problème ? À travers les traces qu'ils laissent sur leur cahier nous pouvons décrire cinq stratégies différentes qui se répartissent en deux grands groupes. Le premier groupe rassemble trois stratégies qui se basent sur les mesures précises faites généralement à l'aide d'une règle graduée ; le second groupe rassemble deux stratégies fondées principalement sur des estimations, plus ou moins grossières. Décrivons brièvement ces stratégies.

Mesures

La première stratégie est la plus sophistiquée, mais elle n'est utilisée que très rarement par les élèves de 4P (2%). Cette stratégie consiste à mesurer la largeur et la hauteur de chaque quadrilatère, à calculer le produit de ces deux mesures puis à comparer les aires ainsi déterminées.

La deuxième stratégie est beaucoup plus fréquemment utilisée (23%). Elle consiste à mesurer la longueur des côtés de chaque quadrilatère puis à en faire la somme. Les figures sont alors ordonnées selon leur périmètre. Le principe sur lequel s'appuie cette démarche est le suivant : si le périmètre du quadrilatère J est plus petit que le périmètre du quadrilatère K, alors l'aire de J est plus petite que l'aire de K. Or ce principe est faux. Il suffit pour s'en convaincre de comparer un carré de côté 4 à un rectangle de dimensions 2×7. Le périmètre du carré (16) est plus petit que celui du rectangle (18) et pourtant l'aire du carré (16) est plus grande que celle du rectangle (14). L'application rigoureuse de cette stratégie conduit néanmoins à la bonne solution car dans *Un air de famille* les figures s'ordonnent selon leur aire de la même manière que selon leur périmètre (tableau 3.11).

La troisième stratégie est plus rudimentaire, elle est très peu usitée (2%). Elle consiste à ne mesurer qu'une dimension de chaque quadrilatère – la hauteur ou la largeur – puis à ordonner les quadrilatères selon cette dimension. Les élèves qui recourent à cette démarche concluent que certaines figures ont la même aire. Ils le signalent en transformant certains symboles $<$ en $=$.

Estimations

La quatrième stratégie est employée par 12% des élèves. Elle revient à dénombrer approximativement le nombre de carrés et demi-carrés qui composent chaque quadrilatère comme dans le problème *Ombres chinoises*.

La cinquième et dernière stratégie se base sur le principe astucieux suivant : si la figure J peut recouvrir complètement la figure K, alors l'aire de J est supérieure à celle de K. Selon ce principe simple, on peut ordonner correctement 8 des 9 figures du problème. En effet H recouvre C, C recouvre I, I recouvre A, A recouvre B, B recouvre D, D recouvre E et E recouvre G. Seule la figure F, le parallélogramme pose des difficultés et rompt la chaîne des recouvrements. En fait la relation de recouvrement est une relation d'ordre partiel, cela signifie que cette relation est réflexive, antisymétrique et transitive, mais que tous les quadrilatères ne sont pas comparables. La grande dispersion des distributions F, I et C de la figure 3.22 est la manifestation de l'embûche que crée la figure F. Cette cinquième stratégie a probablement été la plus souvent utilisée (60%), mais nous n'en sommes pas sûrs car son application ne nécessite aucune inscription.

3.15 Construire une figure dont l'aire est donnée

Deux problèmes de notre épreuve portent sur la construction dans un quadrillage de référence d'une figure dont l'aire est donnée. Mais, alors que le premier problème, *Quadrillage* (p. 212), ne demande qu'une solution, le second, *La cage biscornue* (p. 213), exige l'exhaustivité.

3.15.1 Quadrillage

Construire un rectangle

Soixante-sept pour cent des élèves sont capables de dessiner un rectangle dont l'aire est égale à 24 unités de mesure. Dix-huit pour cent se trompent et les autres ne répondent pas. La distribution des solutions correctes est reportée dans le tableau 3.12.

Tableau 3.12 – *Distribution des réponses correctes à la première question de* Quadrillage.

	Dimensions du rectangle			
	4×6	3×8	2×12	1×24
Proportion	42%	30%	28%	0%

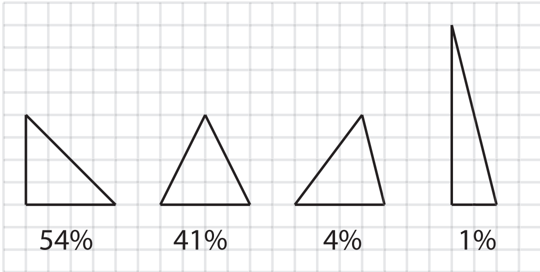
Notons qu'une des solutions possibles n'apparaît jamais. Ceci est peut-être dû au fait que l'espace mis à disposition des élèves pour répondre était trop exigu et ne leur permettait pas de tracer un rectangle de dimensions 1×24 sans sortir du quadrillage.

Construire un triangle

Moins de quinze pour cent des élèves sont capables de construire un triangle dont l'aire est donnée. Cinquante pour cent se fourvoient et un peu plus de trente pour cent ne répondent pas. Les solutions correctes que les élèves ont fournies sont représentées dans la figure 3.23.

Un rectangle d'aire A peut être partagé par l'une de ses diagonales en deux triangles égaux d'aire $A/2$. À partir de cette connaissance, il est facile de s'imaginer que pour construire un triangle d'aire $A^\star$, il suffit de construire un rectangle d'aire $2A^\star$ puis de partager ce dernier par l'une de ses diagonales pour obtenir le triangle recherché. Une toute petite minorité des élèves semble détenir ce savoir.

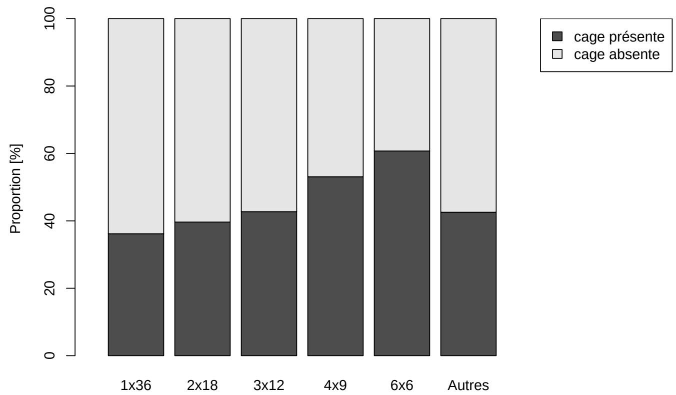
FIGURE 3.23 – *Distribution des réponses correctes à la seconde question de* Quadrillage.



3.15.2 La cage biscornue

Une autre façon de formuler ce problème aurait été de demander la liste de toutes les décompositions de 36 en un produit de deux nombres entiers. Si l'on considère que la décomposition $a \times b$ et la même que la décomposition $b \times a$, alors il est possible de décomposer 36 de 5 manières différentes qui sont les suivantes : 1×36, 2×18, 3×12, 4×9 et 6×6. Toutes ces décompositions ne sont pas aussi accessibles les unes que les autres. Certaines sont très populaires, d'autres beaucoup moins. Afin d'étayer nos dires, représentons la fréquence des différentes décompositions relevées dans les solutions des élèves (figure 3.24).

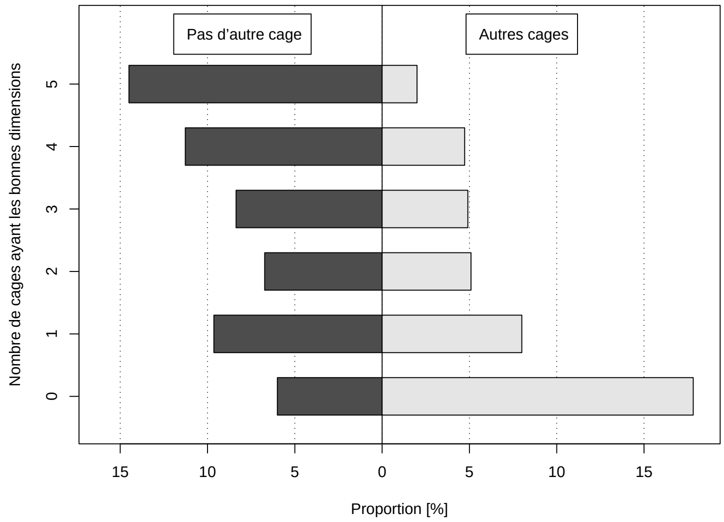
FIGURE 3.24 – *Proportions des cages dessinées selon leurs dimensions.*



La cage la plus souvent construite (60%) est la cage carrée de dimensions 6×6. Celle qui est construite le plus rarement (36%) est la cage la plus allongée, la plus disproportionnée, celle dont les dimensions sont 1 et 36. Nous constatons donc que, comme dans *Quadrillage*, les rectangles les plus souvent dessinés sont ceux dont les dimensions sont les plus proches.

Examinons maintenant le nombre de cages construites par chaque élève (figure 3.25).

FIGURE 3.25 – *Répartition des élèves selon le nombre de cages construites ayant les bonnes dimensions. Les élèves qui ont dessiné i cages (avec i* $\in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$*) ayant les bonnes dimensions se partagent en deux groupes : dans le premier groupe se trouvent les élèves qui n'ont pas dessiné d'autres cages (partie foncée de la barre) ; dans le deuxième groupe se trouvent ceux qui ont dessiné encore d'autres cages ne satisfaisant pas les contraintes du problème (partie claire de la barre).*



Les élèves se répartissent en trois groupes selon le degré de compréhension qu'ils ont de l'énoncé du problème. Le premier groupe (24%) rassemble les élèves qui n'ont pas compris le problème et ne savent pas comment l'aborder, ces élèves ne dessinent aucune cage correctement. Le deuxième groupe (18%) réunit les élèves qui n'ont compris que partiellement le problème, ces élèves n'ont pas saisi la double exigence d'exhaustivité et de structure, ils ne dessinent qu'une cage correctement. Le troisième groupe (58%) rassemble les élèves qui ont compris tous les éléments de l'énoncé, ces élèves tentent de dessiner toutes les cages rectangulaires ayant des dimensions entières mais n'y arrivent pas forcément, ils en oublient souvent une ou deux.
Les élèves ont parfois tendance à dessiner d'autres cages qui ne satisfont pas les contraintes du problème. Cette tendance est d'autant plus forte que les élèves n'ont pas entièrement saisi l'énoncé du problème. Dans le premier groupe, la proportion des élèves qui dessinent de telles cages vaut 75% ; dans le deuxième, cette proportion vaut un peu moins de 50% et dans le troisième, elle chute à environ 25%.

Chapitre 4

Objectifs d'apprentissage et compétences minimales

Nous venons, dans le chapitre précédent, de décrire précisément ce que savent faire les élèves au terme de leur quatrième année d'école primaire. Les analyses que nous avons faites sont toutefois très pointillistes et ne permettent pas facilement de savoir si, dans l'ensemble, les élèves possèdent les compétences attendues (Calame et al., 1997). Les descriptions que nous avons faites des compétences des élèves sont très morcelées étant donné que nous nous sommes volontairement intéressés à la manière dont ils résolvaient chaque problème de l'épreuve de mathématiques. Nous aimerions maintenant proposer une description plus générale. Nous nous focaliserons, non plus sur les problèmes, mais sur les élèves. Au lieu d'examiner comment l'ensemble des élèves résout chaque problème, nous allons plutôt regarder comment chaque élève se comporte face à l'ensemble des problèmes. Cette tâche nécessitera quelque astuce car tous les élèves, rappelons-le, n'ont pas résolu les mêmes problèmes, tant s'en faut.

Nous commencerons donc par construire une échelle de compétences en mathématiques commune à tous les élèves (§ 4.1). Une fois cette échelle construite, nous établirons un seuil minimal de compétences (§ 4.2) car nous ne voulons pas uniquement pouvoir comparer les élèves les uns aux autres, mais aussi pouvoir faire référence à ce qu'ils savent et aux compétences qu'ils maîtrisent. Ce seuil devrait ainsi nous permettre de mieux répondre à l'une des questions que nous formulions dans l'introduction, à savoir « les objectifs décrits dans le plan d'études sont-ils atteints, les compétences attendues sont-elles manifestes ? ». Autrement dit, nous allons tenter de construire une épreuve normative qui soit critériée aussi. Nous rendrons compte des résultats de cette entreprise dans le dernier paragraphe de ce chapitre (§ 4.3).

4.1 Construction d'une échelle de compétences

Le plan expérimental que nous avons utilisé est incomplet (§ 2.3.1). Cela signifie que les élèves de l'échantillon n'ont pas tous répondu aux mêmes problèmes. En recourant à un modèle de la réponse à l'item non-paramétrique, il est relativement facile de traiter convenablement un tel design incomplet (Antonietti, 2003a). Il faut néanmoins qu'un certain nombre d'hypothèses soient satisfaites.
La première hypothèse qui doit être satisfaite est l'unidimensionnalité des items de l'échelle. Cela signifie que tous les items de l'épreuve doivent contribuer à un seul trait latent, celui que l'on cherche à mesurer à l'aide de l'épreuve. Dans notre situation, cela sous-entend que les compétences mathématiques sont monolithiques et ne se décomposent pas en compétences numériques et spatiales.
La deuxième hypothèse impose l'indépendance locale. Ainsi, la réponse d'un élève à une première question ne devrait pas influencer ses réponses ultérieures. Cette hypothèse, très forte, exclut donc qu'un élève puisse apprendre quoi que ce soit lors de la passation de l'épreuve.
L'hypothèse suivante, la troisième, stipule que les courbes caractéristiques des items sont monotones croissantes. Un élève plus compétent qu'un autre a toujours plus de chance de résoudre correctement n'importe quel problème.
La quatrième et dernière hypothèse suppose que les courbes caractéristiques des items ne se croisent pas. Cela signifie que pour tous les élèves, quelles que soient leurs compétences, l'ordre de difficulté des problèmes est toujours le même.
Lorsque ces hypothèses sont satisfaites, et c'est bien le cas (Antonietti, 2004), les données manquantes structurelles peuvent être aisément imputées grâce à une méthode qui s'appuie sur les propriétés du modèle non-paramétrique de la réponse à l'item (Huisman & Molenaar, 2001).
Après avoir complété les données, il est facile de comparer les élèves ; il suffit de traiter les données complétées comme l'on aurait traité des données complètes. Décrivons brièvement la procédure de complétion.

4.1.1 Procédure de complétion

Notons les scores obtenus par un élève aux différents items de l'épreuve x_1, x_2, …, x_j, …, x_{113}. Le score x_j prend comme valeur 0 si la réponse à l'item j est fausse, 1 si la réponse est juste, et ne prend aucun valeur si la question n'a pas été posée. L'imputation des valeurs manquantes se fait selon la procédure suivante :

1. Ordonner de manière décroissante les items selon la proportion de réponses correctes en ne tenant compte naturellement que des questions qui ont été posées. Les items sont donc classés du plus facile au plus difficile. Renumérotons les items selon leur position dans ce classement [1], [2], … , [113].

2. Pour donner une valeur aux scores manquants $x_{[j]}$, il suffit d'appliquer la première des règles figurant dans la liste qui suit dont la condition est satisfaite :

   (a) Si $x_{[j+1]} = 1$, alors $x_{[j]} = 1$.
   Si l'on n'a pas posé la question $[j]$ à un élève, mais que cet élève a résolu correctement la question $[j+1]$ qui est à peine plus difficile que la question $[j]$, alors nous supposerons que si la question $[j]$ lui avait été posée, il y aurait répondu correctement.

   (b) Si $x_{[j-1]} = 0$, alors $x_{[j]} = 0$.
   Si l'on a pas posé la question $[j]$ à un élève, mais que cet élève a répondu de manière erronée à la question $[j-1]$ qui est à peine plus facile que la question $[j]$, alors nous supposerons que si la question $[j]$ lui avait été posée, il n'y aurait pas répondu correctement.

   (c) Si parmi les scores observés $x_{[1]}, x_{[2]}, \ldots, x_{[j-1]}$ le nombre de 0 est supérieur ou égal au nombre de 1, alors $x_{[j]} = 0$.
   Si, parmi les questions plus faciles que la question $[j]$, un élève ne répond pas correctement à une majorité d'entre elles, alors nous supposerons que l'élève n'aurait pas répondu correctement à la question $[j]$.

   (d) Si parmi les scores observés $x_{[j+1]}, \ldots, x_{[113]}$ le nombre de 1 est supérieur ou égal au nombre de 0, alors $x_{[j]} = 1$.
   Si, parmi les questions plus difficiles que la question $[j]$, un élève répond correctement à la moitié ou même davantage, alors nous supposerons qu'il aurait répondu correctement à la question $[j]$.

   (e) Tirer au sort la valeur de $x_{[j]}$ en se conformant à la distribution de Bernoulli $X_{[j]}$ de paramètre égal au taux de réussite de l'item $[j]$.
   Si l'on ne peut tirer aucune information à partir du motif des réponses d'un élève, alors n'utiliser que l'information concernant l'item.

Cette procédure permet de construire un jeu de données complet aussi proche que possible du modèle déterministe de Guttman (1944, 1950).
Le score d'un élève se détermine en effectuant la somme des points qu'il obtient sur l'ensemble des 113 items. Cette somme est pondérée de telle sorte que chaque problème contribue de la même manière au score final. Le score final prend théoriquement une valeur comprise entre 0 et 56 puisqu'il y a en tout 56 problèmes. Par commodité, nous standardisons ces scores de manière à ce que la distribution des scores des élèves de Suisse romande ait une moyenne égale à 500 et un écart-type égal à 100.

4.1.2 Fidélité de l'échelle

Afin d'évaluer la qualité de l'échelle construite, nous allons calculer sa fidélité. Nous procéderons de deux manières différentes. Nous calculerons, d'une part, le coefficient alpha de Cronbach (1951) et, d'autre part, un coefficient plus spécifique développé par Mokken (1971). Ce dernier coefficient s'utilise lorsque le test employé a été construit en s'appuyant sur un modèle de la réponse à l'item non-paramétrique.

Rappelons que, selon la théorie classique des tests, le score observé d'un individu résulte simplement de la somme entre le score vrai de l'individu et l'erreur associée à ce score. Et lorsqu'on utilise un test, il est important d'avoir une idée de l'écart qui existe entre le score obtenu et le score vrai. La fidélité d'un test nous renseigne sur le degré de relation entre les deux scores. La fidélité se définit théoriquement par la corrélation entre les scores observés et les scores vrais. Lorsque cette corrélation est égale à 1 (fidélité parfaite), l'adéquation entre scores vrais et scores observés est totale, il n'y a pas d'erreur de mesure. Par contre, lorsque cette corrélation est égale à 0, cela signifie qu'il n'y a aucun lien entre les scores mesurés et les scores vrais, la mesure n'apporte aucune information (Traub, 1994). Le coefficient α de Cronbach permet d'estimer la fidélité en déterminant la proportion de la variance des scores observés qui est attribuable aux scores vrais. Lorsque le test est précis, le coefficient α de Cronbach est élevé car, dans cette situation, une grande part de la variance des scores observés est due à la variance des scores vrais et non pas à des fluctuations du hasard.

Le coefficient α de Cronbach de notre épreuve (complétée) vaut 0.951. Cela signifie que plus de 95% de la variance des scores observés est attribuable à la variance des scores vrais. Cette fidélité est excellente mais est probablement surestimée vu la manière dont nous avons imputé des valeurs aux données manquantes.

Dans un contexte non-paramétrique, il est plus approprié, pour estimer la fidélité d'un test, d'utiliser, à la place du coefficient α de Cronbach, le coefficient proposé par Mokken (1971). Ce coefficient permet d'estimer dans quelle mesure l'on obtiendrait les mêmes résultats lors d'une seconde passation hypothétique réalisée dans des conditions d'indépendance. Selon cette conception, si un test est fidèle, la corrélation théorique entre deux mesures successives indépendantes est proche de 1. Pour notre épreuve, le coefficient de fidélité calculé selon cette procédure (Mokken, 1971, pp. 142-147) vaut 0.956.

Que l'on procède classiquement en calculant la fidélité à l'aide du coefficient α de Cronbach ou selon la procédure définie par Mokken, on obtient quasiment le même résultat : la fidélité de notre épreuve semble très bonne. Afin de s'assurer que l'on n'ait pas affaire à un artefact, nous allons calculer la corrélation entre la performance effective déterminée exclusivement à partir des problèmes soumis et le score global obtenu à l'échelle de *compétences mathématiques* par construction. Ces calculs se font pour chaque cahier séparément (tableau 4.1).

Notre construction paraît cohérente. Les élèves qui possèdent de grandes compétences en mathématiques manifestent d'excellentes performances et à l'inverse les élèves ayant de piètres compétences réalisent de médiocres performances.

TABLEAU 4.1 – *Corrélation entre performance effective et compétences mathématiques inférées pour chaque cahier.*

	Cahier							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Corrélation	0.94	0.96	0.96	0.94	0.94	0.93	0.93	0.95

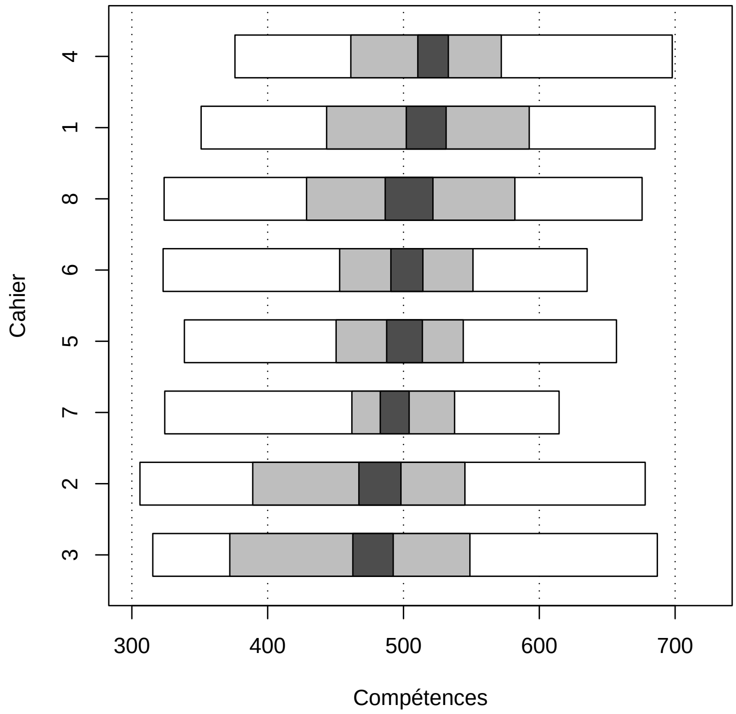
4.1.3 Biais

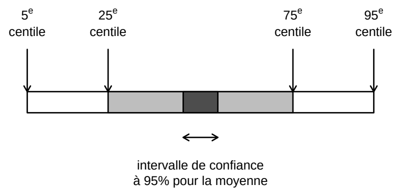
Malgré l'excellente fidélité de l'échelle *compétences mathématiques*, nous devons néanmoins signaler un léger biais. Nous espérions que les scores imputés ne dépendent pas du cahier, or cela n'est pas le cas. Le test de Welch (1951) qui permet de comparer plusieurs moyennes lorsque les variances des populations parentes ne sont pas les mêmes est significatif ($F = 5.34$, $ddl_1 = 7$, $ddl_2 = 958$, $p < 0.05$).
Représentons la distribution des scores à l'échelle de compétences selon le cahier (figure 4.1). Comparons la position de ces distributions deux à deux à l'aide du test de Bonferroni (Dunn, 1961) (figure 4.2). Seuls les élèves ayant eu à résoudre les problèmes du cahier 3 sont quelque peu désavantagés. Les compétences mathématiques que nous leur avons attribuées sont significativement inférieures à celles de leurs camarades. Rappelons que la difficulté moyenne de ce cahier est plus grande que celle des autres cahiers, d'une part, et que ce cahier est le seul à ne pas contenir de problèmes faciles, d'autre part (§ 2.3.4). Nous pourrions éventuellement corriger ce biais mais nous ne le ferons pas. En revanche, nous redoublerons de prudence lorsqu'il s'agira d'interpréter les résultats.

4.2 Seuil minimal de compétences

Nous venons d'exposer la manière dont nous attribuons à chaque élève un score à l'échelle de *compétences mathématiques*. Nous savons qu'en moyenne les élèves obtiennent 500 et que la dispersion de leurs scores vaut 100. Nous sommes en mesure de comparer la position des élèves les uns par rapport aux autres, de comparer leurs compétences donc, mais nous sommes encore incapables de savoir quelle est la proportion des élèves qui ont acquis les compétences minimales définies par le plan d'études. À partir de quel score peut-on considérer qu'un élève détient les compétences minimales ? Nous allons présenter maintenant la méthode que nous avons utilisée pour déterminer le score seuil. De nombreuses méthodes ont été créées pour construire de la façon la plus valide possible des scores seuils, on en trouve une large présentation dans l'ouvrage de De Landsheere (1988). Parmi toutes ces méthodes, nous nous sommes plus particulièrement inspirés de la méthode de Jaeger (1982, 1989)

FIGURE 4.1 – *Distribution des scores à l'échelle de compétences mathématiques selon le cahier. Chaque distribution est caractérisée par un intervalle de confiance à 95% pour sa moyenne et les résultats aux 5^{e}, 25^{e}, 75^{e} et 95^{e} centiles.*



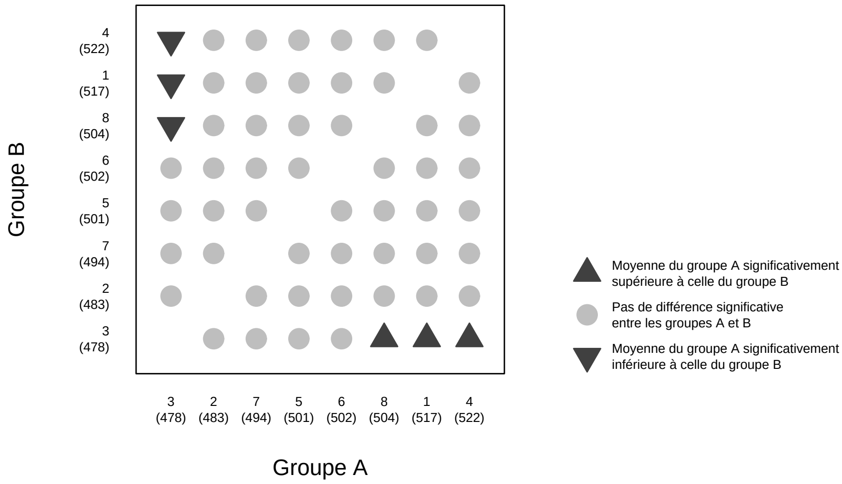


qui se base sur le contenu du test. Son principe général est simple : plusieurs juges de formation différente passent en revue le contenu des items et, sur cette base, décident du niveau de performance suffisant pour réussir le test. Décrivons précisément la procédure que nous avons utilisée.

4.2.1 Procédure

Cette méthode permet d'éviter le problème de la référence générale, et finalement assez abstraite, à un élève possédant des compétences minimales. Cette

Figure 4.2 – *Comparaison des compétences des élèves ayant reçu des cahiers différents. Les élèves du groupe i résolurent les problèmes du cahier i. Les compétences moyennes de chaque groupe sont indiquées entre parenthèses.*



méthode est itérative, elle fait appel à des juges de formations différentes et utilise des données normatives. Elle consiste en une suite de réévaluations des mêmes items associée à la communication d'informations à propos de ces items. Nous avons réuni, durant une journée, 12 juges parmi lesquels on compte 4 enseignants, 4 formateurs d'enseignants et 4 chercheurs experts en évaluation.
Avant d'évaluer les problèmes de l'épreuve de mathématiques, les juges ont été invités à résoudre eux-mêmes les problèmes afin qu'ils se familiarisent avec les items qu'ils allaient devoir évaluer. Nous leur avons ensuite présenté la grille de correction, puis nous leur avons demandé, pour chacun des 113 items de notre épreuve, de répondre à la question suivante :

> Supposons que, dans une classe de vingt, tous les élèves possèdent en mathématiques les compétences minimales exigées par le plan d'études romand en fin de 4^{e} année primaire.
>
> Pour chaque item du test, indiquez le nombre d'élèves capables d'y répondre correctement ?

Lorsque tous les items ont été évalués une première fois, les juges se réunissent selon leur profession et s'informent mutuellement de leurs estimations. Après cette discussion, nous communiquons aux juges la proportion d'élèves ayant réussi chacun des items du test. Après de nouveaux échanges, les juges sont invités à réévaluer individuellement tous les items.
À partir de la deuxième évaluation des juges, on calcule le taux de réussite estimé médian de chaque item. Le score seuil de référence est alors déterminé en calculant la somme pondérée de ces taux de réussite médians.

Implicitement, les juges estiment la probabilité qu'un élève ayant les compétences minimales résolve correctement chaque item. Cette probabilité correspond aussi à l'estimation de l'espérance mathématique de chaque item (rappelons que les items sont tous dichotomiques, ils ne peuvent prendre que 0 ou 1 comme valeur). En sommant l'espérance de chaque item, l'on obtient la valeur de l'espérance de la somme des items, en d'autres termes le score global que devrait obtenir en moyenne un élève possédant les compétences minimales.

4.2.2 Évaluations successives

De la première à la seconde évaluation, les appréciations des juges évoluent. Pour mieux s'en rendre compte, représentons la distribution des différences entre le taux de réussite estimé de chaque item et son taux de réussite observé lors des deux évaluations (figure 4.3).

Lors des deux évaluations, les taux de réussite attendus par les juges sont supérieurs aux taux de réussite observés (les médianes des deux distributions représentées dans la figure 4.3 sont placées au-dessus de 0).

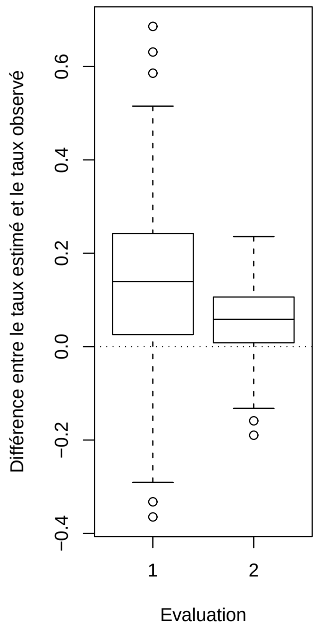
L'information fournie aux juges entre les évaluations a deux conséquences sur leurs appréciations. La première concerne l'écart moyen entre le taux de réussite attendu et le taux de réussite observé. Cet écart diminue. Lors de la seconde évaluation, les taux de réussite estimés par les juges sont plus proches des taux observés. La deuxième conséquence concerne la dispersion des écarts entre taux estimés et taux observés. Sans information, l'écart entre taux estimés et taux observés se situe *grosso modo* entre -0.3 et 0.5. Avec information, la dispersion des écarts est beaucoup plus faible, la valeur des écarts oscille entre -0.1 et 0.2. Les juges ajustent donc leurs évaluations aux observations. Ces dernières leur permettent de mieux cibler leurs estimations. Une analyse *a priori* très fine des problèmes permet souvent d'établir leur ordre de difficulté mais sans quelques informations complémentaires, il est quasiment impossible d'ancrer correctement les estimations. À l'instar de De Landsheere (1988, p. 147), il faut souligner que « les données normatives ne doivent jouer qu'un rôle informatif, sinon la notion absolue de compétence minimale perd par définition une bonne partie de sa signification ». Nous ne sommes malheureusement pas en mesure de prouver que ce fut bien le cas pour nos juges. Ceci est l'une des limites de la méthode.

4.2.3 Taux de réussite estimés et observés

Comparons le taux de réussite de chaque item estimé par les juges lors de la seconde évaluation à son taux de réussite observé. La figure 4.4 représente les 113 items ordonnés selon leur facilité. Les items placés à gauche sont les plus difficiles, leur taux de réussite est très faible. Les items placés à droite sont les plus faciles, leur taux de réussite est grand, il avoisine 1.

Bien que l'on observe globalement une bonne adéquation entre les taux de

FIGURE 4.3 – *Différence entre le taux de réussite estimé par les juges et le taux de réussite observé avant et après information – évaluations 1 et 2 respectivement. Les distributions des différences sont représentées par des boîtes à moustaches.*



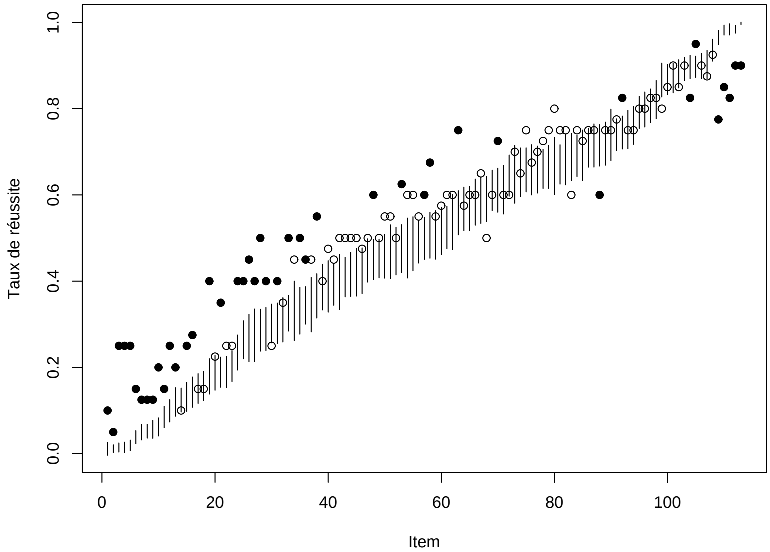
Note : Rappelons que pour construire une boîte à moustaches, il faut déterminer la valeur du premier quartile $Q1$, du deuxième quartile $Q2$ (*i.e.* la médiane), du troisième quartile $Q3$, ainsi que la valeur des adjacentes inférieure et supérieure. L'adjacente inférieure est la plus petite valeur observée plus grande ou égale à $Q1 - 1.5\ (Q3 - Q1)$. L'adjacente supérieure est la plus grande valeur observée plus petite ou égale à $Q3 + 1.5\ (Q3 - Q1)$. La largeur de la boîte est arbitraire. Sa hauteur est définie par l'intervalle compris entre $Q1$ et $Q3$. La boîte est partagée par un trait dont la hauteur est définie par $Q2$. Les adjacentes inférieure et supérieure définissent quant à elles les extrémités des moustaches. Les observations extrêmes, prenant une valeur plus petite que l'adjacente inférieure ou plus grande que l'adjacente supérieure, sont représentées par de petits ronds.

réussite observés et les taux de réussite souhaités par les juges, on s'aperçoit que les juges s'attendaient à ce que les problèmes les plus difficiles soient mieux réussis et que les plus faciles le soient un peu moins bien (dans la figure 4.4, les points noirs se trouvent en-dessus des taux observés à gauche et en-dessous à droite).

4.2.4 Taux de réussite attendus selon les modules

Voyons maintenant si les attentes des juges dépendent des modules. Nous avons montré dans le paragraphe 2.3.4 que la difficulté des problèmes dépend du module auquel il appartient ; nous avons vu par exemple qu'un problème multiplicatif est généralement plus difficile qu'un problème additif. Les experts en tiennent-ils compte lorsque nous leur demandons d'estimer les taux de réussite

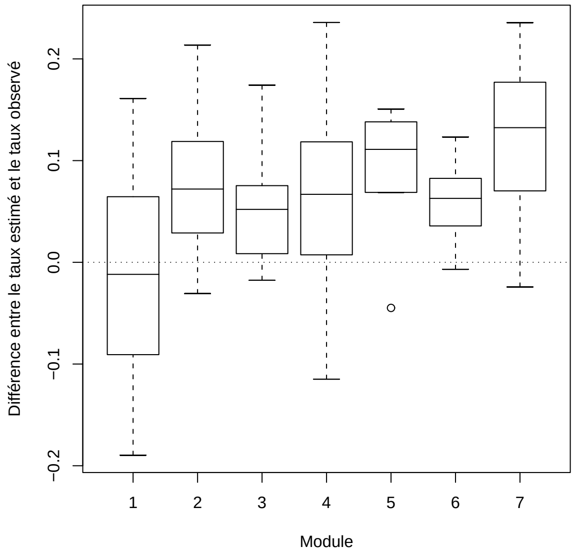
FIGURE 4.4 – *Taux de réussite estimés et observés des 113 items de l'épreuve de mathématiques. Le taux de réussite observé de chaque item est représenté par un intervalle de confiance à 95% (traits verticaux). Le taux de réussite estimé médian de chaque item est représenté par un point. Ce point est blanc, lorsque l'estimation médiane faite par les juges se situe à moins de 4 erreurs standard du taux observé ; il est noir, lorsque l'estimation faite par les juges se situe au delà de 4 erreurs standard du taux observé.*



des élèves possédant les compétences minimales requises par le plan d'études ? Pour répondre à cette question, représentons la distribution des écarts entre les taux de réussite des items fixés par les juges et les taux de réussite observés en Romandie selon les modules (figure 4.5).

Les distributions des différences pour tous les modules, à l'exception du premier, se situent quasiment à la même position au dessus de zéro. Cela signifie, d'une part, que les taux de réussite des élèves ayant les compétences minimales fixées par les juges sont très souvent supérieurs aux taux de réussite de l'ensemble des élèves romands et que, d'autre part, les juges modulent leurs appréciations en fonction du contenu mathématique des problèmes – s'ils ne l'avaient pas fait, les distributions des différences ne se trouveraient pas à la même position. Le premier module se singularise des autres. Dans le domaine de la logique, les performances des élèves romands sont aussi bonnes que celles des élèves qui possèdent (selon les juges) les compétences minimales – la distribution des différences est centrée sur 0. Rappelons que les connaissances évaluées par des problèmes comme *Douceurs* ou *Carrés, ronds et triangles*, qui appartiennent au module 1, ne font pas, dans les nouveaux moyens, l'objet d'enseignement direct. Les juges, le sachant bien évidemment, en tinrent compte

FIGURE 4.5 – *Différence entre les taux de réussite des items fixés par les juges et les taux de réussite observés selon les modules.*



et abaissèrent leurs exigences comparativement aux autres modules. Une autre explication pourrait être que les élèves ayant bénéficié des nouveaux moyens ont acquis des connaissances en logique indirectement grâce aux nombreuses tâches de recherche qui leur ont été proposées, ces connaissances seraient en quelques sorte un bénéfice secondaire de la nouvelle méthode d'enseignement des mathématiques.

4.2.5 Calcul du seuil

Le seuil de compétences minimales se calcule à partir des taux de réussite fixés par les juges. Ce seuil est égal à la somme pondérée des taux de réussite de tous les items. La pondération d'un item est égale à l'inverse du nombre d'items composant le problème dont il fait partie. Ainsi, chaque problème contribue de la même manière au score global.

Le problème *Douceurs*, par exemple, est formé de 4 items. Selon les juges, les taux de réussite à ces items devraient être pour des élèves possédant les compétences minimales 0.60, 0.83, 0.55 et 0.80 respectivement. Pour ce problème, la pondération des items est égale à 1/4 et, en moyenne, un élève ayant les compétences minimales requises devrait obtenir un score de $\frac{1}{4} \cdot 0.60 + \frac{1}{4} \cdot 0.83 + \frac{1}{4} \cdot 0.55 + \frac{1}{4} \cdot 0.80 = 0.70$ point.

Sur le même principe, il est possible de calculer le score moyen de chaque problème. La somme de ces scores moyens fournit le score seuil que devrait obtenir un élève possédant les compétences minimales. Ce score seuil est égal à 26.8 points.

La distribution des scores à l'épreuve complète a une moyenne de $\hat{\mu} = 22.9$ et un écart-type de $\hat{\sigma} = 8.9$. Si l'on standardise ces scores de telle sorte que leur moyenne soit égale à 500 et que leur écart-type soit égal à 100, le score seuil prend alors comme valeur :

$$500 + 100 \cdot \frac{26.8 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = 544.$$

4.3 Détermination de la proportion d'élèves possédant les compétences minimales

4.3.1 En Suisse romande

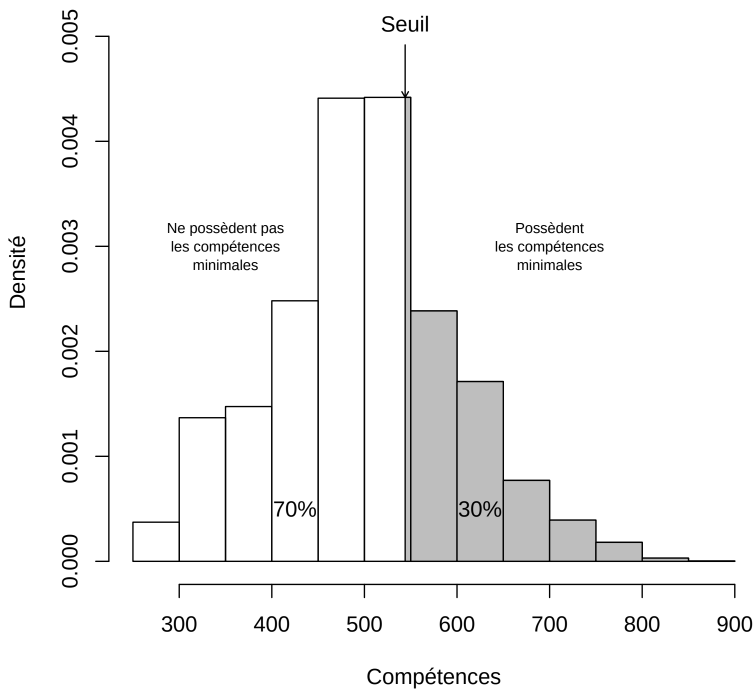
Maintenant le seuil minimal de compétences déterminé, il est possible d'estimer la proportion des élèves de 4P qui, en Suisse romande, possèdent les compétences minimales exigées par le plan d'études romand en fin de 4^{e} année primaire. Cette proportion s'élève à 30% (l'erreur standard de l'estimation vaut 1.2%) (figure 4.6). Selon les juges, donc, trois élèves sur dix seulement atteignent les objectifs minimaux.

Ce résultat peut paraître surprenant mais il était prévisible vu les taux de réussite fixés par les juges. Comme nous l'avons montré dans le paragraphe 4.2.3, les taux de réussite des élèves possédant les compétences minimales sont très souvent supérieurs aux taux de réussite observés. Or les taux de réussite observés reflètent la position de l'ensemble des élèves romands, ils représentent également ce que rapportent les items en moyenne à chaque élève romand. Ainsi, en moyenne, les élèves obtiennent moins de points qu'il leur en aurait fallu pour être considérés comme suffisamment compétents. Il s'ensuit donc que globalement une majorité d'élèves obtient un score inférieur au seuil minimal de compétences.

La procédure que nous avons utilisée pour définir le seuil minimal de compétences est, par rapport, à la méthode originale de Jaeger (1982, 1989) tronquée. Nous n'avons demandé à nos juges que deux évaluations ; Jaeger, quant à lui, en demande trois. Jaeger détermine, à partir de la deuxième évaluation, la proportion d'élèves qui possèdent un niveau de compétences supérieur au seuil minimal et en informe les juges qui peuvent alors, s'ils le souhaitent, rectifier une dernière fois leurs appréciations. Si nous avions procédé ainsi, nos juges auraient peut-être abaissé leurs exigences et du même coup décidé d'augmenter la proportion d'élèves que l'on peut considérer comme compétents.

Pour fixer les taux de réussite, les experts s'aidèrent de documents officiels dans lesquels les objectifs à atteindre au terme de la 4^{e} année primaire sont tous listés. Certains y recoururent sans concession. Le problème *Mille millions de mille sabords*, par exemple, ne peut être résolu correctement que si l'élève est capable de passer d'un mot-nombre à son écriture chiffrée. Or l'acquisition de cette compétence est un objectif du deuxième cycle primaire pour autant

FIGURE 4.6 – *Distribution des compétences des élèves romands et seuil minimal de compétences. L'aire grisée représente la proportion des élèves qui possèdent les compétences minimales.*



que le nombre soit inférieur ou égal à 10 000 (DIPAC, 2000, 2001). Plusieurs juges imposèrent donc, sans transiger, un taux de réussite de 100% lorsque le nombre à écrire ne dépassait pas 10 000. Un élève de 4P doit être aussi capable de résoudre des problèmes additifs, soustractifs, multiplicatifs et divisifs. C'est pour cette raison que certains juges fixèrent, sans tergiverser, le taux de réussite au problème *Les calculs de Kata* à 100%. Ces exemples montrent que les juges firent parfois une lecture très stricte des documents officiels et ne tinrent pas toujours compte du fait qu'un élève compétent peut aussi se tromper.

Ces quelques critiques n'altèrent pas fondamentalement la validité des résultats. La conclusion est indubitable : les objectifs de 4^{e} année ne sont atteints que par une minorité d'élèves.

La proportion d'élèves de 4P possédant les compétences minimales n'ayant jamais été déterminée en Suisse romande, nous manquons cruellement de point de comparaison. Il y a dix ou vingt ans, la situation était peut-être la même ! Cependant cette proportion nous paraît très faible. Précisons toutefois que le seuil que nous avons défini ne correspond pas aux balises du Plan cadre romand (CIIP, 2004 ; Pasquier, 2004). Ces dernières définissent, rappelons-le,

le niveau seuil dont le dépassement doit être vérifié et assuré chez chaque élève. Les exigences fixées par les balises devront nécessairement être beaucoup plus modestes que celles fixées par nos juges qui firent une interprétation rigoureuse du plan d'études. Le seuil que nous avons construit correspond peut-être mieux au niveau des élèves ayant atteint ce qui est nommé dans le Plan cadre *l'horizon de développement*.
Comment rendre compte du fort décalage entre les objectifs visés et les buts atteints ? Nous envisagerons sommairement trois hypothèses.
La première se focalise sur les objectifs. Ces derniers seraient trop ambitieux et exigeraient trop de la part des élèves. Dans cette perspective, le décalage observé serait dû à des objectifs déraisonnables. La deuxième incriminerait plutôt les moyens d'enseignement. Ceux-ci ne permettraient pas d'atteindre les objectifs du plan d'études. Les choix des séquences d'activités faits par les enseignants ne contraindraient pas suffisamment les élèves à acquérir les compétences souhaitées. Selon la troisième hypothèse, le décalage observé serait tout bonnement nécessaire au déroulement de l'enseignement, il créerait l'impulsion indispensable à la transmission et à l'acquisition de nouveaux savoirs. Nous reviendrons sur ces quelques suppositions dans la conclusion de notre rapport. Voyons maintenant s'il existe des différences entre les cantons.

4.3.2 Dans les cantons

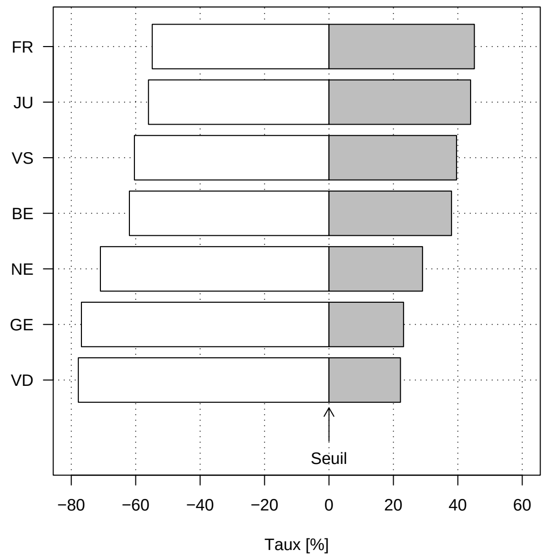
Déterminons, pour chaque canton de Romandie, la proportion d'élèves possédant les compétences mathématiques minimales. Cette proportion s'estime en calculant la proportion des élèves ayant obtenu un score supérieur ou égal au seuil minimal (tableau 4.2).

Tableau 4.2 – *Proportion des élèves qui possèdent les compétences minimales selon les cantons.*

	Canton						
	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD
Proportion [%]	38	45	23	44	29	40	22
Erreur standard [%]	3.6	3.1	3.0	2.9	2.9	3.2	2.3

Bien que, dans tous les cantons, la majorité des élèves ne possèdent pas les compétences minimales, il y a entre les cantons d'importantes différences. Pour preuve, du canton le plus faible au canton le plus fort, la proportion d'élèves compétents passe du simple au double.
Les cantons les plus faibles sont les cantons de Vaud, de Genève et de Neuchâtel. Les plus forts sont les cantons de Fribourg et du Jura. Les cantons du Valais et de Berne occupent une position intermédiaire (figure 4.7).
Nous nous limiterons momentanément à ce constat, mais nous reviendrons à la question des différences intercantonales au chapitre 7 et l'approfondirons.

FIGURE 4.7 – *Répartition des élèves possédant les compétences minimales ou non selon les cantons. Les surfaces grisées représentent les proportions d'élèves possédant les compétences minimales.*



Chapitre 5

L'apprentissage des mathématiques au fil du temps

Dans ce chapitre, nous présenterons deux démarches comparatives. Dans la première démarche, nous comparerons les résultats des élèves évalués en fin de 4P dans la cadre de cette seconde phase de l'enquête Mathéval, à ceux des élèves évalués il y a deux ans en fin de 2P dans le cadre de la première phase de la même enquête (Antonietti, 2003b). Cette comparaison est rendue possible par le fait que les problèmes mal réussis du test soumis aux élèves en fin de 2P ont été inclus dans le test passé en fin de 4P. La démarche est quasi longitudinale, puisqu'il s'agit de la même volée d'élèves ayant suivi le même curriculum de mathématiques, les élèves des deux échantillons ne sont néanmoins pas les mêmes (l'échantillon des élèves de 4P a été constitué indépendamment de la composition de l'échantillon des élèves interrogés en 2P).
La deuxième comparaison est basée sur les problèmes empruntés à l'enquête réalisée par l'IRDP (Hutin et al., 1991) pour évaluer l'ancien curriculum de mathématiques. Les résultats des élèves évalués en fin de 4P en 2004 seront donc appréciés en fonction de ceux des élèves évalués en début de 5^{e} en 1979[1]. Nous sommes en présence ici de deux populations distinctes d'élèves ayant appris les mathématiques avec des méthodes et des moyens d'enseignement différents.
La première démarche comparative a pour principal enjeu l'appréciation de l'évolution des compétences en résolution de problèmes mathématiques. La question est de savoir si, en fin de 4P année, les élèves parviennent à résoudre les problèmes sur lesquels ils auraient buté deux années plus tôt. Cette question est importante car les nouveaux moyens misent sur un développement progressif des compétences en résolution de problèmes et s'appuient sur l'utilisation de

[1]Rappelons que les anciens moyens, mis en place dans le cadre de la réforme dite des mathématiques modernes, ont été évalués en suivant la même cohorte d'élèves de la 1re en 1975 à la 6^{e} en 1981. Le niveau de fin de quatrième a été évalué à la rentrée de septembre 1979 dans les classes de cinquième.

situations didactiques fondamentales reprises et approfondies chaque année.
Les motivations de la deuxième démarche comparative sont un peu différentes. Les problèmes empruntés au test passé en 1979 étaient conçus pour évaluer le degré d'acquisition des connaissances mathématiques dans les différents domaines constitutifs des anciens moyens. Les nouveaux moyens poursuivent bien évidemment l'acquisition des mêmes connaissances en tant que composantes essentielles de la capacité de résolution de problèmes, mais les approches didactiques sont nettement différentes, comme nous l'avons montré dans le rapport de la première phase de cette enquête (Antonietti, 2003b). La question est alors de savoir quelles sont les répercussions de ce changement d'approche didactique sur l'acquisition des connaissances mathématiques.
L'expérimentation des nouveaux moyens de la 1re à la 4e année entre 1995 et 1999 a apporté les premiers éléments de réponse à cette question (Genoud, 1999 ; Genoud & Jacquet, 2000). En comparant les résultats d'un groupe d'élèves ayant utilisé les nouveaux moyens à ceux du groupe apparié d'élèves qui avaient utilisés les anciens moyens, il est apparu que le premier groupe réussissait moins bien les tâches de calcul alors qu'il était meilleur en résolution de problèmes plus complexes. À la suite de cette expérimentation, les nouveaux moyens ont été retouchés avant que leur utilisation soit généralisée dans toutes les écoles romandes. Nous verrons où se situent les élèves qui les utilisent par rapport à ceux qui ont travaillé avec les anciens moyens.

5.1 Évolution de la 2P à la 4P

Les six problèmes servant de base à la comparaison entre les élèves de 2P et ceux de 4P touchent quatre modules des nouveaux moyens d'enseignement sur les sept. Trois d'entre eux relèvent du domaine numérique : *Le goûter*, *Les bonbons* et *Le voyageur de commerce intergalactique*. Les trois autres s'apparentent au domaine géométrique : *Le ver à fruit*, *Les cubes* et *Les remparts*.
En 2P, *Le goûter*, *Les bonbons*, *Le voyageur de commerce intergalactique* ont été résolus par groupes de deux ou trois élèves. *Les remparts* et *Les cubes* ont été résolus individuellement. En 4P, tous les problèmes ont été résolus individuellement.
Le niveau de réussite à chaque problème est évalué à l'aide d'une échelle ordinale à trois modalités : *échec* (− −), *réussite partielle* (− +) et *réussite* (+ +), selon les mêmes critères en 4P qu'en 2P. Afin d'estimer les progrès des élèves entre la 2P et la 4P, nous nous basons sur les différences de taux de réussite, de réussite partielle et d'échec entre les deux groupes. Ces taux sont représentés dans le tableau 5.1. Les résultats du test du χ^2 indiquent si les différences observées sont significatives au seuil de 5% ou peuvent être attribuées au hasard.
Les progrès significatifs sont enregistrés uniquement au niveau des trois problèmes de géométrie. *Les cubes* et *Les remparts* ont été mieux réussis en 4P qu'en 2P. *Le ver à fruit* est également mieux réussi en 4P bien que le taux

TABLEAU 5.1 – *Comparaison des niveaux de réussite entre élèves de 2P et élèves de 4P. Les taux sont exprimés en pourcent.*

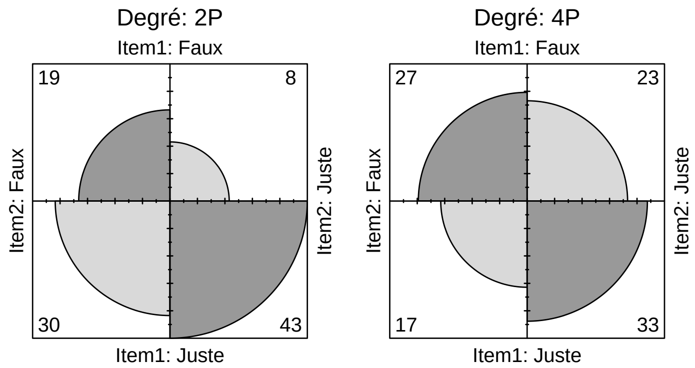
		Réussite				
Problème	Degré	$--$	$-+$	$++$		
Le goûter	2P	14	43	43		
	4P	13	38	49	$\chi^2 =$ 4.3	$p > 0.05$
Les bonbons	2P	42	9	49		
	4P	38	7	55	$\chi^2 =$ 5.2	$p > 0.05$
Le voyageur	2P	19	38	43		
de commerce	4P	27	40	33	$\chi^2 =$ 12.5	$p < 0.05$
Le ver à fruit	2P	12	54	34		
	4P	24	34	42	$\chi^2 =$ 46.6	$p < 0.05$
Les cubes	2P	58	6	37		
	4P	29	6	65	$\chi^2 =$ 125.7	$p < 0.05$
Les remparts	2P	32	17	51		
	4P	22	10	68	$\chi^2 =$ 42.7	$p < 0.05$

d'échec y soit plus élevé, probablement parce qu'en 2P, le problème fut traité en groupe.

Au niveau des trois problèmes numériques, les résultats des élèves de 4P n'indiquent pas un meilleur niveau de compétences qu'en 2P. Au problème *Le goûter* comme à celui *Les bonbons*, les taux de réussite sont légèrement meilleurs en 4P qu'en 2P mais les différences ne sont pas statistiquement significatives. Quant au problème *Le voyageur de commerce intergalactique*, les résultats sont tout à fait inattendus puisque les élèves de 2P réussissent mieux que les élèves de 4P (taux d'échec plus bas et taux de réussite plus élevé). Cette situation paradoxale que les conditions de passation différentes (en groupe *versus* individuel) n'expliquent pas entièrement, nous a incité à regarder plus en détail les résultats aux deux items du problème. Rappelons que le premier item consiste à représenter graphiquement l'itinéraire à emprunter pour se rendre d'Aldébaran à la planète du Dragon, le deuxième à calculer la durée du trajet le plus court. Si les deux items sont justes, alors le problème est réussi ; si un seul item est juste, alors le problème n'est réussi que partiellement et si aucun des items n'est juste, le problème est raté.

En croisant les taux de réussite et d'échec aux deux items en 2P et en 4P (figure 5.1), on retrouve les résultats présentés dans le tableau 5.1 : 43% des élèves de 2P réussissent le problème, alors qu'il n'y a que 33% des élèves de

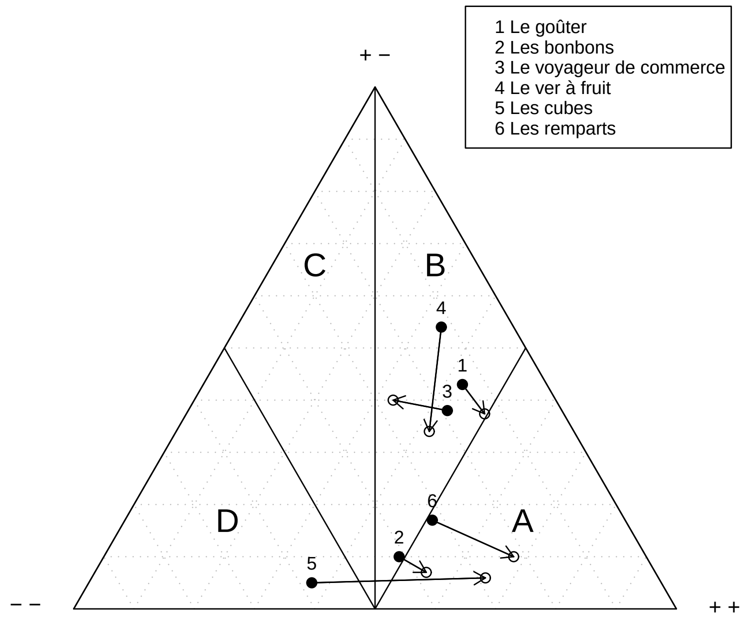
FIGURE 5.1 – *Taux de réussite et d'échec aux deux items du problème* Le voyageur de commerce intergalactique *en 2P et en 4P. L'aire de chaque quartier est proportionnelle à son taux. Les nombres inscrits dans les coins sont les taux exprimés en pourcent.*



4P qui le réussissent. Mais, si pour réussir le problème il suffisait de répondre correctement à l'item 2, alors l'ordre serait inversé : le taux de réussite serait légèrement plus élevé en 4P (56%) qu'en 2P (51%). En effet, beaucoup d'élèves de 4P calculent correctement la durée du trajet entre Aldébaran et la planète du Dragon sans définir l'itinéraire ou dessiner la trajectoire. Or le calcul correct de la longueur du trajet suppose une bonne représentation mentale du trajet ainsi l'absence de représentation graphique pourrait être interprétée comme un indice de progrès. On sait en effet que les élèves recourent de plus en plus aux stratégies numériques ou abstraites et de moins en moins aux stratégies concrètes ou graphiques, au fur et à mesure du développement des compétences en résolution de problèmes (Carpenter & Moser, 1982). Il est en tout cas évident que les compétences des élèves de 4P n'ont pas régressé comme on pourrait le croire au vu des résultats concernant le problème *Le voyageur de commerce intergalactique*. Une remarque similaire peut être faite à propos de l'énigme *Le goûter*. Il est plus difficile d'interpréter les démarches et les erreurs en 4P, car les élèves de 4P ont moins recours que les élèves de 2P à des représentations. Ceux-ci s'aidaient de dessins et de flèches alors que, le plus souvent, les élèves de 4P ne placent que le nom des enfants sans même établir de relation entre ces noms et les déguisements correspondants.

Revenons sur les six problèmes. À la figure 5.2, nous avons représenté les progrès observés entre la 2P et la 4P à l'aide d'un trigramme dont les trois pôles correspondent aux trois modalités de l'échelle des résultats (*réussite*, *réussite partielle* et *échec*). Le trigramme est divisé en quatre zones de même aire A, B, C et D. L'aire A correspond à une compétence globalement acquise (la proportion de réussite dépasse 50%), l'aire B à une compétence plutôt acquise (la proportion de réussite est inférieure à 50% mais dépasse la proportion d'échecs), l'aire C à une compétence plutôt non acquise (la proportion des échecs est inférieure à 50% mais dépasse la proportion de réussites) et enfin l'aire D correspond à une compétence non acquise (la proportion des échecs dépasse 50%).

FIGURE 5.2 – *Représentation graphique des progrès réalisés entre la 2P et la 4P dans un trigramme*



Dans l'espace de ce trigramme, les niveaux moyens de réussite des élèves de 2P aux différents problèmes sont représentés par des points noirs, ceux des élèves de 4P par des points blancs. La flèche reliant chaque point noir au point blanc correspondant représente les progrès réalisés entre la 2P et la 4P.

Les progrès les plus importants se situent au niveau des problèmes *Les cubes* et *Les remparts* où beaucoup d'élèves ont passé de l'échec en 2P à la réussite en 4P. Au niveau du *Ver à fruit*, les progrès semblent moins importants bien que significatifs pour les raisons évoquées ci-dessus. Au niveau des trois problèmes numériques, enfin, on observe une courte distance entre les points noirs et blancs, ce qui donne l'impression d'une relative stabilité des compétences en cause.

En résumé, comparés à ceux de 2P, les élèves de 4P ont bien progressé en résolution de problèmes géométriques alors qu'en résolution de problèmes numériques

leurs compétences sont plutôt stables. Notons qu'en fin de 2P, les problèmes géométriques étaient moins bien réussis que les problèmes numériques, en raison notamment du peu d'importance qu'accordent certains enseignants aux modules géométriques durant les deux premières années. Les progrès significatifs des élèves de 4P en résolution de problèmes géométriques s'expliqueraient en partie par un regain d'importance accordé à la géométrie dès la troisième.
Les conditions de passation différentes en 2P et en 4P expliquent en partie l'apparente stabilité des compétences en résolution de problèmes numériques. Les taux de réussite totale ou partielle des élèves de 2P auraient sans doute été moins élevés en cas de passation individuelle et nous aurions peut-être enregistré des progrès significatifs des élèves de 4P.
Relevons toutefois qu'en fin de 4P, l'addition des taux d'échec et des taux de réussite partielle reste élevé même pour les problèmes géométriques. Deux ans d'apprentissage n'ont pas suffi à la majorité des élèves pour atteindre le niveau des élèves plus doués. Le temps nécessaire au développement des compétences en résolution de problèmes est long, comme de nombreuses études l'ont montré (Vergnaud & Durand, 1976 ; Rogalski, 1982). Les différences individuelles sont considérables et les effets de l'enseignement, des moyens d'enseignement, en particulier, s'avèrent limités quand on ambitionne de réduire les écarts de niveau de compétences entre élèves.

5.2 De moyens d'enseignements à d'autres

Les problèmes, au nombre de 16, ont été choisis dans les quatre avenues des anciens moyens : *Ensembles et relations* (6 tâches), *Numération* (4 tâches), *Opérations* (2 tâches), et *Découverte de l'espace* (4 tâches). Tous les modules des nouveaux moyens sont représentés, à l'exception du module 7 consacré à l'exploration et l'organisation de l'espace (tableau 5.2).
Ces problèmes sont pertinents par rapport aux nouveaux moyens, mais leur habillage est plus proche des activités des anciens moyens. De plus, comme expliqué au chapitre 2, la logique et la théorie des ensembles n'étant plus enseignées en tant que telles, les élèves évalués en 2004 sont désavantagés face aux problèmes de raisonnement logique.
Tous les problèmes ont été présentés sans modification en 2004 comme en 1979, à l'exception des six items de *Calculs neptuniens*. Ceux-ci ont été présentés en 2004 comme des calculs en ligne alors qu'ils étaient en colonne lors de l'évaluation des anciens moyens.
Cette comparaison a des limites qu'il convient de souligner au préalable. D'un côté, une partie importante des problèmes caractéristiques des anciens moyens mais inappropriées du point de vue des nouveaux moyens ont été exclus. Citons en particulier les problèmes de numération et d'opérations dans d'autres bases que la base dix, les classements à l'aide des diagrammes de Venn, de Carroll ou en arbre ainsi que les activités topologiques. D'un autre côté, ces

TABLEAU 5.2 – *Classification des problèmes dans les anciens et les nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques.*

Les sept modules des nouveaux moyens	Les quatre avenues des anciens moyens Ensembles et relations	 Numération	 Opérations	 Découverte de l'espace
Des problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement	• Douceurs • Carrés, ronds et triangles • Pierre et les autres • La balance • Classe sportive			
Des problèmes pour approcher le nombre et lui donner du sens	• Des chiffres et des nombres	• Craies et caramels • Centaines, dizaines, unités • Le plus proche		
Des problèmes pour connaître l'addition		• La glace	• Calculs neptuniens	
Des problèmes pour connaître la multiplication			• Calculs neptuniens • Les cahiers de Jean	
Des problèmes pour explorer et organiser l'espace				
Des problèmes pour approcher les figures géométriques et les transformations du plan				• Timbres poste • Solide • Prisme
Des problèmes pour mesurer				• Quadrillage

problèmes évaluent principalement l'acquisition de connaissances notionnelles et procédurales et non pas la capacité de résolution de problèmes qui constitue la visée essentielle des nouveaux moyens.

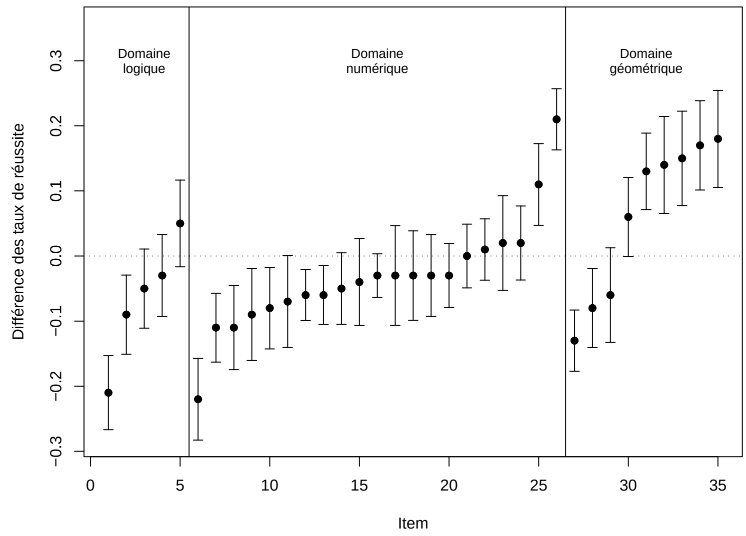
Notons enfin que les conditions de passation des épreuves ne sont pas tout à fait les mêmes pour les deux groupes. En 2004, le test a été passé au mois de mai, en fin de quatrième, alors qu'en 1979, les élèves ont été évalués en septembre, en début de cinquième. Si on tient compte des progrès éventuels entre les mois de mai et de septembre, on peut dire que les conditions de passation étaient plus favorables aux élèves testés en 1979. Cet avantage est renforcé par le fait qu'en 1979 seuls les élèves promus en cinquième ont été testés alors qu'en 2004,

les élèves en difficulté, qui étaient susceptibles de redoubler en quatrième, ont également été testés.
La comparaison des résultats des deux groupes est basée sur le taux de réussite aux 35 items compris dans les 16 problèmes. Les principaux indices sont réunis dans le tableau 5.3 et dans la figure 5.3.

Tableau 5.3 – *Résultats des élèves testés en 1979 et en 2004. Les taux de réussite sont indiqués ainsi que l'estimation de l'erreur standard de leur différence. Dans la dernière colonne nous signalons les différences statistiquement significatives : le signe − signifie que les résultats des élèves de 2004 sont moins bons que ceux des élèves de 1979 ; le signe + signifie qu'au contraire ils sont meilleurs.*

		Évaluation		Erreur	
	Item	1979	2004	standard	Différence
Domaine logique					
Douceur		0.49	0.28	0.029	−
Carrés, ronds et triangles		0.63	0.54	0.031	−
Pierre et les autres		0.56	0.61	0.034	
La balance		0.47	0.42	0.031	
Classe sportive		0.62	0.59	0.032	
Domaine numérique					
Des chiffres et des nombres		0.38	0.40	0.037	
Craies et caramels	1	0.56	0.47	0.036	−
	2	0.70	0.66	0.034	
	3	0.44	0.33	0.033	−
	4	0.69	0.47	0.032	−
Centaines, dizaines et unites	1	0.36	0.33	0.039	
	2	0.30	0.27	0.035	
	3	0.30	0.27	0.032	
	4	0.42	0.35	0.036	
Le plus proche	1	0.93	0.87	0.020	−
	2	0.48	0.59	0.032	+
La glace		0.66	0.87	0.024	+
Calculs neptuniens	1	0.92	0.89	0.017	
	2	0.85	0.79	0.023	−
	3	0.83	0.80	0.025	
	4	0.73	0.74	0.024	
	5	0.76	0.71	0.028	
	6	0.77	0.69	0.032	−
Les cahiers de Jean	1	0.59	0.61	0.029	
	2	0.34	0.23	0.027	−
	3	0.19	0.19	0.025	
Domaine géométrie					
Timbre poste		0.65	0.57	0.031	−
Solide	1	0.60	0.66	0.031	
	2	0.39	0.54	0.037	+
	3	0.52	0.69	0.035	+
Prisme	1	0.54	0.67	0.030	+
	2	0.30	0.48	0.038	+
	3	0.51	0.65	0.038	+
Quadrillage	1	0.73	0.67	0.037	
	2	0.27	0.14	0.024	−

FIGURE 5.3 – *Représentation graphique des différences des taux de réussite.*



On constate que les taux de réussite des élèves ayant travaillé avec les anciens moyens sont plus élevés dans la majorité des problèmes. Cependant, la signification statistique et la grandeur de l'écart varient en fonction de la compétence visée ou de la notion en jeu ainsi que du degré de complexité de la tâche. Il convient de distinguer trois catégories de problèmes : les tâches de raisonnement logique, les tâches de numération et d'opération et les tâches de géométrie.

En logique, les taux de réussite des élèves testés en 2004 sont souvent moins élevés que ceux de 1979. Les résultats du groupe des anciens moyens sont significativement meilleurs à deux items. Pour les trois autres items, les différences entre les deux groupes ne sont pas significatives. Les meilleurs résultats du groupe des anciens moyens aux problèmes *Douceurs* et au problème *Carrés, ronds et triangles* s'expliquent. Ces problèmes nécessitent la connaissance très spécifique du sens des connecteurs logiques dont l'apprentissage systématique a été abandonné dans le cadre des nouveaux moyens d'enseignement. Il n'est donc pas surprenant que le groupe des nouveaux moyens réussisse moins bien ces problèmes. Il est par contre intéressant de constater qu'il réussit aussi bien les autres problèmes malgré les différences d'approche didactique entre les deux curricula.

Dans le domaine de la numération et des opérations, les taux de réussite des élèves testés en 1979 sont plus élevés à la plupart des items. Les résultats du groupe des anciens moyens sont significativement meilleurs à sept items, celui des nouveaux moyens à deux items. Les différences ne sont pas significatives à douze items sur 21. Les options didactiques sous-jacentes aux nouveaux moyens d'enseignement expliquent en partie les différences entre les deux groupes. Les

activités ciblées sur les notions à acquérir, de même que les exercices d'entraînement sont plus tardifs et leur volume plus réduit dans les nouveaux moyens que dans les anciens.
En géométrie, les résultats du groupe des anciens moyens sont significativement meilleurs à deux items, celui des nouveaux moyens à cinq items. Les différences ne sont pas significatives dans deux items sur neuf. Le groupe des nouveaux moyens a réalisé les meilleurs résultats dans les items de reconnaissance et de caractérisation de volumes. Les taux de réussite du groupe des anciens moyens sont par contre plus élevés aux problèmes de construction et de manipulation de figures planes. Dans ce domaine comme dans les précédents, la présence dans les moyens d'enseignement d'activités ciblées sur les notions évaluées et leur nombre explique en partie les résultats de chaque groupe. Dans les anciens moyens, l'apprentissage des propriétés des figures géométriques était réduit jusqu'en fin de 4P au profit de la représentation des transformations dans le plan et la connaissance de figures planes élémentaires.
En résumé, le groupe des nouveaux moyens est en retard sur celui des anciens moyens principalement dans l'acquisition des outils de la numération et du calcul. En revanche, en ce qui concerne les concepts géométriques, le groupe des nouveaux moyens est en avance sur celui des anciens moyens.
L'avance ou le retard des élèves qui ont suivi les nouveaux moyens semble lié à l'importance accordée aux notions en jeu. En connaissance des propriétés des figures géométriques, leur avance est liée au fait que les anciens moyens d'enseignement n'abordaient pas assez ces notions durant les premiers degrés. Leur retard dans les problèmes nécessitant la maîtrise des connecteurs logiques s'explique par l'exclusion de ces notions dans les nouveaux moyens. De même, leur retard en numération et en calcul est lié à la place réduite réservée aux exercices d'application spécifiques aux notions et aux procédures en question. En raisonnement logique, l'option des nouveaux moyens de laisser à l'élève le temps de construire ses propres outils de pensée avant de lui apprendre les notions de logique formelle n'est pas en cause. Par contre, en numération et en opérations, le retard des élèves utilisant les nouveaux moyens incite à reconsidérer la place accordée à l'apprentissage des notions et des procédures. S'agissant du calcul, en particulier, il serait peut-être pertinent de rééquilibrer la part donnée respectivement au calcul réfléchi et au calcul automatisé dans les programmes et les moyens d'enseignement. Les deux facettes de l'enseignement du calcul devraient être conduites en parallèle plutôt qu'en alternance, comme il est suggéré dans le rapport d'une commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en France (Kahane, 2002). Nous reviendrons sur ces quelques propositions dans la conclusion de ce rapport.

Chapitre 6

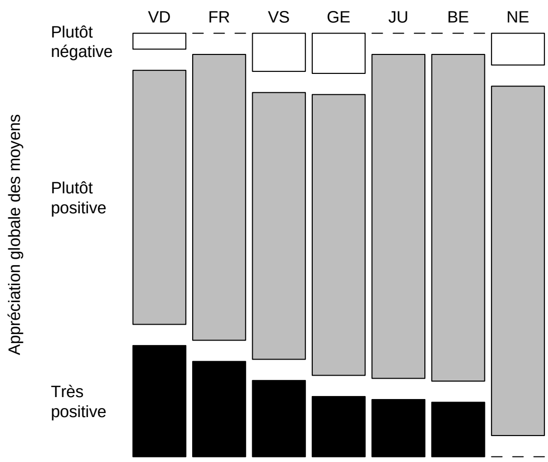
Les enseignants et leur pratique

6.1 Utilisation des nouveaux moyens d'enseignement pour les mathématiques

Les nouveaux moyens d'enseignement pour les mathématiques ont officiellement été introduits en 1997 dans les classes de 1P, en 1998 en 2P, en 1999 en 3P et en 2000 dans les classes de 4P. Près du tiers des enseignants qui ont répondu à notre questionnaire enseignent avec les nouveaux moyens depuis 1999 voire avant et 40% les utilisent depuis 2000. Ils les ont principalement utilisés dans les degrés 3 et 4.

L'appréciation des nouveaux moyens d'enseignement est globalement positive, voire très positive ; un peu moins de 5% des répondants ont une opinion plutôt négative. La figure 6.1 présente les taux de réponses aux différentes modalités selon les cantons.

FIGURE 6.1 – *Appréciation globale des nouveaux moyens selon les cantons.*



Pour compléter ces questions liées à l'appréciation de ces moyens, nous avons mis en évidence les principaux points positifs et négatifs relevés par les enseignants. Les points positifs les plus souvent cités sont *l'aspect ludique et motivant de l'apprentissage* ainsi que *la variété des activités et des formes de travail*. En ce qui concerne les points négatifs, six enseignants sur dix citent *le manque d'exercices d'entraînement ou de consolidation proposés*.
Les tableaux 6.1 et 6.2 présentent les principaux points relevés pour ces questions avec la proportion de répondants les ayant mentionnés.

Tableau 6.1 – *Principaux points positifs cités par les enseignants concernant les nouveaux moyens.*

Points positifs	Citations
L'aspect ludique et motivant de l'apprentissage et le plaisir engendré pour les élèves	62%
La variété des activités et des formes de travail	48%
La possibilité de développer des facultés de réflexion et de raisonnement	38%
La présentation du matériel et son attractivité	36%
La collaboration	34%
Les contenus intéressants	32%
La possibilité de différencier plus facilement	13%

Tableau 6.2 – *Principaux points négatifs cités par les enseignants concernant les nouveaux moyens.*

Points négatifs	Citations
Le manque d'activités d'automatisation, de consolidation	60%
La structure floue des activités proposées	25%
L'inadaptation à certaine catégories d'élèves	21%
La difficulté des consignes	21%
Les problèmes de discipline et de gestion de classe	14%
La difficile gestion du temps	13%
La difficulté à évaluer	13%

Dans les points positifs, il est intéressant de constater que les nouveaux moyens semblent permettre à une majorité d'enseignants de mettre en place des formes d'apprentissages peu contraignantes et moins directives que par le passé. Les deux principales remarques faites sont centrées sur les interactions entre enseignants et enseignés et relèvent la motivation engendrée par la variété des activités proposées ainsi que la possibilité offerte de concevoir l'enseignement des mathématiques de façon ludique. En considérant le principal point négatif cité par une majorité d'enseignants, on peut s'étonner de relever que ces répondants semblent être déstabilisés parce que les activités pédagogiques plus traditionnelles, basées sur une pédagogie de la répétition des tâches et de la consolidation des acquis, sont quelque peu délaissées au profit d'autres types d'activités qui sont, par ailleurs, appréciées aussi bien de ces mêmes enseignants que des élèves !

Il est intéressant de constater que la variété des activités proposées et les formes de travail soient accueillies favorablement par près de la moitié des répondants. Il est, en revanche, étonnant de relever que, parmi ceux qui reconnaissent l'aspect ludique et motivant de l'apprentissage comme étant l'un des principaux points positifs, 62% regrettent simultanément le manque d'activités d'automatisation et de consolidation.

La dernière question consacré à l'utilisation des nouveaux moyens concernait leur utilisation possible avec tous les élèves. Les réponses relevées nous montrent que près des deux tiers des enseignants estiment qu'ils peuvent être utilisés avec tous les élèves. Toutefois, des différences cantonales doivent être soulignées. Dans les cantons de Genève et Neuchâtel, les enseignants qui affirment le contraire sont majoritaires. C'est en Valais que nous trouvons la plus forte proportion de répondants qui estiment que les moyens peuvent être utilisés avec tous les élèves.

Les justifications données par les enseignants qui estiment que ces nouveaux moyens ne sont pas utilisables avec tous les élèves sont liées aux difficultés des élèves. Les réticences les plus fréquentes concernent l'utilisation de ces moyens avec *des élèves faibles* (22% des répondants mentionnent cette catégorie d'élèves), *des élèves présentant des difficultés de lecture* (21%), ou *des élèves allophones* (16%).

Notons encore que les 99% des répondants qui estiment que les nouveaux moyens d'enseignement sont utilisables pour tous les apprécient globalement plutôt positivement. Et, parmi ceux qui pensent qu'ils ne sont pas utilisables pour tous, 90% ont tout de même une opinion favorable de ces moyens. Il est plus étonnant de constater que le tiers des enseignants qui ont une opinion plutôt négative des moyens d'enseignement estiment tout de même qu'ils permettent d'atteindre en grande partie les objectifs fixés.

6.2 Pratique et gestion

Après avoir passé en revue les questions concernant l'utilisation des nouveaux moyens, nous proposons ci-dessous une analyse des pratiques des enseignants en classe, et leur gestion de l'enseignement des mathématiques. Dans un premier temps, il était demandé aux enseignants de citer les principaux objectifs de connaissances, de méthodes et d'attitudes, qu'ils se proposaient d'atteindre par leur enseignement.

6.2.1 Objectifs à atteindre

L'objectif de connaissances cité par une majorité d'enseignants est *le calcul comme objectif en soi.* La moitié des répondants mentionnent *les techniques et les étapes de résolution de problèmes* comme objectif de méthodes. En ce qui concerne les objectifs d'attitudes, quatre répondants sur dix citent *la collaboration.*
Les pourcentages de citations des différentes catégories sont présentés dans les tableaux 6.3, 6.4 et 6.5.

TABLEAU 6.3 – *Objectifs de connaissances cités par les enseignants.*

Objectifs de connaissances	Citations
Le calcul comme objectif en soi	60%
La numération	33%
La compréhension des visées du problème	27%
Le calcul comme outil	15%

TABLEAU 6.4 – *Objectifs de méthodes cités par les enseignants.*

Objectifs de méthodes	Citations
Les techniques, les étapes de résolution de problèmes	48%
Le développement d'un esprit général de recherche	33%
Le calcul comme objectif en soi	19%
Le calcul comme outil	13%

En observant les objectifs de connaissances et de méthodes cités, il est intéressant de constater que le calcul et la numération ainsi que les techniques de résolution de problèmes sont ceux qui sont le plus fréquemment cités. Comme nous le verrons ci-après, les objectifs de savoir et de savoir-faire liés au calcul sont abordés dans les modules qui sont considérés par les enseignants comme étant les plus importants et qui se retrouvent classés dans les premiers rangs des hiérarchies établies par nos répondants. Cette cohérence dans les réponses tend à prouver que le corps enseignant semble effectivement privilégier le travail avec les nombres et les opérations.

TABLEAU 6.5 – *Objectifs d'attitudes cités par les enseignants.*

Objectifs d'attitudes	Citations
La collaboration	42%
La prise en charge de la tâche	31%
La persévérance	21%
L'autonomie	16%
L'écoute, le respect	16%

En regardant les objectifs d'attitudes, nous remarquons que la collaboration, citée par plus de 40% des répondants, est un objectif que les enseignants cherchent également à atteindre. En observant la part du temps d'enseignement des mathématiques accordée à des activités pour lesquelles de la collaboration est requise, nous constatons qu'elle représente environ la moitié du temps total consacré aux mathématiques. Il n'est dès lors pas étonnant de relever que les enseignants qui citent la collaboration comme objectif prioritaire accordent, en moyenne, plus de temps aux activités en duos mais également aux activités en groupes que ceux qui ne citent pas cet objectif. Concernant ceux qui citent l'autonomie, nous constatons qu'ils n'accordent, en moyenne, pas plus d'importance aux activités individuelles que les autres répondants.

6.2.2 Organisation générale du travail

La question suivante nous permet d'appréhender la manière dont les enseignants répartissent leur temps de travail entre les trois types d'activités : individuelles, en duos ou en groupes. En analysant les réponses, nous constatons que la part du temps consacré aux activités individuelles représente entre 40% et 50% du temps total d'enseignement des mathématiques, les activités en duos entre 20% et 30% et les activités en groupes également entre 20% et 30%. Il est à noter que certains enseignants affirment ne consacrer que 10% de leur temps aux activités individuelles alors que d'autres estiment y consacrer près de 90% ! Les valeurs extrêmes relevées pour les activités en duos sont, respectivement, de 5% et de 70% alors que pour les activités en groupes elles sont de 0% et de 50%.

Quelques différences cantonales peuvent être mises en évidence. En considérant les activités individuelles, nous pouvons relever que les moyennes des cantons de Berne, Fribourg et du Jura sont sensiblement inférieures à celles des autres cantons. De plus, Fribourg se distingue également par le fait que la majorité des répondants de ce canton accordent moins d'importance à ce type d'activités que la plupart de leurs collègues romands. En ce qui concerne les activités en duos, les cantons de Berne et de Fribourg sont ceux qui semblent leur accorder la part

la plus importante. Enfin, concernant les activités en groupes, nous constatons que les cantons de Neuchâtel et du Valais voient une majorité d'enseignants n'accorder qu'une part restreinte à ce type d'activités.
La durée hebdomadaire consacrée à l'enseignement des mathématiques diffère de manière importante d'une classe à l'autre ; elle peut varier du simple au double[1] ! L'étendue du nombre de minutes citées va de 180 à 360 minutes. De grandes différences sont relevées à l'intérieur des cantons eux-mêmes. Ainsi, dans le canton de Vaud, ces valeurs se situent entre 180 minutes et 320 minutes alors qu'en Valais elles ne varient qu'entre 270 minutes et 300 minutes et que dans le canton de Berne tous les enseignants questionnés répondent 270 minutes, ce qui représente la dotation hebdomadaire officielle. En effet, les dotations horaires hebdomadaires officielles pour l'enseignement des mathématiques en 4P diffèrent quelque peu d'un canton à l'autre et nous retrouvons ces différences dans les réponses des enseignants[2]. Ainsi, c'est dans le canton de Vaud que cette moyenne est la plus faible (236 minutes) alors, qu'à l'opposé, la moyenne valaisanne est de 285 minutes. La durée moyenne en Suisse romande est d'environ 267 minutes.
De plus, il est intéressant de constater que les enseignants semblent consacrer plus de temps aux mathématiques que les enseignantes. En effet, la différence des moyennes est d'une vingtaine de minutes par semaine ; cette différence est significative ($t = 5.26$, $ddl = 138$, $p < 0.05$).
Pour compléter cette rubrique consacrée à la durée de l'enseignement, nous avons pu mettre en évidence le fait que plus de la moitié des répondants répartissent leur enseignement des mathématiques sur tous les jours de la semaine. En considérant les pratiques individuelles de répartition hebdomadaire de cet enseignement, nous arrivons à la conclusion que le mardi et le jeudi semblent être les jours privilégiés durant lesquels des activités mathématiques sont prioritairement proposées.

6.2.3 Gestion de la classe

Lors des leçons de mathématiques, les trois quarts des enseignants rencontrent parfois ou souvent des difficultés liées à la gestion de la classe. Ces difficultés sont attribuées principalement au bruit, aux déplacements des élèves ou aux différences de niveaux des élèves. La difficulté à gérer des groupes est une raison également évoquée par les enseignants.
Les moyens mis en œuvre pour surmonter ces difficultés sont avant tout la *différenciation, l'organisation de la classe en sections* afin de pouvoir travailler

[1] Nous nous intéressons ici à la durée hebdomadaire de l'enseignement des mathématiques par classe. Nous avons donc procédé, dans certains cas, pour des enseignants travaillant à temps partiel dans une même classe, à des regroupements.

[2] Les dotations horaires hebdomadaires officielles pour l'enseignement des mathématiques en 4P sont les suivantes (Landry, 2003) : BE : 270 minutes/semaine, FR : 275 minutes/semaine, GE : 270 minutes/semaine, JU : 270 minutes/semaine, NE : 270 minutes/semaine, VS : 285 minutes/semaine, VD : 180 à 225 minutes/semaine.

en alternance avec les différents élèves, ainsi qu'*une aide apportée aux élèves.* Les enseignants surmontent aussi certaines difficultés de gestion en formant eux-mêmes les groupes de travail.
Les tableaux 6.6 et 6.7 présentent un résumé des principales réponses relevées pour ces questions avec la proportion de répondants les ayant données.

Tableau 6.6 – *Raisons des difficultés liées à la gestion de la classe, citées par les enseignants.*

Raisons évoquées	Citations
Le bruit, les déplacements	25%
Les niveaux disparates des élèves	22%
Le travail en groupes	19%
Les problèmes d'organisation (manque de place, de matériel)	15%
Le nombre élevé d'élèves	13%

Tableau 6.7 – *Moyens mis en oeuvre pour surmonter les difficultés liées à la gestion de la classe, cités par les enseignants.*

Moyens mis en œuvre	Citations
La différenciation, les sections de classe	26%
L'aide apportée aux élèves	16%
La formation des groupes imposée par l'enseignant	14%
La limitation des activités en groupes	8%
La discipline	7%

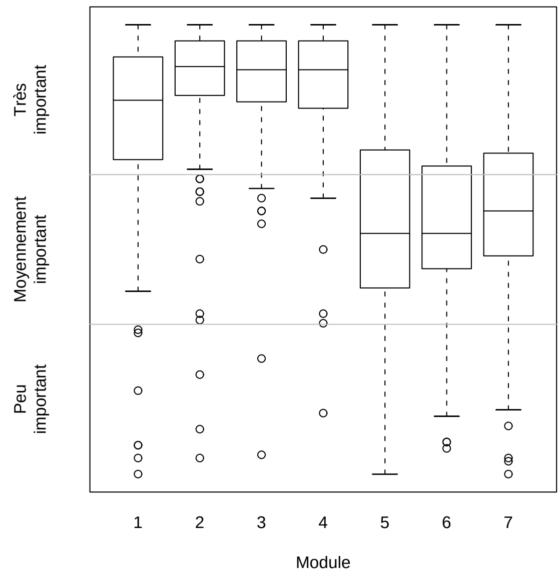
6.2.4 Agencement des modules au cours de l'année

Le programme mathématique de 4P se divise en sept modules[3]. Une question permettait aux enseignants de positionner, sur un axe horizontal, les sept modules selon l'importance qu'ils leur accordent. En divisant cet axe en trois parties égales, nous avons défini des secteurs dans lesquels les modules sont

[3]Module 1 : Des problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement – Module 2 : Des problèmes pour approcher le nombre et lui donner du sens – Module 3 : Des problèmes pour connaître l'addition – Module 4 : Des problèmes pour connaître la multiplication – Module 5 : Des problèmes pour explorer et organiser l'espace – Module 6 : Des problèmes pour approcher les figures géométriques et les transformations du plan – Module 7 : Des problèmes pour mesurer.

considérés comme étant *très importants*, *moyennement importants* ou *peu importants*. Ainsi, nous avons relevé que les quatre modules qui sont jugés par une majorité de répondants comme étant très importants sont les modules 3 (95% de positionnement dans ce secteur), 4 (94%), 2 (91%) et 1 (79%). Les trois autres modules (5, 6 et 7) sont considérés comme étant moyennement importants par plus de la moitié de nos sujets ; 10% estiment même qu'ils sont peu importants (figure 6.2).

FIGURE 6.2 – *Importance accordée par les enseignants aux différents modules.*

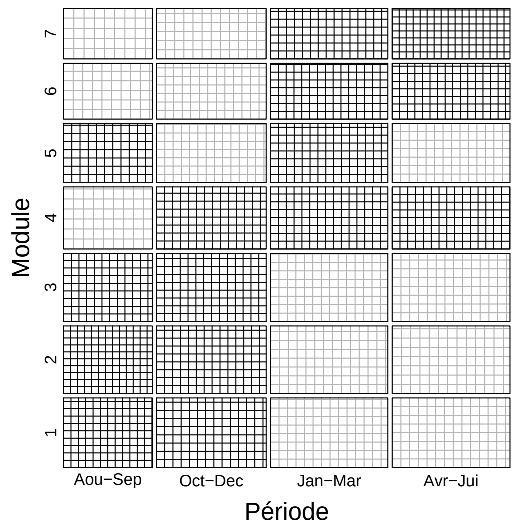


Quelques différences cantonales peuvent être relevées. Alors que dans tous les cantons, le module 1 est considéré comme étant très important, dans le canton de Vaud seuls 50% des répondants sont de cet avis. Les Bernois sont moins nombreux (80% contre plus de 88% dans les autres cantons) à estimer que le module 2 est très important. Il en est de même pour les répondants jurassiens (83% contre plus de 94%) s'agissant du module 4. En ce qui concerne le module 7, considéré comme étant moyennement important par une majorité, les enseignants bernois se distinguent de leurs collègues romands et estiment majoritairement qu'il est très important.

Si l'on observe maintenant l'ordre dans lequel chaque répondant a placé les différents modules sur l'axe, nous remarquons que les modules 2, 3 et 4 sont placés plus de sept fois sur dix dans les trois premiers ; les modules 2 et 4 sont même positionnés par plus de 40% des répondants en première position. Dans le canton de Vaud, le module 2 est celui qui est considéré comme étant le plus important et il est placé par deux répondants sur trois en première position. À l'inverse, le module 5 est placé 35 fois (sur 135) en dernière position alors que le module 6 se retrouve, dans plus de 60% des cas parmi les deux derniers. Ces

deux modules (5 et 6) sont également ceux qui sont les plus difficiles à évaluer ! Concernant la manière dont les différents modules d'enseignement sont abordés, nous constatons qu'ils sont traités par plus de 85% des enseignants plutôt simultanément que les uns après les autres. Pour cette question, le canton de Berne se distingue des autres puisque ce pourcentage n'est que de 59%. Une légère différence entre les hommes et les femmes est également observée ; la proportion d'hommes qui aborde les modules les uns après les autres est plus importante que celle des femmes.
En essayant de déterminer les périodes de l'année scolaire durant lesquelles les différents modules sont traités, nous arrivons à dégager les tendances suivantes : les modules 1, 2 et 3 sont traités plutôt en début d'année tandis que les modules 6 et 7 sont globalement abordés plus tardivement ; le module 4 n'est traité qu'à partir du mois d'octobre mais est ensuite travaillé sans discontinuation jusqu'à la fin de l'année scolaire (figure 6.3).

FIGURE 6.3 – *Répartition des différents types d'activités mathématiques au cours de l'année scolaire.*



6.2.5 Calculatrice et ordinateur

Il a aussi été demandé aux enseignants quelles étaient leurs pratiques concernant l'utilisation de la calculatrice ainsi que l'utilisation de l'ordinateur. Les réponses relevées pour cette question laissent apparaître le fait que la calculatrice n'est que peu utilisée en classe ; environ 6% des enseignants laissent à leurs élèves la possibilité d'utiliser souvent ou très souvent cet instrument. Les Valaisans se mettent en évidence par le fait que dans ce canton plus de 15% des répondants affirment permettre une utilisation fréquente de la calculatrice.

Relevons que dans 5% des cas elle n'est même jamais utilisée. Dans le canton de Neuchâtel, cette proportion s'élève même à plus de 20%. Lorsque les élèves ont la possibilité de se servir d'une calculatrice, c'est principalement pour vérifier des calculs.
La situation semble être notablement différente avec l'ordinateur puisque presque 30% des élèves peuvent souvent voire très souvent en utiliser un. Dans les cantons de Fribourg, de Vaud et du Valais, il semble que l'ordinateur soit plus utilisé que dans les autres cantons romands. À l'opposé, c'est dans le canton de Berne qu'il est le moins utilisé. Nous constatons qu'en mathématiques, plus de 11% d'apprenants n'ont jamais accès à l'informatique.

6.2.6 Moyens complémentaires

L'évaluation Mathéval effectuée en 2P relevait que 88% des enseignants utilisaient des moyens complémentaires. Nous constatons qu'en 4P cette proportion est encore plus élevée (94%). Lorsque nous demandons aux enseignants pourquoi ils ont recours à des moyens complémentaires, ils répondent qu'ils peuvent ainsi pallier *le manque de fiches d'application et de consolidation* (32% des répondants mentionnent cette justification). De plus, *les carences de la méthodologie au niveau du calcul, des algorithmes* sont citées par 28% des enseignants comme raisons de recourir à des moyens complémentaires. À cela s'ajoutent 17% des répondants qui citent, sans précision, *les carences de la méthodologie.*
Les fiches de calculs et d'opérations est le moyen complémentaire cité le plus fréquemment, par 51% des enseignants. Plus du tiers des répondants font référence à des fiches concoctées par leurs soins (*fiches personnelles*). Relevons encore que les *fiches des anciens moyens* sont citées comme moyens complémentaires par 21% des enseignants.

6.3 Évaluation du travail des élèves

La dernière partie du questionnaire s'intéressait à l'évaluation du travail des élèves. Plus de 80% des répondants éprouvent ponctuellement des difficultés pour évaluer le travail des élèves dans le cadre de leur enseignement des mathématiques ; plus d'un quart d'entre eux affirment même que des difficultés apparaissent souvent ou très souvent. Ce pourcentage est même nettement plus important dans les cantons de Berne et de Genève puisque les enseignants qui éprouvent souvent ou très souvent de la difficulté représentent respectivement 48% et 37% des répondants. À l'inverse, dans le canton de Vaud, cette proportion n'est que de 4% ! Les deux modules qui engendrent le plus de difficultés lors des évaluations sont les modules 5 et 6.
Pour apprécier le niveau de compétence atteint par les élèves, ce sont surtout *les connaissances acquises* qui sont très souvent évaluées. *La mise en œuvre de méthodes appropriées* ainsi que *l'évolution dans les attitudes attendues* sont également souvent prises en compte lors d'évaluations. Contrairement au reste

de la Suisse romande, la moitié des enseignants neuchâtelois évaluent souvent *la somme de travail fourni.*
Les principales formes d'évaluation pratiquées en classe sont les épreuves classiques et, dans une moindre mesure, les observations du travail. Les entretiens d'évaluation ne sont que rarement utilisés. Dans le canton de Vaud, contrairement aux autres, les enseignants qui pratiquent l'observation du travail sont minoritaires.

6.4 Comparaison des pratiques des enseignants de Mathéval 2P et Mathéval 4P

Lors de l'enquête en 2P, nous avions relevé que l'évaluation des nouveaux moyens d'enseignement était globalement plutôt positive et seuls 3% d'entre eux portaient une appréciation plutôt négative. Dans notre enquête actuelle, ces proportions sont tout à fait comparables.
Il est intéressant de constater que le point positif le plus fréquemment cité est identique lors des deux enquêtes ; l'aspect ludique de l'apprentissage est cité par 48% des répondants lors de l'enquête en 2P et par 62% des répondants actuels. D'autres points positifs sont cités lors des deux enquêtes, à savoir : la variété des activités, la possibilité de développer des facultés de recherche ou la collaboration et le travail en groupe. À l'inverse, parmi les points négatifs cités, celui qui ressort nettement du lot est le manque d'exercices d'entraînement ou d'activités d'automatisation.
Lors des deux enquêtes la proportion de répondants qui estiment que les nouveaux moyens peuvent être utilisés par tous les élèves est d'environ deux tiers.
Concernant les objectifs cités par les enseignants, lors de la précédente enquête, les objectifs de méthodes et d'attitudes étaient peu homogènes et ne permettent pas d'être comparés à ceux cités par les répondants à l'enquête 4P. En revanche, les objectifs de connaissance prioritairement cités dans les deux cas sont le calcul et la connaissance du nombre. Dans les deux enquêtes, les trois quarts des répondants affirment rencontrer parfois ou souvent des difficultés liées à la gestion de la classe. Les raisons évoquées sont identiques. En ce qui concerne l'évaluation du travail des élèves, en 2P ce sont les modules 1, 5 et 6 qui posent le plus de difficultés et en 4P nous retrouvons les modules 5 et 6. Dans les deux enquêtes, nous relevons que ce sont *les connaissances acquises* ainsi que *la mise en œuvre de méthodes appropriées* qui sont le plus souvent évaluées.

Chapitre 7

Tentative d'explication des différences observées

Nous avons montré que tous les élèves ne possèdent pas les mêmes compétences mathématiques en fin de 4^{e} année primaire. Certains disposent d'une large palette de compétences, d'autres semblent avoir plus de difficultés et manifestent moins d'aisance. Ce phénomène se traduit, au niveau de l'échelle numérique de compétences que nous avons construite, par une certaine variabilité des scores. Les élèves les plus compétents obtiennent un haut score, alors que ceux qui le sont moins obtiennent un score plus bas. Nous avons également établi qu'au dessus d'un certain seuil, se trouvaient les élèves qui avaient atteint tous les objectifs fixés par le plan d'études et qu'en dessous se trouvaient ceux qui, ayant des lacunes, ne les avaient pas atteints entièrement (chapitre 4).

Par ailleurs, nous savons que les élèves sont différents les uns des autres. Ils n'ont pas tous le même sexe, ni le même âge, certains sont issus d'un milieu aisé, d'autres d'un milieu plus modeste (§ 1.2). En plus, tous n'ont pas bénéficié du même environnement scolaire : ils n'ont pas eu les mêmes enseignants, ils n'ont pas forcément fréquenté la même classe ni la même école (§ 1.3, chapitre 6).

Nous allons regarder dans ce chapitre s'il existe des liens entre les compétences des élèves et certaines de leurs caractéristiques ou certaines particularités de leur environnement scolaire. Nous sommes donc à la quête d'explications. Nous aimerions rendre compte, dans la mesure du possible, des différences de compétences observées entre les élèves. Nous procéderons en deux temps.

Premièrement, nous examinerons le rôle de variables individuelles comme le *sexe*, l'*âge* ou la *langue maternelle* des élèves. Ces analyses, principalement univariées, seront relativement grossières, elles ne tiendront compte que partiellement de la structure hiérarchique de notre population d'étude (§ 7.1).

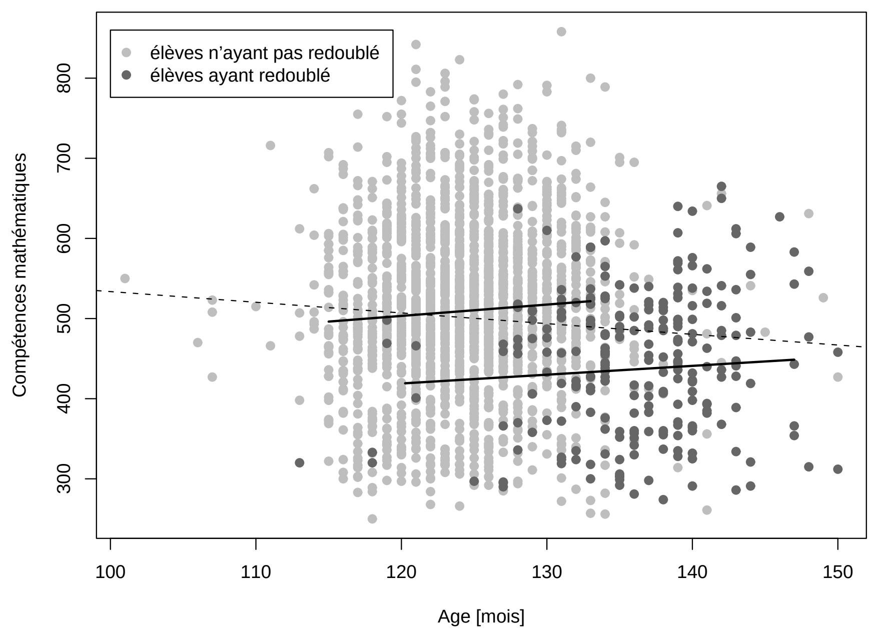
Deuxièmement, nous effectuerons des analyses plus subtiles qui intégreront à la fois l'influence des variables individuelles et contextuelles (§ 7.2). À cette fin, nous recourrons à des analyses multiniveaux qui ont été spécifiquement développées pour étudier les populations comportant plusieurs niveaux d'agrégation emboîtés (Bryk & Raudenbush, 1992 ; Goldstein, 1995 ; Snijders & Bosker, 1999). Ces analyses sont tout à fait appropriées pour étudier les systèmes scolaires dans lesquels les élèves, unités du premier niveau, sont regroupés dans différentes classes, unités du deuxième niveau, qui à leur tour sont regroupées dans différentes écoles ou établissements, unités du troisième niveau. L'échantillon que nous avons tiré, ne nous permet pas de tenir compte du troisième niveau d'agrégation. Nous n'investiguerons donc pas les effets-établissement, nous nous limiterons à l'étude des effets-maître et des effets-classe.

7.1 Comparaison des élèves

7.1.1 Âge

Le coefficient de corrélation entre les variables *compétences mathématiques* et *âge* vaut -0.085 et est statistiquement significatif ($F = 16.2$, $ddl_1 = 1$, $ddl_2 = 2250$, $p < 0.05$). Les compétences en mathématiques varient légèrement avec l'âge : plus les élèves sont âgés, moins ils sont compétents. Voilà qui paraît paradoxal. Pour mieux comprendre la situation, il est nécessaire de tenir compte du redoublement (figure 7.1).

FIGURE 7.1 – *Évolution des compétences en mathématiques avec l'âge en tenant compte du redoublement. La droite traitillée résume globalement le lien qui existe entre compétences et âge. Les segments de droite représentent également ce lien mais pour les groupes d'élèves ayant ou n'ayant pas redoublé respectivement. Chaque segment embrasse 95% du groupe selon la variable âge.*



Les élèves ayant redoublé sont en moyenne plus âgés que ceux qui n'ont subi aucun échec scolaire et leurs compétences en mathématiques sont en moyenne inférieures à celles de leurs camarades (§ 7.1.6). Il s'ensuit que globalement l'on observe une diminution des compétences avec l'âge. Dans la figure 7.1, cette relation se traduit par la droite traitillée de pente négative qui traverse l'ensemble du nuage de points. Si l'on examine séparément la manière dont évoluent les compétences mathématiques avec l'âge parmi les élèves qui ont redoublé ou non, l'on s'aperçoit alors que la corrélation entre *compétences* et *âge* est positive, les compétences croissent avec l'âge. Dans la figure 7.1, les segments de droite qui résument pour chaque sous-groupe le lien entre *âge* et *compétences* ont une pente positive. Ces quelques observations suggèrent que les compétences en mathématiques sont influencées par une certaine aisance générale, d'une part, et par des facteurs maturationnels ou développementaux, d'autre part.

7.1.2 Sexe

La distribution des compétences en mathématiques des filles ainsi que celles des garçons sont représentées schématiquement dans la figure 7.2. Les compétences des garçons sont légèrement supérieures à celles des filles (tableau 7.2).

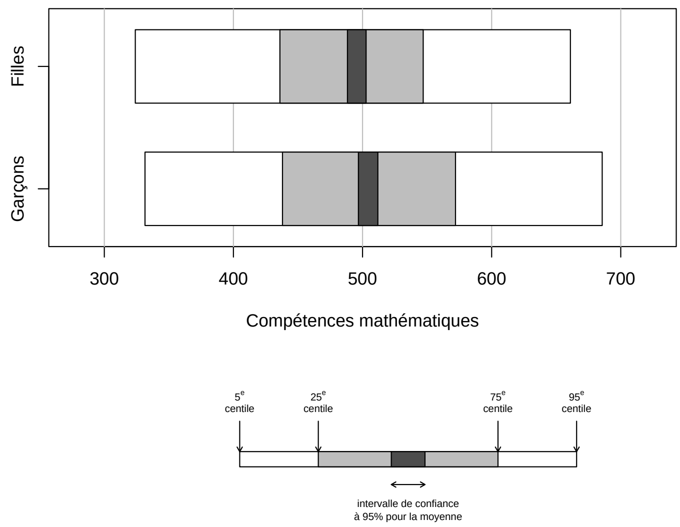
Dans la suite de ce chapitre, pour juger de la significativité d'une différence entre deux groupes d'élèves, nous appliquerons systématiquement la règle suivante : si les intervalles de confiance (à 95%) des moyennes de chacun des deux groupes ne se chevauchent pas, alors nous conclurons que la différence entre les deux groupes est statistiquement significative. Cette règle est à peine plus conservatrice que le test exact mais a l'avantage d'être simple, d'une part, et d'avoir une correspondance graphique, d'autre part.

Dans la figure 7.2, on voit que les intervalles de confiance se recouvrent partiellement, les compétences des filles et des garçons ne sont donc pas significativement différentes. Notons toutefois que les garçons les meilleurs obtiennent de plus hauts scores que leurs homologues féminins. Ceci marque peut-être l'embryon d'une différenciation entre filles et garçons (Becker & Forsyth, 1994 ; Friedman, 1994 ; Reuchlin, 1991).

Cette supposition est compatible avec d'autres observations faites en Romandie à ce sujet. Rappelons qu'en 2P, nous n'avions pas observé de différence entre les performances des filles et celles des garçons (Antonietti, 2003b). En revanche, la dernière enquête PISA, menée auprès d'élèves de 9^{e} année, montre qu'en mathématiques la différence entre les sexes est notoire (Antonietti & Guignard, 2005).

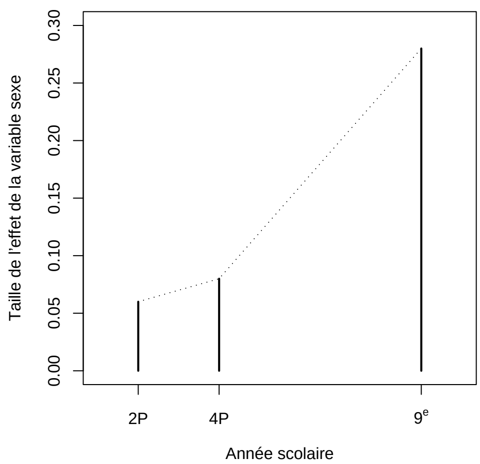
À partir de ces quelques éléments, esquissons l'évolution de la différence entre filles et garçons au cours de la scolarité obligatoire. La figure 7.3 montre qu'en début de scolarité obligatoire, l'effet de la variable *sexe* sur la variable *compétences mathématiques* est négligeable, mais qu'en fin de scolarité, il devient important (Cohen, 1989 ; 1992). Entre la 4^{e} et la 9^{e} année, un changement

FIGURE 7.2 – *Comparaison des compétences mathématiques selon le sexe. Sur cette figure sont représentés les intervalles de confiance à 95% des moyennes ainsi que les résultats aux 5*^{e}*, 25*^{e}*, 75*^{e} *et 95*^{e} *centiles.*



considérable s'effectue. Nous ne disposons malheureusement pas de suffisamment d'informations pour pouvoir attribuer une cause à cette forte variation. Une explication pourrait être biologique, une autre psychologique et organisationnelle.

FIGURE 7.3 – *Évolution de la taille de l'effet de la variable sexe au cours de la scolarité obligatoire.*



Note : La taille de l'effet de la variable *sexe* se définit comme le rapport entre la différence moyenne de performances entre garçons et filles et l'écart-type de la distribution des performances.

Selon la première, les modifications induites par la puberté sur le développement cognitif auraient un impact différent suivant le sexe.
La deuxième mettrait en avant le rôle de l'organisation scolaire. En Suisse romande, au degré primaire, les élèves sont répartis en classes hétérogènes, sans distinction. Au degré secondaire I, cela n'est généralement plus le cas : les élèves sont sélectionnés en fonction de leurs intérêts, de leurs motivations et de leurs aptitudes, puis regroupés en classes homogènes. Selon la deuxième explication, un tel système aurait des répercussions différentes sur l'évolution des compétences mathématiques des filles et des garçons. En encourageant et en valorisant les élèves ayant de l'intérêt pour les mathématiques, en leur proposant même des enseignements avancés spécifiques, ces derniers travailleraient davantage et progresseraient plus rapidement que leurs camarades ne bénéficiant pas de ces mesures. Travaillant davantage et progressant plus rapidement, leur intérêt pour les mathématiques s'accroîtrait. Leur intérêt accru, les inciterait à s'impliquer encore davantage dans l'étude des mathématiques. Une boucle rétroactive positive émergerait et contribuerait à la forte différenciation de groupes initialement presque identiques.

7.1.3 Nationalité

À partir des informations fournies par les élèves concernant leur lieu de naissance ainsi que celui de leurs parents (§ 1.2.3), nous avons construit un indice d'immigration. Cet indice possède trois modalités que nous avons labellisées *natif*, *première génération* et *non natif*. La première catégorie rassemble les élèves qui ont au moins l'un de leurs parents qui est né en Suisse. La deuxième regroupe les élèves qui sont nés en Suisse, contrairement à leurs parents. Et la troisième réunit les élèves qui, comme leurs parents, sont nés à l'étranger (tableau 7.1).

TABLEAU 7.1 – *Définition de l'indice d'immigration à partir des réponses des élèves à la question :* « Dans quel(s) pays tes parents et toi-même êtes-vous nés ? »

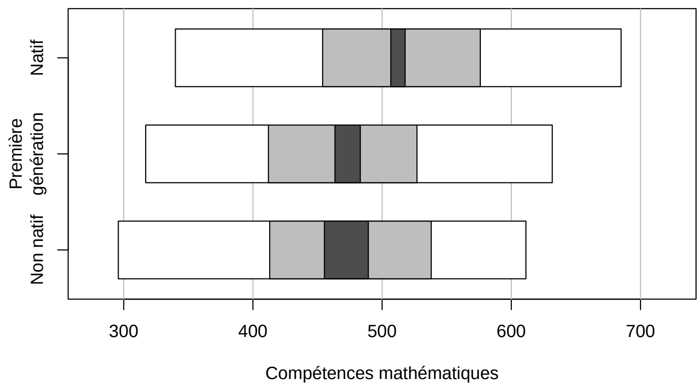
Toi	Ta mère	Ton père	Indice d'immigration
en Suisse	en Suisse	en Suisse	natif
en Suisse	en Suisse	à l'étranger	natif
en Suisse	à l'étranger	en Suisse	natif
en Suisse	à l'étranger	à l'étranger	première génération
à l'étranger	en Suisse	en Suisse	natif
à l'étranger	en Suisse	à l'étranger	natif
à l'étranger	à l'étranger	en Suisse	natif
à l'étranger	à l'étranger	à l'étranger	non natif

TABLEAU 7.2 – *Compétences mathématiques selon le sexe, la nationalité, la langue maternelle, le redoublement, le niveau socio-économique et le canton.*

	5e centile	25e centile	moyenne	75e centile	95e centile	Erreur standard
Sexe						
filles	324	436	496	547	661	3.7
garçons	332	438	504	572	686	3.8
Nationalité						
natif	340	454	512	576	685	2.8
1re génération	317	412	473	527	632	5.0
non natif	296	413	472	538	611	8.7
Langue maternelle						
francophone	333	445	507	570	677	2.9
allophone	307	417	475	535	620	5.7
Redoublement						
non	336	451	509	570	677	3.0
oui	296	364	436	499	567	5.9
NSE						
1	308	410	475	534	643	5.9
2	331	434	496	550	660	4.3
3	341	437	501	557	672	5.2
4	360	471	527	594	704	5.2
Canton						
GE	318	418	480	533	627	8.3
VD	321	419	484	538	640	5.6
NE	326	440	496	552	656	6.9
BE	335	448	512	581	668	6.9
JU	337	468	529	601	704	7.4
VS	340	469	530	594	717	6.9
FR	383	488	543	605	710	6.8

Les compétences mathématiques des élèves natifs sont très nettement supérieures à celles des élèves de première génération et à celles des élèves non natifs. Par contre, en moyenne, les deux derniers groupes ne se différencient pas significativement l'un de l'autre. Signalons tout de même que, comparativement aux élèves de première génération, il y a parmi les élèves non natifs un peu plus d'élèves très faibles et un peu moins d'élèves forts (tableau 7.2, figure 7.4).

FIGURE 7.4 – *Compétences mathématiques selon l'indice d'immigration. Sur cette figure sont représentés les intervalles de confiance à 95% des moyennes ainsi que les résultats aux 5e, 25e, 75e et 95e centiles.*

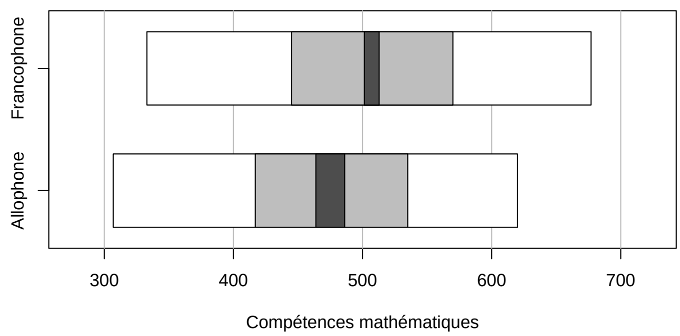


Note : La largeur d'un intervalle de confiance est proportionnelle à l'écart-type de la distribution et inversement proportionnelle à la racine carrée de la taille de l'échantillon. Plus un échantillon est de grande taille, plus l'intervalle de confiance associé est étroit. Le nombre d'élèves natifs est égal à 1651, le nombre d'élèves de première génération est égal à 423 et le nombre d'élèves non natifs est égal à 178. Comme les trois distributions ont quasiment la même dispersion, il s'ensuit que les intervalles de confiance sont dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{1651}} : \frac{1}{\sqrt{423}} : \frac{1}{\sqrt{178}}$ soit *grosso modo* dans le rapport 1 : 2 : 3. C'est ce que l'on observe ci-dessus.

7.1.4 Langue maternelle

Les élèves francophones obtiennent en moyenne de meilleurs scores à l'échelle de *compétences mathématiques* que leurs camarades allophones (tableau 7.2, figure 7.5). La différence est significative.

FIGURE 7.5 – *Compétences mathématiques selon la langue maternelle. Sur cette figure sont représentés les intervalles de confiance à 95% des moyennes ainsi que les résultats aux 5e, 25e, 75e et 95e centiles.*

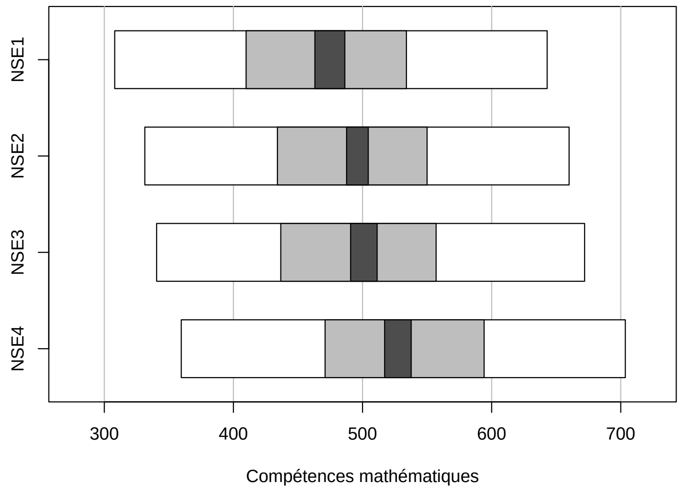


Ce résultat s'inscrit dans la lignée des résultats de Mathéval 2P. De la 2e à la 4e année primaire, la différence entre francophones et allophones s'amenuise un peu, mais reste encore importante. La taille de l'effet de la *langue maternelle* sur les *compétences mathématiques* passe de 0.41 à 0.32. Il est encourageant de s'apercevoir que, sans effacer totalement les différences, l'école permet aux élèves allophones de rattraper un peu de leur retard en mathématiques.

7.1.5 Niveau socio-économique

La figure 7.6 représente la distribution des compétences mathématiques selon le niveau socio-économique. Les élèves issus des milieux les plus modestes (NSE 1) obtiennent les résultats les moins bons. Les élèves les plus favorisés, issus des milieux les plus aisés (NSE 4), obtiennent les résultats les meilleurs. Et ceux, issus de la classe moyenne (NSE 2 et NSE 3), obtiennent des résultats intermédiaires (tableau 7.2).

FIGURE 7.6 – *Compétences mathématiques selon le niveau socio-économique (NSE 1 : niveau socio-économique inférieur, NSE 2 : niveau socio-économique moyen inférieur, NSE 3 : niveau socio-économique moyen supérieur, NSE 4 : niveau socio-économique supérieur).*



Le statut socio-économique influence donc l'acquisition de compétences mathématiques à l'école. Ce résultat n'est pas une surprise car des constats similaires ont déjà été faits à maintes reprises (Antonietti & Guignard, 2005 ; Duru-Bellat, 2002 ; Moser & Berweger, 2004 ; Nidegger, 2001 ; Willms, 2003).

Dans le paragraphe 1.2.7, nous avons montré que les variables socio-démographiques que nous avons utilisées pour décrire notre échantillon sont liées. Cela signifie, par exemple, que les élèves issus d'un milieu modeste sont souvent d'origine étrangère et parlent une autre langue que le français à la maison.

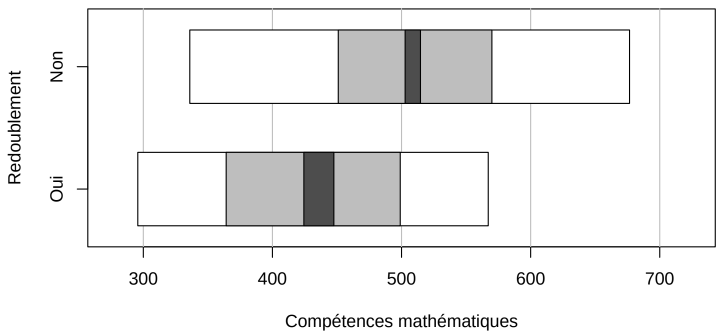
Comme les élèves qui obtiennent les moins bons résultats sont des élèves issus de milieux défavorisés (§ 7.1.5), il n'est pas du tout surprenant de constater

que les élèves les moins compétents sont, si l'on prend successivement en considération les variables *nationalité* puis *langue maternelle*, les élèves d'origine étrangère (§ 7.1.3) et les élèves allophones (§ 7.1.4) respectivement, puisqu'il est question à chaque fois du même sous-groupe d'élèves.
Nos descriptions sont cohérentes, mais – vu l'intrication des variables – également fort redondantes. Les analyses que nous ferons dans le paragraphe 7.2 nous permettront de déterminer l'influence de chaque variable indépendamment des autres et ainsi d'assigner à chacune son rôle véritable.

7.1.6 Redoublement

Les compétences mathématiques des élèves ayant suivi jusqu'en 4e année primaire un parcours scolaire sans accroc sont significativement plus étendues que celles des élèves ayant redoublé (figure 7.7).

FIGURE 7.7 – *Comparaison des compétences mathématiques des élèves ayant ou n'ayant pas redoublé une année scolaire.*



L'écart moyen entre le groupe des redoublants et celui des non redoublants est *grosso modo* égal aux trois quarts de la dispersion de la distribution des scores (tableau 7.2), cela veut dire que la taille de l'effet de la variable *redoublement* sur la variable *compétences mathématiques* est de l'ordre de 0.75. Cet effet est de taille considérable.
Le redoublement repose sur le principe que les élèves apprennent mieux lorsqu'ils sont scolarisés avec des camarades de niveau similaire. La croyance en l'effet positif des classes aux compétences homogènes est un argument de poids pour justifier le redoublement (Bless et al., 2005).
Le fort décalage que nous observons entre les élèves ayant redoublé et les autres montre que les élèves qui étaient à la traîne avant de redoubler, le sont toujours après. Nous pouvons donc légitimement nous demander si les mesures prises au niveau organisationnel pour faire face aux différences de performances et d'aptitudes ne devraient pas être abandonnées au profit de l'extension des mesures d'individualisation de type didactique et méthodologique. Le travail pédago-

gique des enseignants ne pourrait devenir que plus intéressant et gratifiant encore.

7.1.7 Disposition envers les mathématiques

Les mathématiques sont une discipline scolaire qui laisse rarement indifférent. Certains élèves adorent cette branche, d'autre la détestent. Et l'on sait que l'attitude générale envers les mathématiques, positive ou négative, joue un rôle dans leur acquisition (Lafortune & St-Pierre, 1994 ; Nimier, 1988 ; Tobias, 1994). Pour enrichir notre compréhension de l'apprentissage des mathématiques à l'école obligatoire et éventuellement pouvoir mieux rendre compte des différences de compétences observées, nous avons demandé aux élèves quel était leur goût pour les mathématiques, nous les avons aussi interrogés sur leurs préférences en maths et sur leur plaisir à travailler seuls ou en groupe.

Attitude envers les mathématiques

En 4^{e} année primaire, plus de 80% des élèves apprécient les mathématiques (figure 7.8). Une telle adhésion est probablement due à la nouvelle manière d'enseigner les mathématiques, beaucoup plus ludique qu'avant.
Une attitude positive est un facteur de succès dans l'apprentissage des mathématiques ; en effet la corrélation entre le *goût* et les *compétences mathématiques* est significativement positive ($r = 0.193$, $F = 87.40$, $ddl_1 = 1$, $ddl_2 = 2250$, $p < 0.05$).

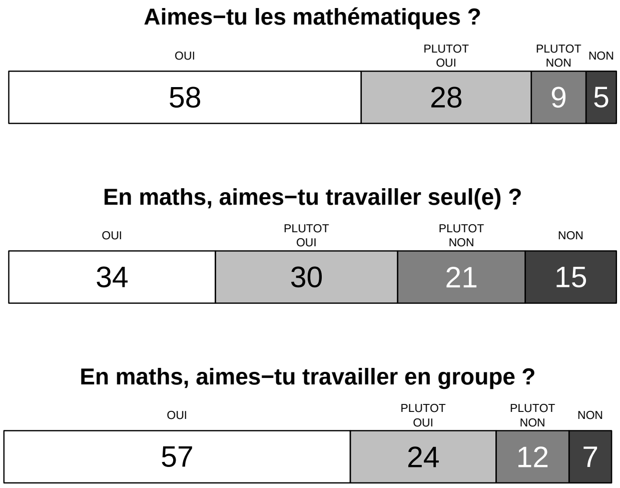
Préférences en mathématiques

Nous avons demandé aux élèves ce qu'ils aimaient le mieux faire en maths et ce qu'ils aimaient le moins faire. À partir de leurs réponses, nous avons, en recourant à une analyse factorielle des correspondances multiples (Escofier & Pagès, 1998 ; Lebart et al., 1997), créé une variable numérique de *préférence.* Cette variable correspond au premier axe factoriel. Au pôle positif de cet axe on trouve les élèves qui aiment surtout la *recherche* et la *logique* (ce sont leurs propres termes), au pôle négatif on trouve ceux qui aiment le *calcul* – écrit ou oral.
La variable *préférence* est corrélée positivement avec la variable *compétences mathématiques* ($r = 0.113$, $F = 29.14$, $ddl_1 = 1$, $ddl_2 = 2250$, $p < 0.05$). Plus un élève a de goût pour la recherche et la logique, plus il y a de chance que ses compétences mathématiques soient élevées.

Mode de travail en classe de mathématiques

Les élèves aiment bien travailler seuls, mais ils sont plus nombreux à préférer travailler en groupe (figure 7.8). Les élèves qui aiment travailler seuls et n'aiment pas travailler en groupe ont tendance à développer de meilleures compétences que leurs camarades. La corrélation entre les réponses à la question « En maths, aimes-tu travailler seul(e) ? » et la variable *compétences mathématiques* vaut 0.142 ($F = 46.29$, $ddl_1 = 1$, $ddl_2 = 2250$, $p < 0.05$), alors que celle calculée entre les réponses à la question « En maths, aimes-tu travailler en groupe ? » et la même variable *compétences* est égale à -0.110 ($F = 29.14$, $ddl_1 = 1$, $ddl_2 = 2250$, $p < 0.05$).

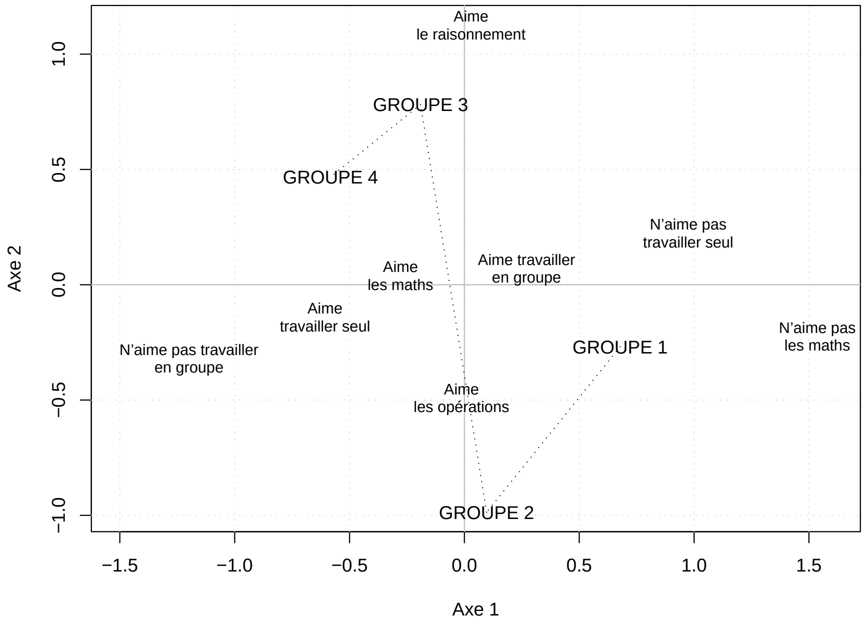
FIGURE 7.8 – *Attitude envers les mathématiques et mode de travail en classe. Les taux de réponses sont exprimés en pourcentage.*



Modes de relations aux mathématiques et compétences

Représentons dans un même espace plan les réponses des élèves concernant leurs goûts et leurs préférences en mathématiques. Puis projetons dans cet espace les élèves préalablement répartis en quatre groupes de même taille en fonction de leurs compétences. Le groupe 1 est le plus faible, les groupes 2 et 3 sont de force intermédiaire et le groupe 4 est le plus fort (figure 7.9).
Le premier axe du plan oppose les élèves qui aiment les mathématiques à ceux qui ne les aiment pas. Les élèves qui aiment les maths sont généralement des élèves qui aiment travailler seuls et n'aiment pas beaucoup travailler en groupe. Les élèves qui n'aiment pas les maths n'aiment pas du tout travailler seuls, mais tant qu'à faire préfèrent travailler en groupe.
Le deuxième axe du plan oppose les élèves qui aiment les opérations arithmétiques à ceux qui aiment le raisonnement. Les premiers ont un certain goût pour les activités algorithmiques qui nécessitent de la technique et de l'entraînement, les seconds préfèrent devoir réfléchir, les activités de recherche et de logique du module 1 sont leurs favorites.

FIGURE 7.9 – *Modes de relations aux mathématiques et compétences.*



Si l'on examine la manière dont se positionnent les différents groupes dans cet espace, on s'aperçoit que deux quadrants diamétralement opposés sont occupés. Dans l'un, on y trouve les groupes 1 et 2 et, dans l'autre, les groupes 3 et 4. Les élèves des groupes 1 et 2 sont donc des élèves qui n'aiment pas beaucoup les mathématiques et préfèrent des activités machinales au raisonnement. Les élèves des groupes 3 et 4, au contraire, sont des élèves qui aiment les maths et surtout les activités qui nécessitent, non pas des automatismes, mais de la réflexion.

Les élèves du groupe 1, les moins compétents, se caractérisent principalement par leur aversion des mathématiques tous domaines confondus. Les élèves du groupe 2 ont vis-à-vis des mathématiques une attitude plus nuancée, ils ne les détestent pas, mais n'éprouvent à leur égard aucun engouement. L'arithmétique a leur préférence. Les élèves du groupe 3 ont la même attitude générale envers les mathématiques que ceux du groupe 2 ; en revanche, leur goût pour le calcul est plus modéré, ils préfèrent les problèmes n'ayant pas une solution immédiate. Les élèves du groupe 4, les plus compétents, aiment les casse-tête et les énigmes, mais les considèrent comme des défis personnels, ils n'ont aucun plaisir à cogiter avec leur camarades, ils aiment mener leur quête en solitaire.

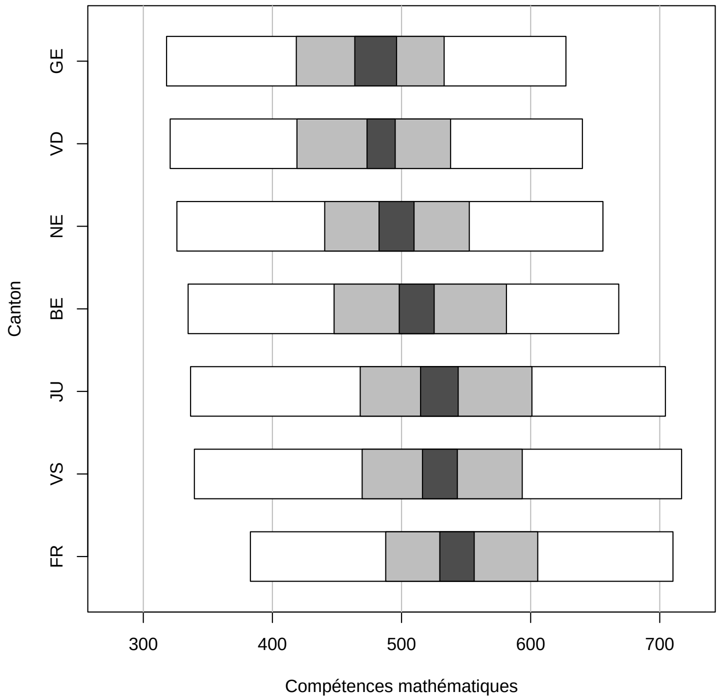
Il est intéressant de remarquer que les élèves les plus compétents sont finalement ceux qui sont le plus réfractaires au travail en groupe. Ces élèves qui souhaitent s'impliquer un maximum dans les activités de résolution de problème considèrent peut-être que le travail en groupe ne leur permet pas de se

concentrer suffisamment et qu'en présence de leurs camarades, ils se dissipent. Les élèves les plus faibles, en revanche, sont enchantés par le travail en groupe. Tout en restant légèrement en retrait et en observant discrètement, ils peuvent tout de même avoir l'impression de participer.
Il serait naturellement regrettable que les activités en groupe soient, tant pour les élèves forts que pour les élèves faibles, une entrave à faire des mathématiques.

7.1.8 Canton

Comme nous l'avons déjà mentionné au paragraphe 4.3.2, les compétences mathématiques des élèves dépendent aussi du canton dans lequel ils sont scolarisés. La figure 7.10 représente les distributions cantonales. Deux cantons obtiennent des résultats significativement inférieurs à la moyenne romande, ce sont les cantons de Genève et de Vaud. Trois obtiennent des résultats significativement supérieurs à la moyenne romande, ce sont les cantons de Fribourg, du Jura et du Valais. Et deux obtiennent des résultats qui ne se distinguent pas significativement de la moyenne romande, ce sont les cantons de Berne et de Neuchâtel (tableau 7.2). Sur la figure 7.10, on voit en effet que, premièrement, les intervalles de confiance pour la moyenne des cantons de Genève et Vaud sont situés à gauche de la verticale d'abscisse 500 qui représente la moyenne romande, que, deuxièmement, ceux des cantons de Fribourg, du Jura et du Valais sont situés à droite de cette même verticale et que, troisièmement, ceux des cantons de Berne et Neuchâtel la chevauchent.
Portons notre attention, non plus sur la position moyenne des distributions, mais sur leur étendue. Si tous les cantons ont *grosso modo* la même étendue, deux exceptions sont à signaler. La première est le canton de Fribourg qui ne se distingue pas uniquement par son excellente moyenne mais aussi par l'attention toute particulière qu'il semble porter aux élèves qui ont de la difficulté. Dans ce canton, très peu d'élèves obtiennent un score inférieur à 400. La seconde réunit le Valais et le Jura qui sont les cantons dans lesquels on observe la plus grande étendue des scores. Ces deux cantons, comme Fribourg, semblent beaucoup encourager leurs élèves les meilleurs et poussent ainsi à l'excellence.
Comparons le classement des cantons obtenu en 4P à celui que nous avions établi à partir des moyennes cantonales lors de l'évaluation des compétences mathématiques des élèves de 2P (Antonietti, 2003b), d'une part, et à celui dressé lors de la deuxième enquête PISA (Antonietti & Guignard, 2005), d'autre part (tableau 7.3).
Au cours de la scolarité obligatoire, le classement des cantons change (figure 7.11). Les modifications les plus grandes s'observent entre la 2^{e} et la 4^{e} année primaire. Durant cette période, les cantons de Neuchâtel et du Valais gagnent chacun deux places. Ensuite le classement reste quasiment stable – une seule inversion apparaît entre les cantons de Berne et Neuchâtel. Ces quelques constats suggèrent que l'efficacité d'un système scolaire possède une

FIGURE 7.10 – *Compétences mathématiques selon le canton. Sur cette figure sont représentés les intervalles de confiance à 95% des moyennes ainsi que les résultats aux 5e, 25e, 75e et 95e centiles.*



certaine plasticité mais aussi une grande inertie. Les positions des cantons ne sont pas figées dès le départ, elles évoluent, mais après quelques années, malgré l'introduction dans les cantons au secondaire I de structures scolaires très différentes, elles se stabilisent.
Les instruments utilisés lors de ces trois enquêtes n'étant pas les mêmes, nous ne pouvons comparer que l'ordre des cantons. En conséquence, nous ne pouvons pas savoir si, dans l'absolu, les différences entre les cantons augmentent ou diminuent de la 4e à la 9e année de scolarité car nous sommes dans l'incapacité totale de comparer les unités des échelles des trois enquêtes entre elles. L'évolution de l'efficacité des systèmes cantonaux peut être divergente, convergente ou stable (figure 7.12). La prudence est donc de mise.

7.2 Influence des variables individuelles et contextuelles

Comme nous venons de le montrer (§ 7.1), les compétences des élèves sont influencées par certaines variables individuelles comme l'*âge*, la *nationalité*, la *langue maternelle*, le *niveau socio-économique* ou le *goût pour les mathéma-*

TABLEAU 7.3 – *Classement des cantons lors de différentes enquêtes et coefficients de Spearman.*

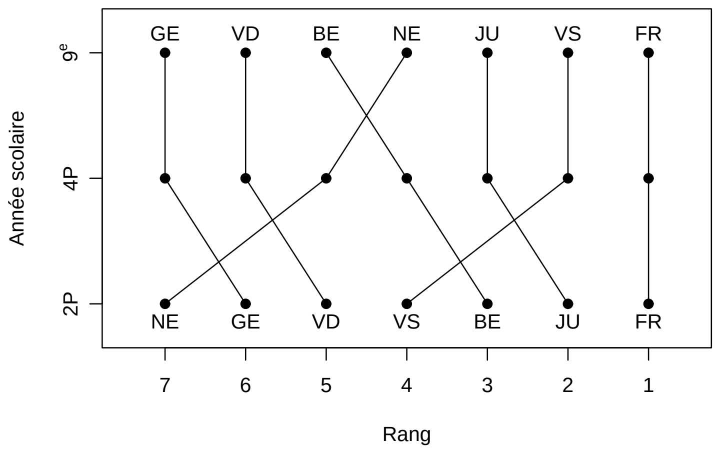
(a) Classements.

	Canton						
Enquête	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD
Mathéval 2P	3	1	6	2	7	4	5
Mathéval 4P	4	1	7	3	5	2	6
PISA 2003	5	1	7	3	4	2	6

(b) Coefficients de Spearman. L'astérisque indique que la corrélation est significative au seuil de 5%.

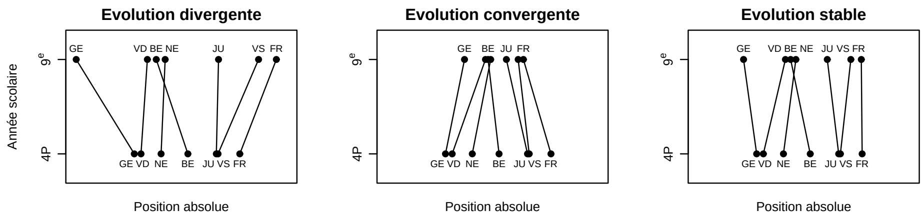
	Mathéval 4P	PISA 2003
Mathéval 2P	0.786*	0.643
Mathéval 4P		0.964*

FIGURE 7.11 – *Esquisse de l'évolution du classement des cantons romands durant les neuf années d'école obligatoire.*



tiques. Nous aimerions examiner maintenant dans quelle mesure le contexte scolaire dans lequel travaillent les élèves influence aussi leurs compétences. Pour cela, nous emploierons des modèles multivariés qui permettent d'intégrer simultanément plusieurs variables dans une même analyse et d'identifier l'effet respectif de chacune.

FIGURE 7.12 – *Évolutions possibles entre la 4^e et la 9^e année.*



7.2.1 Choix du type de modèles

Les modèles que nous allons construire sont des modèles multiniveaux, également connus sous le nom de modèles hiérarchiques linéaires (pour une présentation en français voir Bressoux, 1994 ; 1997 ; 1998). Ces modèles permettent d'analyser les données à plusieurs niveaux explicatifs distincts : pour ce qui nous concerne ici, les élèves et les classes. Ils permettent ainsi de séparer ce qui, dans l'explication du phénomène étudié, relève de facteurs individuels, de ce qui relève de facteurs environnementaux.

Les modèles statistiques classiquement utilisés pour des études similaires à la nôtre sont des modèles de régression multiple par les moindres carrés ordinaires (Antonietti, 2003b). Or, de tels modèles sont mal adaptés à l'analyse de données présentant une structure hiérarchisée. La structure des données que nous analysons est constituée de deux niveaux hiérarchisés emboîtés les uns dans les autres : les élèves (niveau 1) sont regroupés dans des classes (niveau 2). C'est pourquoi les modèles statistiques qui seront utilisés sont des modèles multiniveaux. Ils offrent plusieurs avantages décisifs par rapport aux modèles classiques, qui peuvent être considérés comme mononiveaux, en ce sens qu'ils imposent de considérer un seul niveau à la fois. Alors qu'on voudrait modéliser simultanément des données qui relèvent de deux niveaux, l'utilisation de modèles classiques impose de traiter ces données soit au niveau 1 (celui des élèves), soit au niveau 2 (celui des classes). Dans le premier cas, on est alors contraint de désagréger les données correspondant à la classe au niveau inférieur, alors que, dans le second cas, on est contraint d'agréger les données correspondant aux élèves au niveau supérieur. Cette alternative ne poserait guère de problèmes si elle ne risquait de conduire à des résultats différents. On sait en effet depuis longtemps que les relations agrégées peuvent être très différentes des relations obtenues au niveau désagrégé (Robinson, 1950). Ce phénomène est connu dans la littérature sous le terme de biais d'agrégation, ou encore d'erreur écologique.

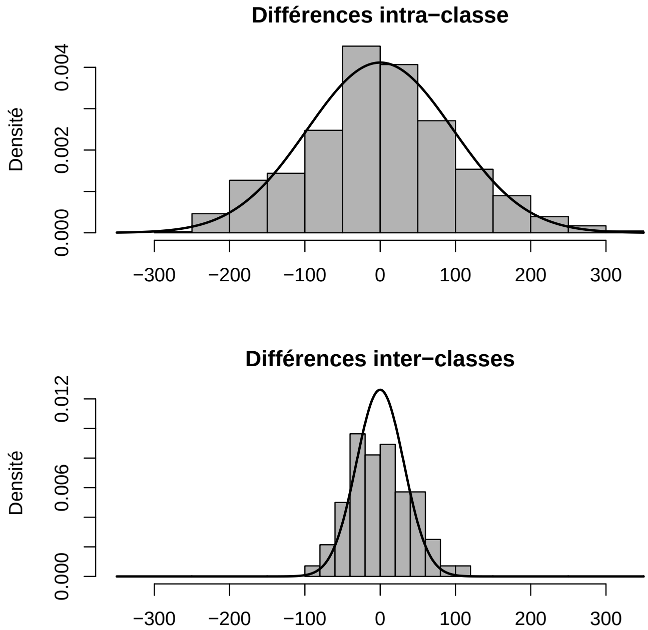
De plus, les modèles des moindres carrés ordinaires reposent sur l'hypothèse d'indépendance des résidus. Or, cette hypothèse est généralement contredite lorsqu'on traite des données hiérarchisées. En effet, dans ce cas, les individus qui appartiennent à un groupe particulier sont souvent plus semblables entre eux que des individus qui appartiennent à des groupes différents. Ce phénomène est dû à plusieurs facteurs. D'une part, les individus qui fréquentent un même groupe ont souvent, à l'origine, des caractéristiques relativement proches. Ainsi, les élèves qui fréquentent une même classe appartiennent souvent au même quartier ou au même village, qui est socialement typé, ce qui fait que, outre des caractéristiques géographiques proches, ils possèdent également des caractéristiques sociales proches. D'autre part, les individus d'un même groupe partagent un même environnement : les élèves d'une même classe partagent le même enseignant et sont soumis à des conditions de classe identiques. Enfin, les individus d'un même groupe interagissent et peuvent donc s'influencer mutuellement. Dans ce cas, les résidus ne sont pas indépendants les uns des autres, au sein d'un même groupe. Or, la violation de l'hypothèse d'indépendance des résidus entraîne des biais dans les estimations puisque cela conduit à sous-estimer les erreurs types des coefficients de régression.

À ces problèmes s'ajoute le fait que les différents niveaux de la hiérarchie sont aléatoires et qu'il faut donc les analyser comme tels. Cela impose une modélisation dite mixte, où l'on estime à la fois des effets fixes et des effets aléatoires (Longford, 1993 ; Pinheiro & Bates, 2000 ; Searle et al., 1992). Les effets fixes sont ceux des variables explicatives supposées être mesurées sans erreur. Au contraire, les effets aléatoires relèvent d'un ensemble infini de modalités d'un facteur, dont un échantillon seulement pourra être observé. C'est bien ce que l'on veut étudier ici puisque chacune des classes ne nous intéresse pas en tant que telle mais en tant qu'élément d'un ensemble plus vaste. Les modèles des moindres carrés ordinaires sont donc clairement inadaptés puisqu'ils estiment uniquement des effets fixes, tandis que les modèles multiniveaux ont été spécifiquement conçus pour résoudre ces problèmes liés à l'analyse des données hiérarchisées, permettant par là même de traiter les effets des classes comme aléatoires.

7.2.2 Le modèle vide

La première étape de la construction d'un modèle multiniveau consiste à réaliser un modèle *vide*, qui n'inclut aucune variable explicative, et qui correspond à une simple décomposition de la variance totale du phénomène en une part de variance inter-classes et une part de variance intra-classe (figure 7.13). La variance intra-classe de notre modèle vide vaut 9400 et sa variance interclasses 1000. La part de variance intra-classe est donc égale à 90.4% ; la part de variance inter-classe, quant à elle, est égale à 9.6%. Les différences entre les élèves d'une même classe sont donc beaucoup plus marquées que les différences entre les classes.

FIGURE 7.13 – *Variabilité intra-classe et inter-classes.*



7.2.3 Effets fixes

Le modèle vide ne tient compte d'aucune variable explicative. Nous allons donc construire un modèle plus sophistiqué qui permette d'expliquer au mieux les différences de compétences mathématiques entre les élèves. Nous commencerons par décrire l'ensemble des variables potentiellement explicatives. Puis l'édification du modèle s'effectuera pas à pas à partir du modèle contenant toutes les variables potentiellement explicatives. À chaque étape, nous examinerons s'il est possible de supprimer une variable sans affecter la qualité de la description des données. Si c'est le cas, la variable pointée sera exclue du modèle. Puis nous poursuivrons jusqu'à ne plus pouvoir en éliminer sans altérer la précision de la description. Pour comparer les modèles, nous utiliserons à chaque étape le critère d'information bayésien (Schwarz, 1978) qui tient compte à la fois du maximum de vraisemblance et de la parcimonie du modèle. Ainsi nous sommes assurés d'obtenir à la fin du processus le modèle à la fois le plus simple et le plus précis.

Listons les variables potentiellement explicatives. Nous les répartirons selon quatre catégories. La première rassemblera les variables individuelles ; la deuxième regroupera les variables qui définissent la structure de la classe ; la troisième regroupera les variables qui caractérisent l'enseignant et sa manière de gérer la classe ; la quatrième et dernière catégorie ne contiendra qu'une variable supra-environnementale : le *canton*.

Variables individuelles

Les variables individuelles sont celles dont nous avons décrit l'impact sur les compétences au paragraphe 7.1. Ce sont les variables : *âge*, *sexe*, *immigration*, *langue maternelle*, *niveau socio-économique*, *redoublement*, *attitude envers les mathématiques*, *préférences en mathématiques* et *mode de travail en classe de mathématiques.*

Variables classe

Les classes sont caractérisées par leur type (*i.e.* classe à un degré, à deux degrés ou à degrés multiples) et par leur composition (*nombre d'élèves dans la classe*, *nombre d'élèves de 4P dans la classe*, *âge moyen des élèves de 4P*, *proportion de filles*, *proportion d'élèves natifs*, *proportion d'élèves francophones*, *niveau socio-économique moyen* et *proportion de redoublants*).

Variables maître

Ces variables sont nombreuses, elles rassemblent quasiment toutes les informations collectées dans le questionnaire aux enseignants. Un premier lot de variables caractérise l'enseignant de manière générale (*âge*, *sexe*, *expérience*, *formation initiale* et *taux d'occupation*). Un deuxième lot de variables fournit des informations sur l'enseignement des mathématiques prodigué et l'usage qui est fait des nouveaux moyens (*nombre d'heures d'enseignement hebdomadaires*, *choix des modules*, *organisation du travail*, *utilisation de la calculette et de l'ordinateur*, *utilisation de moyens complémentaires*). Un troisième lot de variables renseigne sur la gestion de la classe et l'évaluation du travail des élèves. Le quatrième et dernier lot indique dans quelle mesure l'enseignant apprécie les nouveaux moyens.

Variable supra-environnementale

Comme nous l'avons déjà mentionné, la seule variable de cette catégorie est la variable *canton.*

Lors de la construction du modèle, de nombreuses variables n'ayant aucun pouvoir explicatif s'avèrent superflues et sont donc éliminées. Finalement, le meilleur des modèles ne contient que onze variables dont plus de la moitié sont des variables individuelles. Les estimations des effets fixes de ce modèle sont consignées dans le tableau 7.4.

Selon notre modèle, un élève bernois (533 + 0) natif (+ 0) de niveau socio-économique moyen (+ 0), n'ayant pas redoublé (+ 0), ayant une attitude positive envers les mathématiques (+ 0), n'ayant de préférence ni pour le calcul (+ 0) ni pour les problèmes (+ 0), aimant faire des maths seul (+ 0) mais

TABLEAU 7.4 – *Effets fixes du meilleur modèle visant à expliquer les différences de compétences mathématiques en 4^e année primaire.*

	Paramètre
Constante	533
Variables individuelles	
Immigration	
élève de 1^{ere} génération	− 20
élève non natif	− 26
Niveau socio-économique	
inférieur	− 13
supérieur	+ 29
Redoublement	
élève ayant redoublé	− 51
Attitude envers les mathématiques	
négative	− 48
Préférence	
pour le calcul	− 8
pour les problèmes	+ 5
Goût pour le travail individuel	
non	− 11
Goût pour le travail en groupe	
non	+ 17
Variables classe	
Nombre d'élèves	
strictement inférieur à 18	+ 14
strictement supérieur à 21	− 6
Variables maître	
Âge de l'enseignant	
30 ans ou moins	− 15
51 ans ou plus	+ 4
Traitement des modules	
généralement les uns après les autres	− 15
Variable supra-environnementale	
Canton	
FR	+ 34
GE	− 30
JU	+ 13
NE	− 17
VS	+ 15
VD	− 23

aussi en groupe (+ 0), travaillant dans une classe de 20 élèves (+ 0) tenue par un enseignant d'un quarantaine d'année (+ 0) qui a l'habitude d'aborder différents modules simultanément (+ 0), devrait obtenir à l'échelle de *compétences mathématiques* un score moyen de 533 points.

Afin de mieux illustrer la manière d'utiliser notre modèle, calculons encore le score de deux autres élèves, l'un très compétent et l'autre beaucoup moins.
Supposons que le premier soit un élève jurassien (533 + 13), natif (+ 0), de milieu socio-économique supérieur (+ 29), n'ayant jamais redoublé (+ 0), qui aime faire des mathématiques (+ 0), surtout résoudre des problèmes (+ 5) seul (+ 0) mais qui n'apprécie guère travailler en groupe (+ 17). Supposons également que dans sa classe il n'y ait que 16 élèves (+ 14), et que son enseignant – d'une cinquantaine d'années (+ 4) – aborde généralement plusieurs modules simultanément (+ 0). Cet élève devrait obtenir selon notre modèle un score moyen de 615 points.
Supposons que le second soit un élève vaudois (533 – 23), non natif (– 26), de milieu modeste (– 13) et ayant redoublé une année scolaire (– 51). Supposons, de plus, qu'il déteste les mathématiques (– 48), spécialement quand il faut travailler seul (– 11), et que ce qu'il préfère encore, c'est le calcul (– 8) et surtout les activités en groupe (+ 0). Imaginons que dans sa classe, il y ait 24 élèves (– 6), que son enseignant soit jeune (– 15) et traite habituellement les modules les uns après les autres (– 15). Un tel élève devrait obtenir *grosso modo* un score de 317 points à l'échelle de *compétences mathématiques*.
Remarquons que les différences les plus importantes sont provoquées par trois variables individuelles qui sont le *niveau socio-économique*, le *redoublement* et l'*attitude envers les mathématiques*. L'effet des deux premières a déjà été décrit de nombreuses fois, on sait que l'école n'est pas en mesure de totalement estomper l'impact de l'origine sociale sur le développement des compétences et que généralement les enfants issus d'un milieu favorisé réalisent de meilleures performances scolaires que leurs camarades d'origine plus modeste. On sait également que le redoublement n'a que rarement l'effet remédiateur souhaité et qu'il ne change pas drastiquement la position des élèves dans la cohorte, ces derniers restant souvent à la traîne malgré la révision du programme. La troisième attire l'attention sur l'une des particularités des mathématiques : cette discipline peut susciter de vives réactions émotionnelles négatives. Un élève qui éprouve de l'anxiété chaque fois qu'il doit faire des mathématiques perdra confiance et se mettra rapidement à douter de ses capacités. Obnubilé par ses craintes, ressassant constamment ses angoisses, il ne pourra plus s'investir pleinement dans les tâches proposées et son travail s'en ressentira. Ses performances médiocres ne feront qu'attiser son aversion des mathématiques. Nimier (1988), par exemple, décrit fort bien ces spirales infernales qui conduisent souvent à un dégoût irrémédiable des mathématiques. Malgré l'aspect séduisant et l'approche interactive et ludique des nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques, qui enthousiasment beaucoup d'enseignants et la plupart des élèves, une mince frange d'élèves entretient une relation tendue et parfois douloureuse avec les mathématiques et, comme le montre notre modèle, leurs performances en pâtissent.
Très peu de variables contextuelles interviennent dans le modèle : une variable classe et deux variables enseignant. Il n'est pas trop étonnant de constater que

l'effectif de la classe influence l'efficacité de l'enseignement ni que l'expérience de l'enseignant joue un rôle positif sur la transmission des savoirs.
Plusieurs études récentes ont montré que les élèves réalisent de meilleures performances si leur classe compte moins de 20 élèves. Ces résultats s'expliqueraient par un climat de classe différent selon l'effectif de la classe. En effet, les chercheurs ont constaté que l'ambiance et les relations sont différentes selon que la classe a plus ou moins de 20 élèves : les grandes classes sont plus disciplinées, l'ambiance y est plus académique ; dans les petites classes, les élèves sont plus remuants, mais les relations entre maîtres et élèves sont plus chaleureuses et les interactions entre élèves plus nombreuses (Bert, 2004 ; 2005).
Nous avions déjà constaté lors de l'enquête Mathéval 2P que l'expérience de l'enseignant avait une incidence favorable sur les performances de ses élèves. Le métier d'enseignant est complexe, il s'acquiert lentement et de nombreuses années de pratique sont nécessaires pour pouvoir gérer au mieux une classe et atteindre, sur le plan des apprentissages, une efficacité maximale.
L'intervention de la troisième variable contextuelle qui définit la manière de traiter les différents modules mathématiques – séquentiellement ou parallèlement – est plus surprenante mais s'explique peut-être par le fait que les élèves ayant bénéficié d'un enseignement parallèle ont, lors de la passation de notre épreuve – qui, rappelons-le, s'est déroulée en mai –, un aperçu général de toute la matière à assimiler en 4^{e}, alors que les élèves ayant bénéficié d'un enseignement séquentiel manifestent forcément de grosses lacunes dans les domaines n'ayant pas encore été abordés.
Le nombre restreint de variables contextuelles figurant dans notre modèle n'exclut pas que d'autres caractéristiques de la classe ou de l'enseignant soient importantes et agissent sur l'efficacité de l'enseignement et le développement des compétences des élèves. Les observations que nous avons faites sont un bilan global qui ne porte pas uniquement sur les progrès faits en 4^{e} année mais plutôt sur l'ensemble des quatre premières années d'école obligatoire. Les compétences que nous avons mesurées sont la résultante de nombreuses influences, modelées par divers enseignants. Si nous avions voulu connaître de façon plus spécifique le rôle joué par l'enseignant de 4^{e} année, il aurait fallu déterminer les compétences des élèves non seulement en fin d'année scolaire mais aussi au début. L'importance des progrès des élèves nous aurait permis d'identifier plus facilement les caractéristiques des enseignants ayant un impact favorable sur l'évolution des compétences des élèves, c'est ainsi, par exemple que procéda Felouzis (1997).
Notons que la variable *canton* est importante et est source de grandes différences de performances. En 2^{e} année primaire, les différences de performances cantonales pouvaient s'expliquer par des facteurs structuraux (Antonietti, 2003b). En 4^{e}, cela n'est plus le cas. Le modèle que nous avons construit permet d'identifier l'apport spécifique de chaque canton *indépendamment* des facteurs socio-démographiques et pourtant des différences subsistent. L'explication doit donc être cherchée ailleurs !

7.2.4 Effets aléatoires

La description que nous avons faite de notre modèle pourrait laisser croire que nos explications sont déterministes et que les obstacles créés par certains facteurs comme l'origine sociale ou le redoublement sont insurmontables ou que des élèves ayant un jeune enseignant sont lourdement pénalisés, loin s'en faut.

Malgré l'identification de quelques effets fixes, d'importantes différences non expliquées subsistent tant entre les classes, qu'entre les élèves ou sein d'une même classe. Afin d'étayer nos dires, estimons les variances inter-classes et intra-classe de notre meilleur modèle. La première vaut 314 et la seconde 8007. Ces variances sont des variances résiduelles, non expliquées par le modèle donc. Afin de mesurer la pertinence globale de notre modèle, calculons son pouvoir explicatif au niveau des élèves (niveau 1, intra-classe) et à celui des classes (niveau 2, inter-classes). Le pouvoir explicatif d'un modèle multiniveau s'exprime comme un pourcentage de variance expliquée qui traduit le rapport entre la variance résiduelle du modèle testé et la variance résiduelle du modèle vide, à chacun des niveaux considérés :

$$\text{pouvoir explicatif} = \frac{\text{variance du modèle vide} - \text{variance du modèle testé}}{\text{variance du modèle vide}}.$$

Au niveau 1, la part de variance expliquée par le modèle vaut $\frac{9400-8007}{9400} = 14.8\%$. Au niveau 2, la part de variance expliquée vaut $\frac{1000-314}{1000} = 68.6\%$.

Notre modèle rend donc bien compte des différences inter-classes, en revanche les différences intra-classe restent dans une très large mesure inexpliquées. Les enseignants savent très bien que tous leurs élèves ne sont pas également doués et que, malgré tous leurs efforts, certaines différences ne seront jamais entièrement effacées.

Pour mieux faire comprendre l'imprécision de notre modèle, nous avons représenté dans la figure 7.14 la distribution des scores possibles des trois élèves dont nous avions estimés les performances en ne tenant compte que des effets fixes (§ 7.2.3).

Les distributions se chevauchent passablement. Dans ces conditions, il n'est pas impossible d'assister à des inversions et de constater qu'un élève qui, si l'on ne tenait compte que des effets fixes, devrait obtenir le score le plus bas, obtienne finalement le score le plus haut (tableau 7.5). La variance résiduelle étant très grande, il est fréquent d'observer des inversions même lorsque la différence des effets fixes est considérable.

En résumé nous avons réussi à identifier quelques facteurs explicatifs du niveau de compétences mathématiques. Les variables les plus importantes sont, sans surprise, le niveau socio-économique des élèves, le redoublement et l'attitude envers les mathématiques. Mais la taille de la classe et l'expérience de l'enseignant, ainsi que sa manière d'agencer les différents modules mathématiques au

FIGURE 7.14 – *Effets fixes et aléatoires combinés pour trois élèves.*

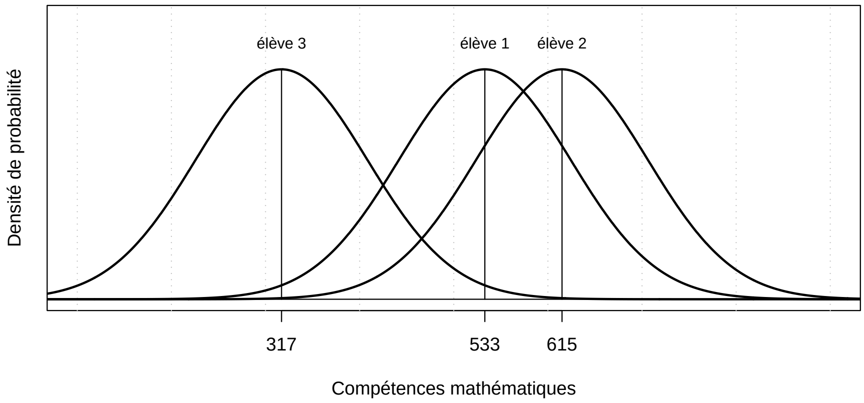


TABLEAU 7.5 – *Probabilité d'inversion selon la différence moyenne à l'échelle de compétences mathématiques.*

Différence moyenne	Probabilité d'inversion
0	50.0%
25	42.3%
50	34.9%
75	28.0%
100	21.9%
125	16.4%
150	12.2%
175	8.7%
200	6.1%

cours de l'année, influencent aussi les compétences mathématiques. Soulignons que le modèle proposé est loin d'être déterministe : bien que nous puissions rendre compte précisément des différences entre les classes, une grande partie des écarts observés entre les élèves reste totalement inexpliquée.

Conclusion

L'analyse détaillée des procédures de résolution des problèmes montre que les élèves sont astucieux. Face à une situation complexe, ils ne demeurent pas pantois, ils sont capables de saisir les éléments pertinents du problème et, avec les moyens du bord, d'en esquisser une solution. De telles conduites sont la manifestation d'une certaine habitude à s'atteler à des problèmes corsés et à effectuer des recherches demandant patience et persévérance. Ils ne rechignent pas à essayer, à vérifier parfois, à rectifier, à gribouiller, à effacer puis à recommencer. Leurs démarches, opulentes souvent, n'aboutissent malheureusement pas toujours à la bonne solution.

De nombreux élèves semblent absolument fascinés par la puissance, l'élégance et l'économie du système numérique et croient, à tort, que l'arithmétique est la panacée et que tout problème se résout par le calcul. Beaucoup d'élèves sont ainsi partagés ou plutôt tiraillés entre, d'une part, la volonté de trouver une solution bricolée par leurs propres moyens et, d'autre part, celle d'appliquer la méthode canonique valorisée par leur entourage qui consiste à calculer coûte que coûte. Et c'est ici que le bât blesse car si les élèves adoptent fréquemment des conduites de recherche originales, peu sont capables de grandes prouesses techniques et les algorithmes de la soustraction et de la multiplication, par exemple, recèlent pour eux encore bien des mystères. L'emploi de ces techniques de calcul est encore très incertain et le résultat des opérations n'est que rarement assuré.

L'affirmation qui précède n'est pas qu'une impression éthérée de chercheurs. Elle se fonde aussi sur l'avis d'une douzaine d'experts enseignants, formateurs d'enseignants et chercheurs en éducation qui, après avoir réfléchi, discuté, été informés des taux de réussite observés, fixèrent un seuil minimal de compétences en mathématiques en référence au plan d'études romand. Selon ces juges, trois élèves sur dix, à peine, atteignent les objectifs de fin de 4^{e} année scolaire. Ce résultat est à prendre avec précaution car l'appréciation des performances des élèves se fit sans aucune concession. En effet, la comptabilité ne porta que sur les démarches ayant conduit à la bonne solution. Les tentatives, aussi subtiles soient-elles, qui aboutirent à une réponse erronée, ne comptèrent pour rien.

Certains conservateurs, nostalgiques de l'école d'antan, pourraient se scandaliser de ce constat, incriminer les nouveaux moyens et réclamer à tue-tête la

réintroduction d'un enseignement frontal des mathématiques et des méthodes d'entraînement intensif qui l'accompagne.
D'autres observations rapportées dans cet ouvrage, nous forcent à être moins catégoriques et vociférants. Premièrement, nous constatons qu'en deux ans les élèves ont progressé. Ils résolvent avec aisance des problèmes sur lesquels les élèves de 2P s'étaient achoppés. Deuxièmement, la comparaison de leurs compétences avec celles des élèves ayant appris les mathématiques avec les anciens moyens est tout à fait honorable. Dans les domaines logique et numérique, ils ont un peu de retard ; en revanche, ils sont en avance dans le domaine géométrique. Par ailleurs, les écarts ne sont pas très marqués et s'expliquent facilement en fonction de l'importance accordée dans les programmes aux différents domaines mathématiques. Troisièmement, les enseignants apprécient les nouveaux moyens d'enseignement, ils aiment leur aspect ludique, la variété des activités proposées et la possibilité qu'ils offrent de développer chez les élèves la faculté de recherche ainsi que celle de collaborer et travailler en groupe. Ils regrettent uniquement le manque d'exercices d'entraînement et d'activités d'automatisation.
Il est important de dire que les nouveaux moyens, malgré certains défauts, ont d'immenses qualités. La plus importante est d'ordre didactique. Beaucoup de situations proposées dans ces moyens permettent à l'élève de donner lui-même du sens aux connaissances qu'il manipule, ce qui n'était pas le cas auparavant. L'enseignant n'a plus à dire ce qu'il veut que l'élève sache car les situations sont construites de telle sorte qu'elles fonctionnent au niveau des connaissances sans l'intervention du maître. Rappelons que, selon cette approche, l'apprentissage est conçu comme une adaptation de l'élève à la situation problème :

> La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux, des « problèmes » qu'il propose. Ces problèmes choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. (Brousseau, 1998, p. 59).

Néanmoins l'enseignement ne se réduit pas à l'organisation d'une succession de situations d'apprentissage. Certains enseignants l'ont peut-être oublié. Comme le dit très clairement Brousseau :

> [Les enseignants] doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et ce qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe, comme résultat des élèves et

> comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles, ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir.
> [...] La prise en compte « officielle » par l'élève de l'objet de la connaissance et par le maître, de l'apprentissage de l'élève est un phénomène social très important et une phase essentielle du processus didactique : cette double reconnaissance est l'objet de l'institutionnalisation. (Brousseau, 1998, p. 311).

Une réserve doit encore être faite. Nous devons admettre que les apprentissages ne sont pas menés à leur terme. Les élèves restent souvent des novices, ils ont acquis de réelles compétences, mais ils ne sont pas pour autant des experts. Comme le dit très justement Chevallard :

> Pour devenir « expert » en matière d'effectuation de sommes d'entiers relatifs, ou de résolution d'équations du second degré ou d'inéquations, ou de décomposition de fractions en éléments simples, en effet, il faut ne pas s'être contenté de savoir « résoudre le problème ». Il faut par exemple s'être demandé comment on pourrait *encore* résoudre telle équation que l'on sait *déjà* résoudre de telle ou telle manière. En d'autres termes, et pour le dire avec des mots empruntés à la sagesse populaire, il faut, cent fois, sur le métier, avoir remis son ouvrage. Il faut avoir longuement *travaillé sa technique.* (Chevallard, 1991, p. 41).

Il y a là quelque chose de besogneux qui s'insinue sous-tendu par une éthique de tâcheron. Mais nous pensons que les élèves devraient se faire techniciens de l'addition, de la multiplication ou du mesurage, ils devraient se faire, à un niveau de compétence défini, des professionnels de ces questions à l'encontre d'une certaine hiérarchie culturelle des actes intellectuels qui idolâtre l'*amateur éclairé* et tient en horreur le *professionnel* et le *technicien.*

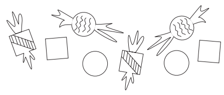
Annexe

Dans cette annexe, nous rassemblons tous les problèmes de notre épreuve de mathématiques. Par la même occasion, nous définissons les compétences requises pour résoudre chaque problème ainsi que les critères utilisés pour leur correction. Les problèmes peuvent être constitués de plusieurs items. Chaque item est évalué selon une variable dichotomique. La modalité 0 de cette variable signifie que la réponse à l'item n'est pas entièrement juste, la modalité 1 signifie au contraire qu'elle l'est. Pour définir la grille de correction d'un problème, nous indiquons simplement les réponses qu'il fallait fournir pour obtenir 1 point à chaque item. Nous caractérisons aussi chaque problème, d'une part, par la proportion des élèves qui l'ont résolu correctement et, d'autre part, par la proportion de réussite attendue par les juges que nous avions réunis pour définir un seuil minimal de compétence (chapitre 4).

Douceurs

Douceurs

Paul a quatre sortes de bonbons dans une boîte. Certains sont ronds, d'autres carrés. Certains sont emballés et d'autres pas.
Paul mange tous les bonbons ***ronds et emballés***, il laisse les autres dans la boîte.
Peut-on encore trouver dans la boîte : (Souligne la bonne réponse.)



∗ un bonbon emballé ?	oui non
∗ un bonbon non emballé ?	oui non
∗ un bonbon rond et non emballé ?	oui non
∗ un bonbon carré et non emballé ?	oui non

Compétences visées

Douceurs fait discrètement référence à la logique des prédicats. Pour résoudre ce problème, il faut connaître le sens de la conjonction logique et être en mesure de déterminer l'extension d'un énoncé simple.

Grille de correction

Item	Réponse
1	oui
2	oui

Item	Réponse
3	oui
4	oui

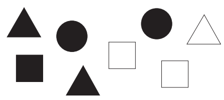
Taux de réussite

	Item			
	1	2	3	4
Taux observé [%]	45	81	46	87
Taux attendu [%]	60	80	60	75

Carrés, ronds et triangles

Carrés, ronds et triangles

Regarde ces formes :



Indique si les phrases suivantes sont ***vraies*** ou ***fausses***, en entourant la bonne réponse.

Parmi ces formes,

* tous les carrés sont blancs.	vrai	faux
* aucune forme ronde n'est blanche.	vrai	faux
* si une forme est ronde, alors elle est noire.	vrai	faux
* seuls les triangles sont noirs.	vrai	faux
* tous les dessins noirs sont des triangles.	vrai	faux
* si une forme est noire, alors elle est ronde.	vrai	faux
* aucune forme blanche n'est ronde.	vrai	faux

Compétences visées

Carrés, ronds et triangles fait appel à des rudiments du calcul des prédicats du premier ordre. Pour résoudre ce problème, il faut, d'une part, connaître la signification de la conditionnelle et des quantificateurs existentiel et universel et, d'autre part, être en mesure de vérifier la validité d'un énoncé.

Grille de correction

Item	Réponse
1	faux
2	vrai
3	vrai
4	faux

Item	Réponse
5	faux
6	faux
7	vrai

Taux de réussite

	Item						
	1	2	3	4	5	6	7
Taux observé [%]	98	96	90	98	100	66	98
Taux attendu [%]	90	75	80	80	90	60	85

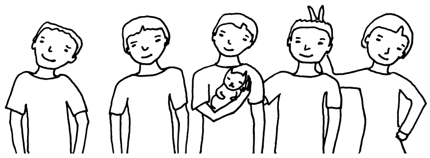
Pierre et les autres

Pierre et les autres

Pierre, Marcel, Luc, Jean et François sont cinq amis :
- Jean est plus jeune que Pierre ;
- Luc et François ont le même âge ;
- Marcel est plus jeune que Luc ;
- François est plus jeune que Jean.

Quel est l'enfant qui est le plus jeune ? ______________

Quel est l'enfant qui est le plus âgé ? ______________



Compétences visées

Pour résoudre *Pierre et les autres*, il faut être capable de représenter adéquatement les propositions du problème et d'utiliser la transitivité de la relation binaire « être plus jeune que ».

Grille de correction

Item	Réponse
1	Le plus jeune : Marcel
	Le plus âgé : Pierre

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	61
Taux attendu [%]	60

La balance

La balance

On compare le poids de cinq objets : 

On a les situations suivantes :

Quel est l'objet le plus lourd ? ____________

Quel est l'objet le plus léger ? ____________

Compétences visées

Pour résoudre *La balance*, il faut être capable de lire et interpréter les figures de l'énoncé et d'utiliser la transitivité de la relation binaire « être plus lourd que ».

Grille de correction

Item	Réponse
1	Le plus lourd : A
	Le plus léger : B

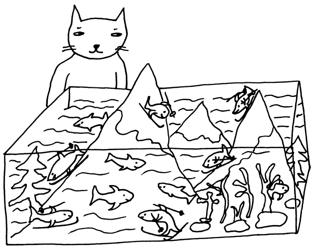
Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	42
Taux attendu [%]	50

Classe sportive

Classe sportive

Dans une classe de 25 élèves, tous pratiquent la natation ou le ski. 14 d'entre eux savent skier ; 15 d'entre eux savent nager.
Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe qui savent à la fois nager et skier ?



Compétences visées

Pour résoudre *Classe sportive*, il faut trouver un moyen judicieux de représenter les différents éléments du problème. Les nombres utilisés dans ce problème sont suffisamment petits pour permettre une représentation exhaustive de toutes les unités impliquées, la solution s'obtient alors facilement par énumération et comptage.

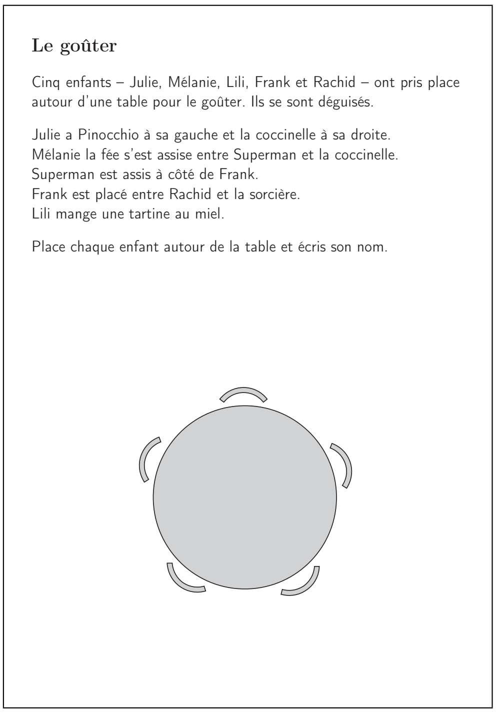
Grille de correction

Item	Réponse
1	4

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	59
Taux attendu [%]	50

Le goûter



Le goûter

Cinq enfants – Julie, Mélanie, Lili, Frank et Rachid – ont pris place autour d'une table pour le goûter. Ils se sont déguisés.

Julie a Pinocchio à sa gauche et la coccinelle à sa droite.
Mélanie la fée s'est assise entre Superman et la coccinelle.
Superman est assis à côté de Frank.
Frank est placé entre Rachid et la sorcière.
Lili mange une tartine au miel.

Place chaque enfant autour de la table et écris son nom.

Compétences visées

Le goûter fait principalement appel à des notions élémentaires de logique appliquées à un agencement spatial rudimentaire. Pour résoudre ce problème, il faut être capable de comprendre un énoncé, d'en tirer des informations pertinentes, de faire des déductions et de maîtriser les relations spatiales.

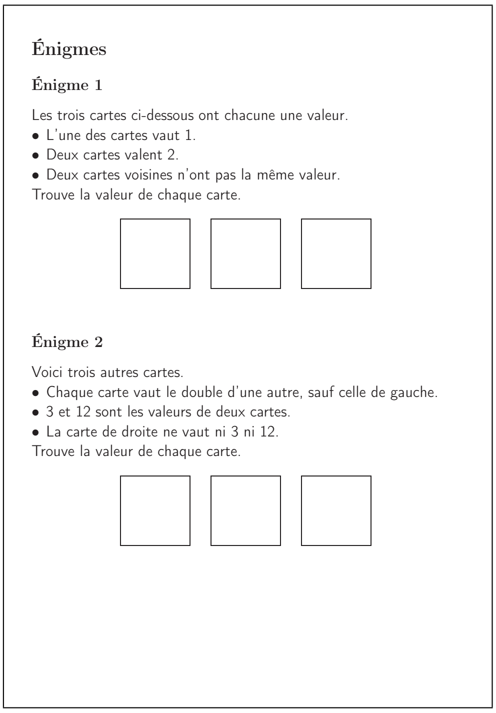
Grille de correction

Item	Réponse
1	Tous les enfants sont placés correctement. À la gauche de Julie, il y a Frank ; à la gauche de Frank, il y a Rachid ; à la gauche de Rachid, il y a Mélanie ; à la gauche de Mélanie, il y a Lili ; et à la gauche de Mélanie, il y a Julie.

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	45
Taux attendu [%]	50

Énigmes



Énigmes

Énigme 1

Les trois cartes ci-dessous ont chacune une valeur.
- L'une des cartes vaut 1.
- Deux cartes valent 2.
- Deux cartes voisines n'ont pas la même valeur.

Trouve la valeur de chaque carte.

Énigme 2

Voici trois autres cartes.
- Chaque carte vaut le double d'une autre, sauf celle de gauche.
- 3 et 12 sont les valeurs de deux cartes.
- La carte de droite ne vaut ni 3 ni 12.

Trouve la valeur de chaque carte.

Compétences visées

Pour résoudre *Énigmes*, il faut être capable de comprendre un énoncé, d'en tirer les informations pertinentes, de maîtriser quelques relations simples – comme « être voisins », « être le double », « être à droite » ou « être à gauche » – et de faire des déductions.

Grille de correction

Item	Réponse
1	2 ; 1 ; 2
2	3 ; 12 ; 6

Taux de réussite

	Item	
	1	2
Taux observé [%]	74	19
Taux attendu [%]	75	40

Des chiffres et des nombres

Des chiffres et des nombres

Combien de nombres de trois chiffres peux-tu écrire en n'utilisant que le chiffre 2 et le chiffre 4 (tu peux les utiliser plusieurs fois) ?

Fais-en la liste (tu peux faire un diagramme).

Compétences visées

Pour résoudre *Des chiffres et des nombres*, il faut être capable de dresser une liste de solutions et pouvoir s'assurer de son exhaustivité. Une démarche systématique est un atout, mais il est possible de procéder par tâtonnement.

Grille de correction

Item	Réponse
1	La liste est exhaustive et ne contient aucun intrus : 222, 224, 242, 244, 422, 424, 442, 444. Sa longueur 8 est spécifiée.

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	40
Taux attendu [%]	50

Craies et caramels

Craies et caramels

a) Combien de boîtes de 100 craies peut-on faire avec 4371 craies ?

Réponse : ____________

b) Combien de boîtes de 100 craies peut-on faire avec 1200 craies ?

Réponse : ____________

c) Combien de boîtes de 10 caramels peut-on faire avec 4371 caramels ?

Réponse : ____________

d) On fait des boîtes de 10 caramels avec 512 caramels. Combien reste-t-il de caramels isolés ?

Réponse : ____________

Compétences visées

Craies et caramels fait référence au système décimal et au calcul d'un quotient entier, mais de manière plus contextualisée que *Centaines, dizaines et unités.* Pour résoudre ce problème, il faut être capable d'extraire le nombre de dizaines, centaines ou milliers d'un nombre inférieur à 10'000.

Grille de correction

Item	Réponse
1	43
2	12

Item	Réponse
3	437
4	2

Taux de réussite

	Item			
	1	2	3	4
Taux observé [%]	47	66	33	47
Taux attendu [%]	60	60	50	50

Centaines, dizaines et unités

Centaines, dizaines et unités

a) Combien y a-t-il de centaines dans 4371 ?

Réponse : ____________

b) Combien y a-t-il de dizaines dans 4371 ?

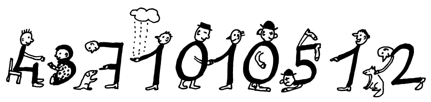
Réponse : ____________

c) Combien y a-t-il de dizaines dans 1010 ?

Réponse : ____________

d) Combien y a-t-il d'unités dans 512 ?

Réponse : ____________



Compétences visées

Centaines, dizaines et unités fait référence au système décimal et au calcul d'un quotient entier. Pour résoudre ce problème il faut savoir effectuer la division euclidienne d'un nombre entier par 100, 10 ou 1.

Grille de correction

Item	Réponse
1	43
2	437

Item	Réponse
3	101
4	512

Taux de réussite

	Item			
	1	2	3	4
Taux observé [%]	33	27	27	35
Taux attendu [%]	50	40	50	40

Le plus proche

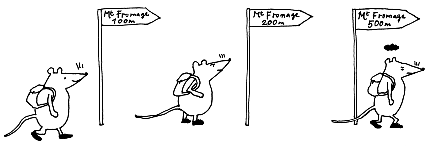
Le plus proche

Souligne parmi les nombres suivants celui qui est le plus proche de 1023 :

1203 1040 1230 2310

Et parmi les nombres suivants, souligne celui qui est le plus proche de 2001 :

1001 1002 3001 3002



Compétences visées

Le plus proche fait référence à l'ordination de nombres dans le système décimal. Pour résoudre ce problème, il faut, premièrement, être capable d'intercaler un nouveau nombre dans une série ordonnée d'entiers naturels ; deuxièmement, il faut savoir que la distance entre deux nombres x_1 et x_2 sur la « bande » des nombres naturels se détermine en calculant leur différence en valeur absolue $d = |x_1 - x_2|$ et, troisièmement, être capable d'effectuer correctement des soustractions.

Grille de correction

Item	Réponse
1	1040
2	1002

Taux de réussite

	Item	
	1	2
Taux observé [%]	87	59
Taux attendu [%]	90	65

Plus petit, plus grand

Plus petit, plus grand

Voici cinq chiffres :

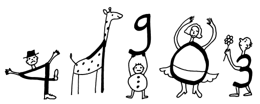
4 1 9 0 3

a) Quel est le plus grand nombre qu'on peut composer avec ces cinq chiffres en ne les utilisant chacun qu'une seule fois ?

Réponse : ce nombre est ____________

b) Si on ne prend pas tous les chiffres, quel est le plus petit nombre possible supérieur à 1000 ?

Réponse : ce nombre est ____________



Compétences visées

Plus petit, plus grand fait appel aux propriétés de l'ensemble ordonné des entiers naturels et de leur écriture dans le système décimal. Pour résoudre ce problème, il faut être capable de comprendre un énoncé, de reconnaître la valeur positionnelle des chiffres et de savoir ordonner des nombres.

Grille de correction

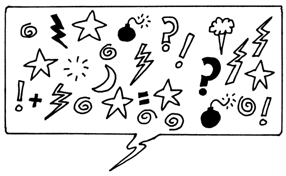
Item	Réponse
1	94310
2	1034

Taux de réussite

	Item 1	Item 2
Taux observé [%]	71	29
Taux attendu [%]	75	50

Mille millions de mille sabords

Mille millions de mille sabords



Ecris en chiffres chaque nombre suivant :

a) mille quarante : ____________

b) dix mille quatre : ____________

c) quatre cent quatre : ____________

d) quarante mille quarante-quatre : ____________

e) trois mille nonante-neuf : ____________

f) neuf mille huit : ____________

g) mille septante-trois : ____________

Compétences visées

Pour résoudre *Mille millions de mille sabords*, il faut savoir passer d'un mot-nombre à son écriture chiffrée.

Grille de correction

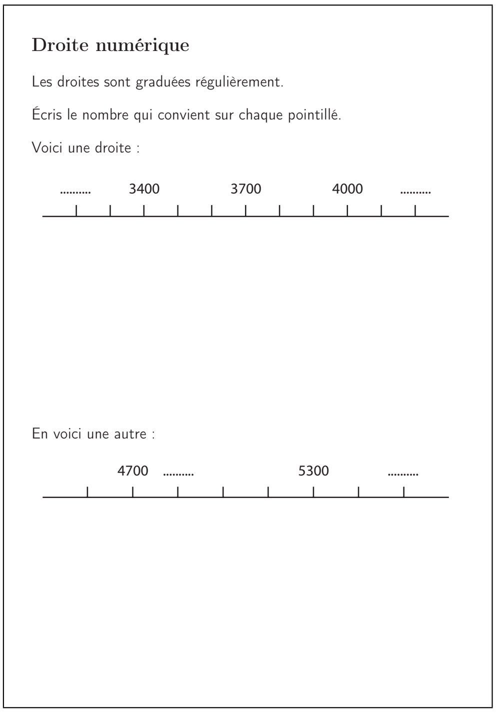
Item	Réponse
1	1'040
2	10'004
3	404
4	40'044

Item	Réponse
5	3'099
6	9'008
7	1'073

Taux de réussite

	Item						
	1	2	3	4	5	6	7
Taux observé [%]	94	72	90	61	90	90	88
Taux attendu [%]	90	75	95	75	90	90	85

Droite numérique



Droite numérique

Les droites sont graduées régulièrement.

Écris le nombre qui convient sur chaque pointillé.

Voici une droite :

En voici une autre :

Compétences visées

Pour résoudre *Droite numérique*, il faut être capable de déterminer la valeur de l'espace entre deux graduations et, à partir des points d'ancrage, d'assigner une valeur à n'importe quelle marque.

Grille de correction

Item	Réponse
1	3200 ; 4200
2	4850 ; 5600

Taux de réussite

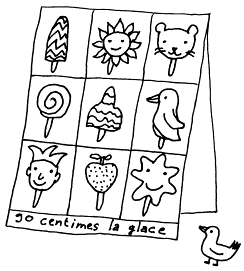
	Item	
	1	2
Taux observé [%]	56	34
Taux attendu [%]	75	40

La glace

La glace

Jean a 1 franc et 70 centimes. Il s'achète une glace à 90 centimes.

Combien lui reste-t-il ?



Compétences visées

La glace fait référence aux propriétés du groupe des décimaux $(\mathbb{D}, +)$. Pour résoudre ce problème, il faut savoir tenir compte des unités (franc, centime) et être capable de soustraire deux nombres décimaux.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Deux réponses sont admises : 0.8 franc ou 80 centimes.

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	87
Taux attendu [%]	85

Les bonbons

Les bonbons

Jacques a dans ses poches 13 bonbons. Certains sont des sugus, d'autres sont des malabars, d'autres encore sont des caramels.
Il a 3 malabars. Des sugus, il en a moins. Des caramels, il en a plus.
Combien Jacques a-t-il de sugus et de caramels dans ses poches ? Il y a deux réponses possibles, donne-les !

Réponse 1 : ________ sugus et ________ caramels.

Réponse 2 : ________ sugus et ________ caramels.

Compétences visées

Les bonbons est un problème qui fait référence aux propriétés du monoïde $(\mathbb{N}, +)$. Pour résoudre ce problème, il faut être capable de comprendre un énoncé, de mettre en application une stratégie de résolution et de décomposer un nombre en trois termes de plusieurs façons.

Grille de correction

Item	Réponse
1	L'une des réponses : 1 sugus et 9 caramels L'autre réponse : 2 sugus et 8 caramels

Taux de réussite

	Item 1
Taux observé [%]	52
Taux attendu [%]	60

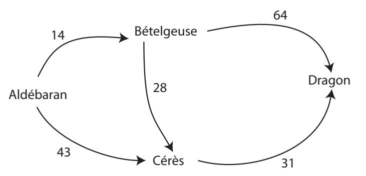
Le voyageur de commerce intergalactique

Le voyageur de commerce intergalactique

Gaston est un voyageur de commerce intergalactique. Il habite Aldébaran et doit se rendre sur la planète du Dragon. Voici la durée des vols spatiaux à sa disposition :

Départ	Arrivée	Durée en heures
Aldébaran	Bételgeuse	14
Aldébaran	Cérès	43
Bételgeuse	Cérès	28
Bételgeuse	Dragon	64
Cérès	Dragon	31

Quel itinéraire doit-il emprunter pour se rendre au plus vite sur la planète du Dragon ?



Réponse : la durée du trajet le plus court est de ______ heures.

Compétences visées

Le voyageur de commerce intergalactique fait référence à la notion de graphe pondéré. Pour résoudre ce problème, il faut être capable de lire un horaire, de combiner des informations, d'explorer un ensemble de propriétés, de faire des additions et de comparer des nombres entiers.

Grille de correction

Item	Réponse
1	L'itinéraire emprunté par Gaston est décrit correctement et la durée du trajet le plus court est déterminée (73 heures).

Taux de réussite

	Item 1
Taux observé [%]	33
Taux attendu [%]	50

Les rangements de Kata

Les rangements de Kata

Pour ranger ses 19 chapeaux, Kata dispose de 2 boîtes blanches et de 3 boîtes noires.
Elle décide qu'il doit y avoir le même nombre de chapeaux dans chacune des 2 boîtes blanches et le même nombre de chapeaux dans chacune des 3 boîtes noires.
Comment Kata doit-elle répartir ses chapeaux dans les boîtes ? Trouve toutes les solutions et montre ta démarche.

Compétences visées

La solution de ce problème s'obtient en résolvant l'équation indéterminée du premier degré $2x + 3y = 19$ dans $\mathbb{N}$. Pour résoudre *Les rangements de Kata* il faut être capable de comprendre un énoncé, émettre des hypothèses et être en mesure de les tester.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Au moins l'une des trois solutions suivantes est trouvée : • 2 chapeaux dans chaque boîte blanche et 5 chapeaux dans chaque boîte noire ; • 5 chapeaux dans chaque boîte blanche et 3 chapeaux dans chaque boîte noire ; • 8 chapeaux dans chaque boîte blanche et 1 chapeau dans chaque boîte noire.

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	52
Taux attendu [%]	60

La bonne combine

> **La bonne combine**
>
> Pour obtenir 644, additionne et soustrais des nombres qui ne s'écrivent qu'avec des 7 et des 0.
>
> Additionne et soustrais des nombres qui ne s'écrivent qu'avec des 3 pour obtenir 636.

Compétences visées

Pour résoudre *La bonne combine*, il faut connaître et maîtriser les notions de chiffres et de nombres, savoir additionner et soustraire de manière réitérée.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Les contraintes sont satisfaites et le résultat des opérations donne 644.
2	Les contraintes sont satisfaites et le résultat des opérations donne 636.

Taux de réussite

	Item	
	1	2
Taux observé [%]	45	41
Taux attendu [%]	50	50

Livraison de menhirs

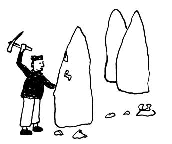
Livraison de menhirs

a) Au lever du soleil, Karwa livre des menhirs.
A midi, il livre encore 102 menhirs.
En tout il a livré 500 menhirs.
Combien de menhirs a-t-il livrés au lever du soleil ?
Note comment tu fais pour trouver.

Réponse : Karwa a livré ____________ menhirs au lever du soleil.

b) Warka travaille très vite. Cette semaine Warka ne fit que de la taille et sa réserve de menhirs a passé de 849 à 1021.
Combien de menhirs Warka a-t-il taillés cette semaine ?
Note comment tu fais pour trouver.

Réponse : cette semaine Warka a taillé ____________ nouveaux menhirs.



Compétences visées

Pour résoudre *Livraison de menhirs*, il faut être capable de résoudre des problèmes additifs et soustractifs.

Grille de correction

Item	Réponse
1	La démarche est explicitée et la réponse est juste (398).
2	La démarche est également explicitée et la réponse est juste (172).

Taux de réussite

	Item 1	Item 2
Taux observé [%]	71	58
Taux attendu [%]	80	70

Le banquet des sorciers

Le banquet des sorciers

a) Ymi dispose les friandises sur la table.

Il y a 868 araignées en massepain, 354 biscuits au miel, 106 chocolats poivrés et des pains d'épice.

Il se rappelle qu'il a confectionné 2064 friandises.

Mais combien y a-t-il donc de pains d'épice ?

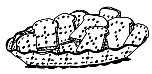
Note comment tu fais pour trouver.

Réponse : Ymi a confectionné ____________ pains d'épice.

b) Ymi salive en regardant les 400 canapés aux œufs de crapauds.

Quelques secondes plus tard le plat ne comporte plus que 378 canapés.

Que s'est-il passé ? Note ton calcul.



Réponse : ____________

Compétences visées

Pour résoudre *Le banquet des sorciers*, il faut savoir reconnaître un problème additif ou soustractif, savoir le traduire en écritures mathématiques et être capable d'effectuer correctement les opérations arithmétiques.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Justification correcte et bonne réponse (736).
2	Justification correcte et bonne réponse.

Taux de réussite

	Item	
	1	2
Taux observé [%]	51	76
Taux attendu [%]	70	75

Menhir, menhir, ...

Menhir, menhir ...

Wirki et son frère Korwo ont taillé, avec leur père Barba, 60 menhirs en tout pour le village voisin. Les deux frères en ont taillé 48 tandis que Wirki et son père en ont taillé 33.

Combien de menhirs chacun a-t-il taillés ? Montre comment tu fais pour trouver.

Réponse : Barba a taillé ____________ menhirs ;

Wirki a taillé ____________ menhirs ;

Korwo a taillé ____________ menhirs.

Compétences visées

Menhir, menhir, ... forme un système de 3 équations du premier degré à 3 inconnues. Sans connaissance en algèbre, ce problème est très difficile. Pour le résoudre, il faut faire preuve d'invention et trouver un moyen adéquat de représenter ses divers éléments. Il faut vraiment bien comprendre l'énoncé pour découvrir que deux inconnues (le nombre de menhirs taillés par Barba et le nombre de menhirs taillés par Korwo) s'obtiennent simplement en calculant la différence entre deux nombres fournis dans l'énoncé.

Grille de correction

Item	Réponse
1	12 ; 21 ; 27

Taux de réussite

	Item 1
Taux observé [%]	5
Taux attendu [%]	15

Additions lacunaires

Additions lacunaires

Complète ces additions pour qu'elles soient justes.

$$\begin{array}{rcccc} & 4 & . & 3 & . \\ + & . & 2 & . & 8 \\ \hline & 9 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & . & 9 & . & 5 \\ + & & . & 6 & . \\ \hline & 3 & 2 & 6 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & & . & 3 & 2 \\ + & & 9 & . & . \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}$$

Compétences visées

Pour résoudre *Additions lacunaires*, il faut être capable de mener une réflexion sur le fonctionnement de l'algorithme de l'addition en colonnes, puis de construire et d'appliquer quelques fonctions inverses nécessaires à la reconstruction des calculs partiellement effacés.

Grille de correction

Item	Réponse
1	$\begin{array}{rcccc} & 4 & 8 & 3 & 7 \\ + & 4 & 2 & 8 & 8 \\ \hline & 9 & 1 & 2 & 5 \end{array}$

Item	Réponse
2	$\begin{array}{rcccc} & 2 & 9 & 0 & 5 \\ + & & 3 & 6 & 4 \\ \hline & 3 & 2 & 6 & 9 \end{array}$

Item	Réponse
3	$\begin{array}{rcccc} & & 3 & 3 & 2 \\ + & & 9 & 7 & 9 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}$

Taux de réussite

	Item		
	1	2	3
Taux observé [%]	66	68	75
Taux attendu [%]	70	75	75

La fête des sorciers

La fête des sorciers

a) Les invités se pressent pour entrer au château. 78 sorciers arrivent du nord, 234 du sud, 345 de l'est et 1088 de l'ouest.

Combien de sorciers arrivent des quatre points cardinaux ?

Note ta démarche.

Réponse : ____________ sorciers arrivent au château.

b) Les sorciers doivent être 2000 en tout. Combien de sorciers doivent encore arriver ?

Note tous tes calculs.

Réponse : ____________ sorciers doivent encore arriver.

c) La fête bat son plein.

Certains sorciers sont au bar, d'autres dansent.

81 sorciers dansent en formant une ronde, ils sont 73 de moins qu'au bar.

Tous les sorciers qui sont au bar dégustent un jus de citrouille glacé. Combien sont-ils ?

Note ta démarche.

Réponse : il y a ____________ sorciers au bar.

Compétences visées

Pour résoudre *La fête des sorciers*, il faut être capable de résoudre des problèmes additifs et soustractifs.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Les calculs sont explicités et la bonne réponse 1745 est fournie.
2	Les opérations sont décrites et la différence entre 2000 et la réponse donnée au point *a)* (juste ou fausse) est calculée correctement.
3	La démarche est notée et la bonne réponse 154 est fournie.

Taux de réussite

	Item		
	1	2	3
Taux observé [%]	74	69	49
Taux attendu [%]	85	75	60

Calculs neptuniens

Calculs neptuniens

316 + 887 =

651 − 152 =

102 − 43 =

1002 − 54 =

303 × 14 =

231 × 35 =

Compétences visées

Pour résoudre *Calculs neptuniens*, il faut savoir effectuer l'addition, la soustraction ou la multiplication de deux nombres entiers naturels.

Grille de correction

Item	Réponse	Item	Réponse
1	1203	4	948
2	499	5	4242
3	59	6	8085

Taux de réussite

	Item					
	1	2	3	4	5	6
Taux observé [%]	89	79	80	74	71	69
Taux attendu [%]	90	80	80	75	60	70

Les cahiers de Jean

Les cahiers de Jean

Jean entre dans une papeterie pour acheter un cahier.
On lui en présente des minces, des épais et des moyens.
Il a encore le choix entre des couvertures jaunes, rouges, vertes, bleues, grises et brunes.

a) Combien de cahiers différents Jean pourrait-il acheter ?

Réponse : ____________

b) Combien de cahiers différents peut-il acheter, si chaque cahier existe en 3 grandeurs ?

Réponse : ____________

c) Dans un autre magasin, on lui présente 40 cahiers différents. Peux-tu imaginer combien il y a

de couleurs ? ____________

de grandeurs ? ____________

d'épaisseurs ? ____________

Compétences visées

Les cahiers de Jean est un problème multiplicatif. Pour le résoudre, il faut être capable de déterminer la valeur du cardinal de l'*ensemble produit* d'un ensemble par un autre[1]. Il faut aussi être capable de décomposer un nombre en produits de facteurs.

Grille de correction

Item	Réponse
1	18
2	54

Item	Réponse
3	Soit n_1 le nombre de couleurs, n_2 le nombre de grandeurs et n_3 le nombre d'épaisseurs : $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 40$.

Taux de réussite

	Item		
	1	2	3
Taux observé [%]	61	23	19
Taux attendu [%]	60	40	25

[1] Soient E et F deux ensembles. On appelle *ensemble produit* de E par F (noté $E \times F$), l'ensemble des couples $(a,\ b)$, avec $a \in E$ et $b \in F$. Le cardinal de $E \times F$ est égal au produit des cardinaux de E et F respectivement : $|E \times F| = |E| \cdot |F|$.

Les devinettes de Kata

Les devinettes de Kata

Kata joue avec ses élèves sorcières.
À partir de chaque nombre proposé par ses élèves, Kata effectue toujours les mêmes opérations arithmétiques.
Voici quelques exemples :

Zoé dit :	10	Kata répond :	31
Fifi dit :	4	Kata répond :	13
Zaza dit :	3	Kata répond :	10

Complète :

a)	Lulu dit :	5	Kata répond :	________
b)	Irma dit :	100	Kata répond :	________
c)	Zoé dit :	1	Kata répond :	________
d)	Fifi dit :	0	Kata répond :	________
e)	Irma dit : ________		Kata répond :	100

Compétences visées

Pour résoudre *Les devinettes de Kata*, il faut être capable d'induire à partir de quelques exemples une fonction linéaire de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, d'appliquer cette fonction et de trouver l'image réciproque d'un singleton.

Grille de correction

Item	Réponse
1	16
2	301
3	4

Item	Réponse
4	1
5	33

Taux de réussite

	Item				
	1	2	3	4	5
Taux observé [%]	42	39	42	39	31
Taux attendu [%]	50	50	50	45	35

Chandelles et chandeliers

Chandelles et chandeliers

Ymi et Kata décorent la grande salle du château pour le banquet des sorciers. Ils ont chacun 100 bougies. Kata doit garnir le plus possible de chandeliers à 8 branches et Ymi doit garnir le plus possible de chandeliers à 11 branches.

Combien de chandeliers complets chacun pourra-t-il garnir ?

Montre comment tu fais pour trouver.

Réponse : Ymi garnit ____________ chandeliers à 11 branches.

Kata garnit ____________ chandeliers à 8 branches.

Compétences visées

Chandelles et chandeliers fait référence à la notion de division avec reste. Pour résoudre ce problème, il faut être capable de partager des collections et de constituer des collections équipotentes.

Grille de correction

Item	Réponse
1	9
2	12

Taux de réussite

	Item	
	1	2
Taux observé [%]	41	38
Taux attendu [%]	25	25

Les calculs de Kata

Les calculs de Kata

a) Kata doit distribuer des fioles de potion à ses copines.
Combien de fioles faut-il pour 10 copines qui recevront 20 fioles chacune ?
Écris ton calcul.

Réponse : il faut ____________ fioles en tout.

b) Un balai magique est fait de 20 brins de paille.
Combien de balais magiques fabrique Kata avec 200 brins ?
Écris ton calcul.

Réponse : Kata fabrique ____________ balais magiques.

c) Kata dispose de 200 graines pour nourrir ses crapauds.
Elle les distribue toutes. Les 10 crapauds en reçoivent chacun la même quantité.
Combien de graines reçoit chaque crapaud ?
Écris ton calcul.

Réponse : chaque crapaud reçoit ____________ graines.

d) Pour l'école des sorcières Kata dispose de 20 grimoires.
Chacune des 200 élèves sorcières en veut un.
Combien de grimoires doit commander Kata ?
Écris ton calcul.

Réponse : Kata doit commander ____________ grimoires.

Compétences visées

Pour résoudre *Les calculs de Kata*, il faut être capable de comprendre un énoncé, être en mesure de reconnaître le type de problème et choisir l'opération arithmétique appropriée.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Calcul explicité ; réponse : 200
2	Calcul explicité ; réponse : 10
3	Calcul explicité ; réponse : 20
4	Calcul explicité ; réponse : 180

Taux de réussite

	Item			
	1	2	3	4
Taux observé [%]	82	48	65	50
Taux attendu [%]	85	65	65	60

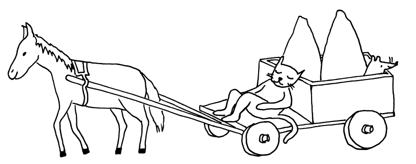
Convoi de menhirs

Convoi de menhirs

En Gaule, on ne mesurait pas les longueurs en mètres mais en pieds. Un convoi de menhirs constitué de 6 chariots roule sur la Via Gallia. Les chariots ont 8 pieds de long et la distance entre chaque chariot est de 50 pieds.

Quelle est la longueur totale du convoi ? Montre comment tu fais pour trouver.

Réponse : la longueur totale du convoi est de __________ pieds.



Compétences visées

Pour résoudre *Convoi de menhirs*, il faut être capable de comprendre l'énoncé du problème, d'en faire un schéma, de planifier les calculs et de les exécuter correctement.

Grille de correction

Item	Réponse
1	298

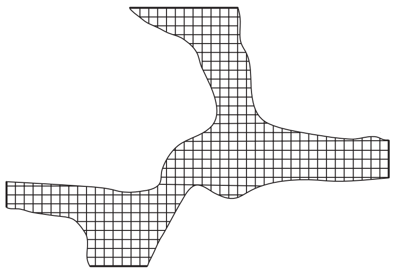
Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	13
Taux attendu [%]	25

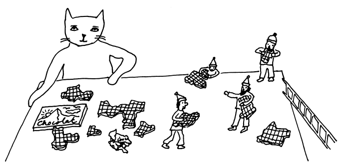
Le chocolat des lutins

Le chocolat des lutins

Chez les lutins les plaques de chocolat sont rectangulaires comme les nôtres. En revanche elles n'ont pas le même nombre de carrés.
En voici une déjà «légèrement» grignotée. Les bords de la plaque de chocolat sont marqués en gras.



Combien y a-t-il de carrés dans une plaque entière ?



Compétences visées

Pour résoudre *Le chocolat des lutins*, il faut savoir calculer l'aire d'un rectangle en multipliant sa longueur par sa largeur. Mais au préalable il faut être capable de déterminer les dimensions du rectangle à l'aide du quadrillage.

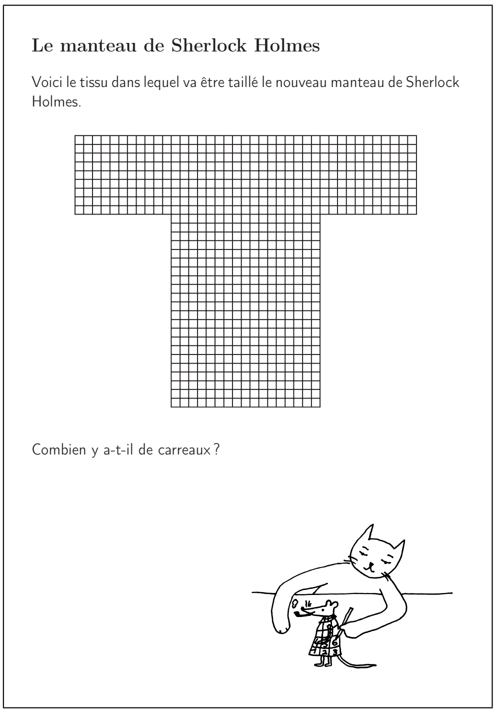
Grille de correction

Item	Réponse
1	La plaque entière contient 1247 carrés.

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	30
Taux attendu [%]	25

Le manteau de Sherlock Holmes



Le manteau de Sherlock Holmes

Voici le tissu dans lequel va être taillé le nouveau manteau de Sherlock Holmes.

Combien y a-t-il de carreaux ?

Compétences visées

Pour résoudre *Le manteau de Sherlock Homes*, il faut être capable de décomposer une surface quadrillée en plusieurs parties rectangulaires S_j, être capable de déterminer l'aire $\mathcal{A}(S_j)$ de chaque rectangle (en calculant le produit de sa longueur par la largeur $L_j \cdot l_j$) et de faire la somme de ces aires. Comme

$$\forall j, k(j \neq k \rightarrow S_j \cap S_k = \emptyset) \text{ et } S = \bigcup_{j=1}^{n} S_j, \text{ alors } \mathcal{A}(S) = \sum_{j=1}^{n}(L_j \cdot l_j)$$

.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Il y a 725 carreaux.

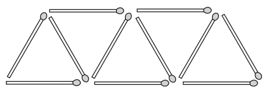
Taux de réussite

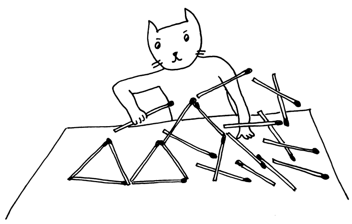
	Item
	1
Taux observé [%]	37
Taux attendu [%]	50

111 triangles

111 triangles

Pour former cette suite de 5 triangles, il a fallu 11 allumettes. Combien faut-il d'allumettes pour former une suite de 111 triangles ? Justifie ta réponse.





Compétences visées

Pour résoudre *111 triangles*, il faut être capable d'induire à partir d'un exemple l'application $A\ : T \mapsto A(T) = 2T + 1$ qui lie dans le motif proposé le nombre de triangles T au nombre d'allumettes A, puis d'appliquer cette fonction à un cas particulier $T = 111$.

Grille de correction

Item	Réponse
1	223

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	4
Taux attendu [%]	15

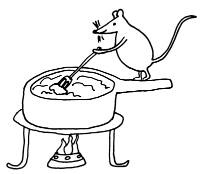
La fondue

La fondue

Pour faire de la fondue, il faut 250 grammes de fromage et 1 décilitre de vin blanc par personne. Pour un enfant, on compte la moitié. Pour 5 adultes et 4 enfants quelles quantités de fromage et de vin faut-il ? Justifie ta réponse.

Réponse : il faut ______________ de fromage ;

il faut ______________ de vin.



Compétences visées

Ce problème fait appel à la notion de proportionnalité. Pour résoudre correctement *La fondue*, il faut comprendre l'énoncé, le modéliser mathématiquement et savoir exécuter les opérations qui s'imposent – ces dernières font intervenir des fractions : des moitiés.

Grille de correction

Item	Réponse
1	1750 g ou 1.750 kg
2	7 dl ou 0.7 l

Taux de réussite

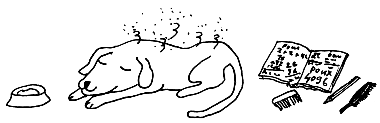
	Item	
	1	2
Taux observé [%]	26	39
Taux attendu [%]	40	40

Les puces

Les puces

Le pharmacien adore son chien. Il aime aussi les puces de son chien. Régulièrement il les compte.
Aujourd'hui, il en a dénombré 4096. Il y a dix jours, il y en avait la moitié, soit 2048. Il y a 20 jours, il y en avait 1024. Le nombre de puces double systématiquement en 10 jours.
Il y a 30 jours, combien y avait-il donc de puces sur le chien du pharmacien ?

Depuis combien de temps les deux premières puces vivent-elles sur le dos du chien du pharmacien ?



Compétences visées

Pour résoudre *Les puces*, il faut être capable de comprendre un énoncé, d'employer les informations figurant dans un graphique, d'effectuer des divisions par deux de manière réitérée, et de tenir une comptabilité précise des cycles de calculs réalisés.

Grille de correction

Item	Réponse
1	512
2	Les deux premières puces vivent sur le dos du chien du pharmacien depuis 110 jours.

Taux de réussite

	Item	
	1	2
Taux observé [%]	57	19
Taux attendu [%]	55	25

Repas de Fête

Repas de Fête

La maman de Madeleine n'a pas beaucoup d'imagination. Pour les grandes occasions, elle compose toujours le menu en choisissant une entrée, un plat principal et un dessert.

Elle choisit :

Pour l'entrée	Pour le plat principal	Pour le dessert
Terrine ou Crevettes ou Saumon	Gigot d'agneau ou Filets mignons	Glace vanille-fraise ou Salade de fruits ou Crème caramel

Combien de menus différents peut-elle ainsi composer ?

Réponse : la maman de Madeleine peut composer ________________ menus différents.

Compétences visées

Repas de Fête est un problème multiplicatif, de même structure que *Les cahiers de Jean*. Pour le résoudre il faut être capable de déterminer la valeur du cardinal de l'ensemble produit de trois ensembles. Le moyen le plus sûr d'y parvenir est de construire un arbre et d'en dénombrer les feuilles ou de dresser une liste et d'en compter les éléments.

Grille de correction

Item	Réponse
1	18

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	49
Taux attendu [%]	60

Animaux fabuleux

Animaux fabuleux

Pour fabriquer un animal fabuleux, il faut choisir une tête, un corps et un arrière-train. Les trois parties d'un animal fabuleux proviennent toujours d'animaux d'espèces différentes. Tu disposes de lions, de perroquets, de crocodiles et de zèbres.
Combien d'animaux différents peux-tu créer ?

Réponse : il est possible de créer ______________ animaux fabuleux différents.

Compétences visées

Animaux fabuleux consiste à compter les différents arrangements 3 à 3 d'un ensemble de cardinal 4. Ce nombre d'arrangements A_3^4 est égal à $\frac{4!}{(4-3)!} = 24$. Pour résoudre ce problème, il faut être capable d'énumérer tous les arrangements, le moyen le plus sûr d'y arriver est d'utiliser un arbre ou une liste.

Grille de correction

Item	Réponse
1	24

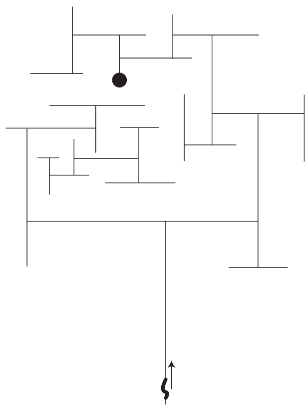
Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	5
Taux attendu [%]	15

Le ver à fruit

Le ver à fruit

Sur l'arbre, il n'y a plus qu'un fruit. Explique au ver comment faire pour s'y rendre ! Le ver ne recule jamais. Sur le tronc ou sur une branche il avance tout droit. A une bifurcation il s'arrête. Pour le faire repartir tu peux lui parler. Malheureusement cet animal primitif ne comprend que deux mots *droite* et *gauche*. Écris tes ordres et conduis-le jusqu'au fruit.



Compétences visées

Pour résoudre *Le ver à fruit*, il faut être capable de comprendre un énoncé, d'explorer un arbre afin de trouver le bon itinéraire puis décrire et coder cet itinéraire en utilisant un référentiel mobile.

Grille de correction

Item	Réponse
1	droite – gauche – gauche – droite – gauche – gauche – droite – gauche

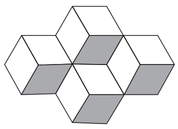
Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	29
Taux attendu [%]	40

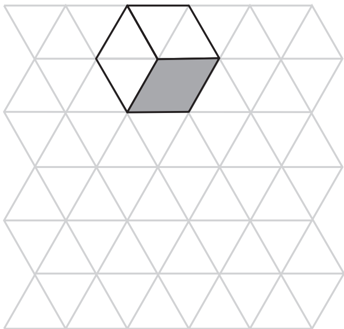
Les cubes

Les cubes

Voici un dessin.



On a commencé à le recopier. Continue, en t'aidant de la grille.



Compétences visées

Les cubes fait référence à une homothétie. Pour réussir ce problème, il faut être capable de reproduire une figure en l'agrandissant.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Le motif est reproduit correctement, grisés compris.

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	64
Taux attendu [%]	60

Lettre à Élise

Lettre à Élise

Clotilde la correspondante d'Élise vient d'épingler de nouveaux posters contre le mur de sa chambre. Voici la description qu'elle en fait à Élise :

> *En haut à gauche, j'ai placé le portrait carré de Suzette. À sa droite, j'ai épinglé l'image de Petit Spirou. Cette image a les mêmes dimensions que la première. À la droite de Petit Spirou, j'ai scotché Malika. Son image, carrée aussi, est plus petite. Son côté vaut la moitié du côté de la photo de Suzette. Son bord supérieur est aligné avec le bord supérieur de la photo de Petit Spirou. En dessous de Malika, j'ai placé Shrek et Némo, l'un à côté de l'autre. Shrek est à gauche de Némo. Leurs photos sont carrées et la longueur du côté de chacune des photos vaut la moitié du côté de la photo de Malika.*

Fais un schéma de la manière dont Clotilde a disposé ses posters.

Compétences visées

Pour résoudre *Lettre à Élise*, il faut être capable de placer sur un plan des objets dont la position, la forme et les dimensions sont décrites à l'aide d'un vocabulaire idoine.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Les 5 posters correctement étiquetés ont la bonne forme, les bonnes dimensions et sont bien positionnés.

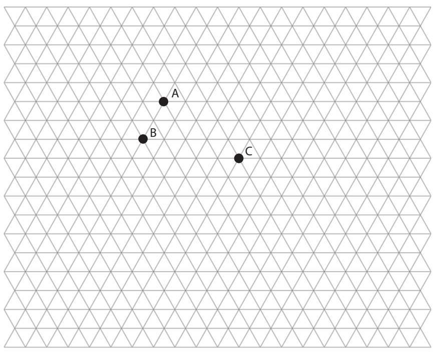
Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	6
Taux attendu [%]	10

Tricot

Tricot

Dans ce réseau à mailles triangulaires on se déplace suivant les lignes.
Les points A et B sont à la même distance du point C. En effet la longueur du chemin le plus court entre A et C est égale à la longueur du chemin le plus court entre B et C.
Trouve tous les autres points du réseau qui se trouvent aussi à cette même distance de C.



Compétences visées

Ce problème est une initiation à la mesure et à la notion de chemin minimal dans un réseau hexagonal. Pour résoudre *Tricot*, il faut être capable de comprendre un énoncé, de lire une figure, de mesurer la longueur d'un chemin dans un réseau hexagonal à l'aide de la longueur de la maille élémentaire et de construire un lieu géométrique en l'occurrence l'analogue d'un cercle de centre C et de rayon $\|AC\| = \|BC\|$.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Les 28 points du lieu géométrique qui manquent sont représentés et aucun autre.

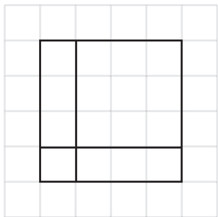
Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	6
Taux attendu [%]	25

Allô ! Allô !

Allô ! Allô !

Tu téléphones à ton camarade. Décris-lui précisément la figure suivante pour qu'il puisse la reproduire.



Compétences visées

Pour résoudre *Allô ! Allô !* il faut être capable de décrire une figure relativement simple explicitement.

Grille de correction

Item	Réponse
1	La description permet de reproduire correctement la figure.

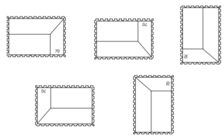
Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	10
Taux attendu [%]	25

Timbres poste

Timbres poste

Voici des timbres. Biffe celui qui est différent des autres.



Compétences visées

Pour résoudre ce problème, il faut être capable d'imaginer la position des éléments d'une figure après lui avoir fait subir une rotation.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Le timbre intrus est celui qui se trouve sur la rangée du haut, au milieu.

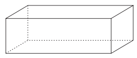
Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	57
Taux attendu [%]	65

Solide

Solide

Regarde cet objet :



a) Combien a-t-il de faces en tout ? ________

b) Combien a-t-il d'arêtes en tout ? ________

c) Combien a-t-il de sommets en tout ? ________

Compétences visées

La résolution de ce problème requiert la capacité de reconnaître la projection d'un parallélépipède rectangle et d'en dénombrer les faces, les arêtes et les sommets.

Grille de correction

Item	Réponse
1	6
2	12

Item	Réponse
3	8

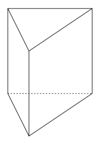
Taux de réussite

	Item		
	1	2	3
Taux observé [%]	66	54	69
Taux attendu [%]	75	60	75

Prisme

Prisme

Regarde cet objet :



a) Combien a-t-il de faces en tout ? ________

b) Combien a-t-il d'arêtes en tout ? ________

c) Combien a-t-il de sommets en tout ? ________

Compétences visées

La résolution de *Prisme* requiert la capacité à s'imaginer un objet tridimensionnel à partir de sa projection plane et d'en dénombrer les faces (bases et faces latérales), les arêtes et les sommets.

Grille de correction

Item	Réponse
1	5
2	9

Item	Réponse
3	6

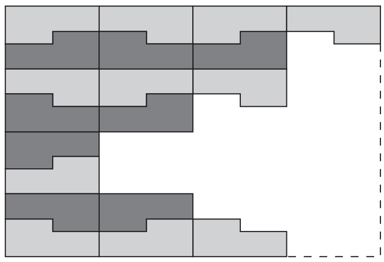
Taux de réussite

	Item		
	1	2	3
Taux observé [%]	67	48	65
Taux attendu [%]	75	60	70

Les remparts

Les remparts

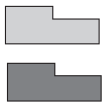
Pour terminer la construction des remparts combien dois-tu commander de pierres claires et de pierres foncées ?



Il faut commander :

__________ pierres claires

__________ pierres foncées



Compétences visées

Les remparts est un problème de pavage. Pour résoudre ce problème il faut être capable de comprendre la structure de l'ornement en repérant les axes et les centres de symétrie, et de poursuivre la construction du pavage en rajoutant le nombre de pierres adéquat.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Il faut commander 5 pierres claires et 8 pierres foncées.

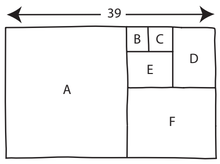
Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	67
Taux attendu [%]	75

Croquis

Croquis

Ce croquis n'est pas précis. Si tous les domaines dessinés (A, B, C, D, E et F) étaient carrés, quelle serait la longueur du côté du carré le plus petit ?



Réponse : la longueur du côté du carré le plus petit vaut ____________

Compétences visées

Pour résoudre *Croquis*, il faut être capable de construire une figure composée uniquement de carrés dont on ne connaît que la topologie, d'ajuster la figure par homothétie de telle sorte que sa longueur satisfasse la contrainte de l'énoncé et de déterminer, dans la figure transformée, la longueur du côté du carré le plus petit.

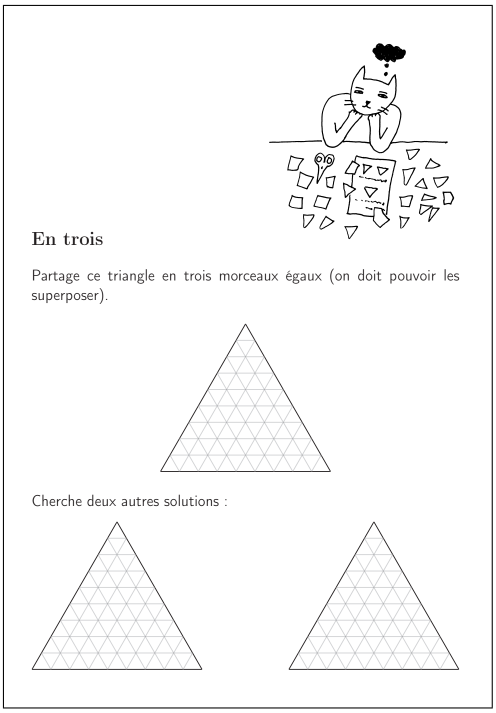
Grille de correction

Item	Réponse
1	3

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	1
Taux attendu [%]	5

En trois



En trois

Partage ce triangle en trois morceaux égaux (on doit pouvoir les superposer).

Cherche deux autres solutions :

Compétences visées

Pour résoudre *En trois*, il faut être capable de repérer dans la figure proposée l'axe de symétrie d'ordre 3, d'ajouter une ligne polygonale joignant le centre de symétrie O à l'un des côtés du triangle et de construire les images de cette ligne par une rotation de centre O et d'angle 120° et 240° respectivement.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Le découpage de l'un des trois triangles au moins est réussi.

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	12
Taux attendu [%]	20

Les papillons de Tchernobyl

Les papillons de Tchernobyl

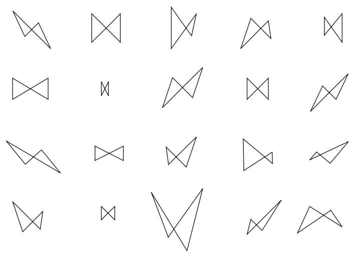
Albert est collectionneur de papillons. Il aimerait épingler tous les papillons dont les deux ailes sont égales (on doit pouvoir les superposer).
Bertrand souhaite, quant à lui, n'épingler que les papillons qui ont des ailes qui se recouvrent exactement lorsqu'ils les plient l'une sur l'autre.

Combien y a-t-il de papillons qui ne seront épinglés que par Albert ?

Réponse : ________________

Combien y a-t-il de papillons qui ne seront épinglés que par Bertrand ?

Réponse : ________________



Julien dit qu'on peut répondre à la deuxième question sans examiner les papillons. A-t-il raison ? Si oui, pourquoi ? Si non, pourquoi ?

....

....

....

Compétences visées

Pour résoudre *Les papillons de Tchernobyl*, il faut être capable de comprendre un énoncé complexe, reconnaître deux figures égales, repérer les axes de symétrie d'une figure, classer des objets selon leurs propriétés et justifier logiquement une réponse.

Grille de correction

Item	Réponse
1	4 ; 0

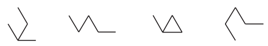
Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	1
Taux attendu [%]	10

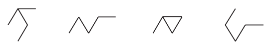
Platland

Platland

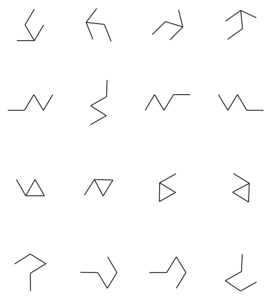
Platland est peuplé de figures planes. Certaines de ces figures sont droitières :



d'autres sont gauchères :



Chaque figure droitière a comme image miroir une figure gauchère et vice-versa.
Entoure les figures ci-dessous qui sont gauchères.



Compétences visées

L'énoncé de ce problème est très complexe, sa compréhension est l'une de ses difficultés. Une fois l'énoncé compris, il faut encore, pour résoudre *Platland*, être capable d'effectuer mentalement la rotation d'une figure et de déterminer, par comparaison à deux modèles, sa forme chirale.

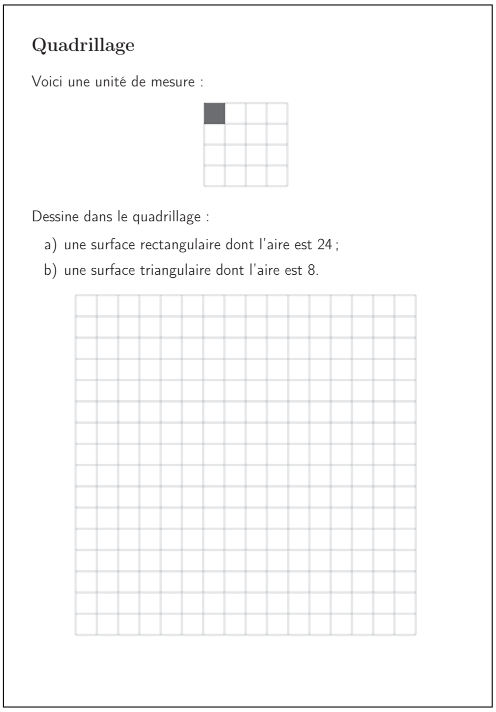
Grille de correction

Item	Réponse
1	À la 1^{re} ligne, la 1^{re}, la 2^{e} et la 4^{e} figures sont gauchères.
2	À la 2^{e} ligne, la 1^{re} et la 3^{e} figures sont gauchères.
3	À la 3^{e} ligne, la 2^{e} et la 4^{e} figures sont gauchères.
4	À la 4^{e} ligne, la 3^{e} figure est gauchère.

Taux de réussite

	Item			
	1	2	3	4
Taux observé [%]	9	16	20	15
Taux attendu [%]	15	15	25	15

Quadrillage



Quadrillage

Voici une unité de mesure :

Dessine dans le quadrillage :

a) une surface rectangulaire dont l'aire est 24 ;

b) une surface triangulaire dont l'aire est 8.

Compétences visées

Pour résoudre la première partie de *Quadrillage*, il faut savoir que l'aire d'un rectangle est égale au produit de sa longueur par sa largeur. Pour résoudre la seconde partie, il est possible de procéder par tâtonnement mais le plus simple est de recourir au théorème selon lequel l'aire d'un triangle rectangle est égale au demi-produit des longueurs de ses cathètes.

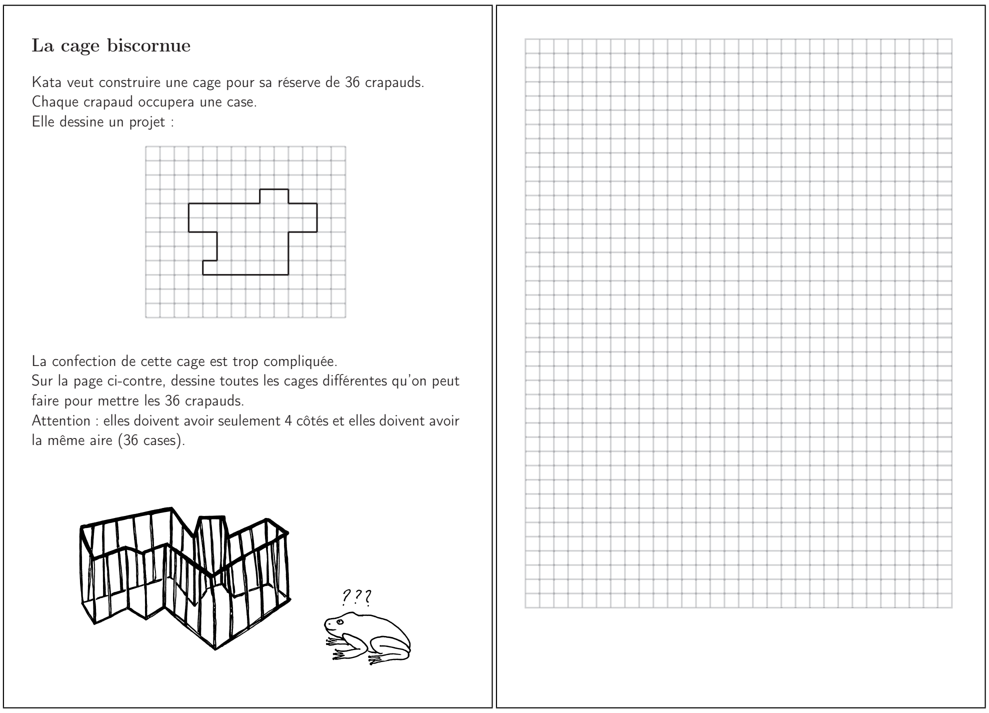
Grille de correction

Item	Réponse
1	Le rectangle a une aire de 24.
2	Le triangle a une aire de 8.

Taux de réussite

	Item	
	1	2
Taux observé [%]	67	14
Taux attendu [%]	75	30

La cage biscornue



La cage biscornue

Kata veut construire une cage pour sa réserve de 36 crapauds.
Chaque crapaud occupera une case.
Elle dessine un projet :

La confection de cette cage est trop compliquée.
Sur la page ci-contre, dessine toutes les cages différentes qu'on peut faire pour mettre les 36 crapauds.
Attention : elles doivent avoir seulement 4 côtés et elles doivent avoir la même aire (36 cases).

???

Compétences visées

Pour résoudre *La cage biscornue*, il faut être capable d'énumérer toutes les manières différentes de décomposer 36 en un produit de deux nombres entiers. La difficulté principale de ce problème est l'exhaustivité.

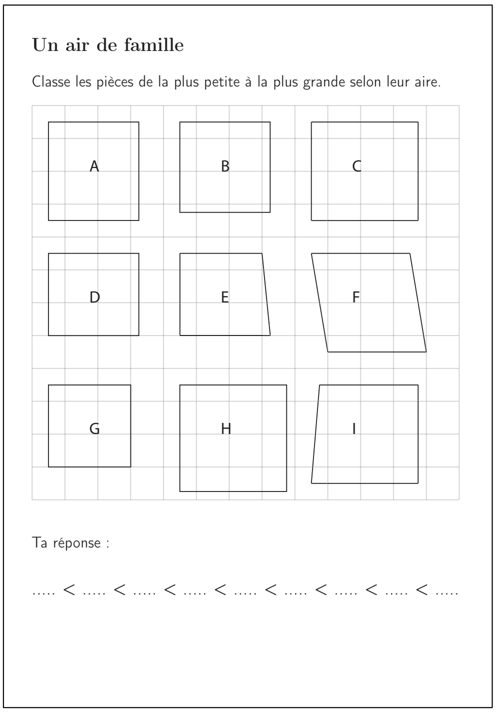
Grille de correction

Item	Réponse
1	Cinq cages rectangulaires sont représentées et aucune autre. Elles ont les dimensions 1×36, 2×18, 3×12, 4×9 et 6×6.

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	14
Taux attendu [%]	25

Un air de famille



Compétences visées

Pour résoudre *Un air de famille*, il faut être capable de comparer et ordonner des surfaces en s'aidant d'une règle ou du quadrillage ou en analysant sur le modèle du tangram la manière dont se composent les figures.

Grille de correction

Item	Réponse
1	$G < E < D < B < A < F < I < C < H$

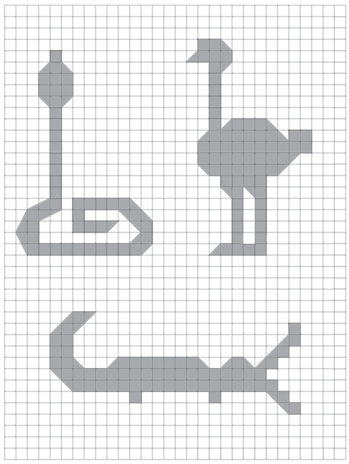
Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	12
Taux attendu [%]	10

Ombres chinoises

Ombres chinoises

Mesure en t'aidant du quadrillage l'aire de chaque ombre.



a) Quel animal a la plus grande ombre ? (Souligne la bonne réponse.)
Le cobra L'autruche Le crocodile

b) Quel animal a la plus petite ombre ? (Souligne la bonne réponse.)
Le cobra L'autruche Le crocodile

Compétences visées

Pour résoudre *Ombres chinoises*, il faut être capable, premièrement, de déterminer l'aire de différentes surfaces par comptage d'unités et, deuxièmement, de comparer et ordonner les aires mesurées.

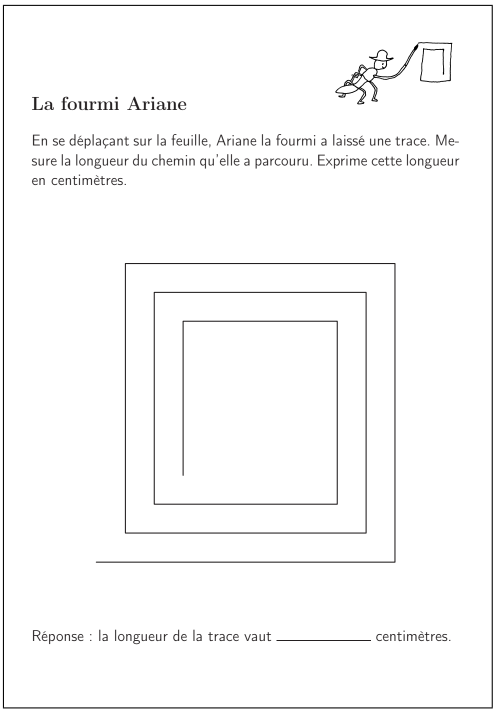
Grille de correction

Item	Réponse
1	L'animal qui a la plus grande ombre est l'autruche, celui qui a la plus petite est le cobra.

Taux de réussite

	Item 1
Taux observé [%]	51
Taux attendu [%]	60

La fourmi Ariane



La fourmi Ariane

En se déplaçant sur la feuille, Ariane la fourmi a laissé une trace. Mesure la longueur du chemin qu'elle a parcouru. Exprime cette longueur en centimètres.

Réponse : la longueur de la trace vaut ____________ centimètres.

Compétences visées

Pour résoudre *La fourmi Ariane*, il faut être capable de mesurer des longueurs à l'aide d'une règle graduée et d'en faire la somme.

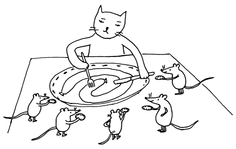
Grille de correction

Item	Réponse
1	Toute réponse comprise entre 86 et 88 cm.

Taux de réussite

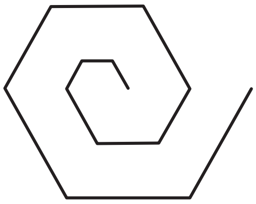
	Item
	1
Taux observé [%]	18
Taux attendu [%]	40

La saucisse à rôtir



La saucisse à rôtir

Pour partager la saucisse à rôtir ci-dessous en 5 morceaux de même longueur, où faut-il couper ?



Compétences visées

Pour résoudre *La saucisse à rôtir*, il faut être capable de prendre des mesures à l'aide d'une règle graduée, d'en faire la somme, d'effectuer une division puis de reporter des longueurs.

Grille de correction

Item	Réponse
1	Les 4 coups de couteau sont correctement placés.

Taux de réussite

	Item
	1
Taux observé [%]	30
Taux attendu [%]	40

Bibliographie

Antonietti, J.-P. (2003a). Designs de testage incomplets et modèle non-paramétrique de la réponse à l'item. *Cahiers de l'IMA*, *33*, 1-22.

Antonietti, J.-P. (Ed.). (2003b). *Evaluation des compétences en mathématiques en fin de 2e année primaire : résultats de la première phase de l'enquête Mathéval*. Neuchâtel : IRDP.

Antonietti, J.-P. (2004). Comment s'assurer de l'alignement d'un ensemble d'items. *Cahiers de l'IMA*, *35*, 1-21.

Antonietti, J.-P. & Guignard, N. (2005). Mathématiques. In C. Zahner (Ed.), *PISA 2003 : compétences pour l'avenir : deuxième rapport national* (pp. 17-33). Neuchâtel : OFS/CDIP.

Ardilly, P. (1994). *Les techniques de sondage*. Paris : Technip.

Becker, D. F. & Forsyth, R. A. (1994). Gender differences in mathematics problem solving and science : a longitudinal analysis. *International Journal of Educational Research*, *21*(4), 407-416.

Bert, C. (2004). L'effectif des classes en débat. *Sciences Humaines*, *155*, 12.

Bert, C. (2005). Les petites classes ça marche. *Sciences Humaines*, *161*, 11.

Bless, G., Bonvin, P. & Schüpbach, M. (2005). *Le redoublement scolaire : ses déterminants, son efficacité, ses conséquences*. Berne : Haupt.

Bressoux, P. (1994). Les recherches sur les effets-écoles et les effets-maîtres. *Revue Française de Pédagogie*, *108*, 91-137.

Bressoux, P., Coustère, P. & Leroy-Audouin, C. (1997). Les modèles multiniveaux dans l'analyse écologique : le cas de la recherche en éducation. *Revue Française de Sociologie*, *38*(1), 67-96.

Bressoux, P., Leroy-Audouin, C. & Coustère, P. (1998). Les extensions des modèles multiniveau et leur application pour l'évaluation en éducation. *Mesure et Evaluation en Education*, *21*(1), 39-59.

Brogden, H. E. (1977). The Rasch model, the law of comparative judgment and additive conjoint measurement. *Psychometrika*, *42*(4), 631-634.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bryk, A. & Raudenbush, S. W. (1992). *Hierarchical linear models : applications and data analysis methods*. Newbury Park : Sage.

Calame, J.-A., Berney, D., Gagnebin, A., Michlig, Y. & Monod, J.-D. (1997). *Plan d'études romand de mathématiques : degrés 1-6*. Neuchâtel : Commission romande des moyens d'enseignement.

Carpenter, T. P. & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. G. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction : a cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Chevallard, Y. (1991). Sur la déconcertation cognitive. *Interactions Didactiques*, *12*, 27-51.

CIIP. (2004). *PECARO : plan cadre romand*. Neuchâtel : Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin.

Cochran, W. G. (1977). *Sampling techniques* (3e éd.). New York : Wiley.

Cohen, J. (1989). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2e éd.). Hillsdale, NJ : Erlbaum.

Cohen, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin*, *112*(1), 155-159.

Conne, F. (1986). *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire*. Lausanne : Couturier-Noverraz.

Coombs, C. H., Dawes, R. M. & Tversky, A. (1975). *Psychologie mathématique : modèles et processus de décision* (Vol. 1). Paris : Presses Universitaires de France.

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, *16*(3), 297-334.

Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1999). *Mathématiques 4e année primaire*. Neuchâtel : Commission romande des moyens d'enseignement.

De Landsheere, V. (1988). *Faire réussir, faire échouer : la compétence minimale et son évaluation*. Paris : Presses Universitaires de France.

Delémont, M. & Tièche Christinat, C. (2003). *L'innovation mathématique dans le quotidien de la classe : le point de vue des enseignants de 3P-4P*. Neuchâtel : IRDP.

DIPAC. (2000). *Mathématiques : objectifs du premier cycle : document complémentaire au plan d'études romand*. Neuchâtel : Département de l'instruction publique et des affaires culturelles, Service de l'enseignement primaire.

DIPAC. (2001). *Mathématiques : objectifs du deuxième cycle : document complémentaire au plan d'études romand*. Neuchâtel : Département de l'instruction publique et des affaires culturelles, Service de l'enseignement primaire.

Dunn, O. J. (1961). Multiple comparisons among means. *Journal of the American Statistical Association*, *56*(293), 52-64.

Duru-Bellat, M. (2002). *Les inégalités sociales à l'école : genèse et mythes*. Paris : Presses Universitaires de France.

Escofier, B. & Pagès, J. (1998). *Analyses factorielles simples et multiples : objectifs, méthodes et interprétion* (3e éd.). Paris : Dunod.

Felouzis, G. (1997). *L'efficacité des enseignants.* Paris : Presses Universitaires de France.

Friedman, L. (1994). Meta-analytic contributions to the study of gender differences in mathematics : the relationship of mathematical and spatial skills. *Journal of Educational Research*, *21*(4), 361-371.

Ganzeboom, H. B. G., De Graaf, P. M., Treiman, D. J. & De Leew, J. (1992). A standard international socio-economic index of occupational status. *Social Science Research*, *21*(1), 1-56.

Genoud, P. A. (1999). *Observation de la mise à l'épreuve des nouveaux moyens d'enseignement romands de mathématiques : évaluation collective de quelques connaissances et aptitudes des élèves en 4P.* Neuchâtel : IRPD.

Genoud, P. A. & Jacquet, F. (2000). *Synthèse générale de la mise à l'épreuve des nouveaux moyens d'enseignement romands de mathématiques.* Neuchâtel : IRDP.

Goldstein, H. (1995). *Multilevel statistical models.* London : Arnold.

Gréco, P., Grize, J.-B., Papert, S. & Piaget, J. (1960). *Problèmes de la construction du nombre.* Paris : Presses Universitaires de France.

Guttman, L. (1944). A basis for scaling qualitative data. *American Sociological Review*, *9*, 139-150.

Guttman, L. (1950). The basis for scalogram analysis. In S. A. Stouffer, L. Guttman, E. A. Suchman, P. F. Lazarsfeld, S. A. Star & J. A. Clausen (Eds.), *Measurement and prediction : studies in social psychology in World War II* (Vol. 4, pp. 60-90). Princeton, NJ : Princeton University Press.

Huisman, M. & Molenaar, I. W. (2001). Imputation of missing scale data with item response models. In A. Boomsma, M. A. J. Van Duijn & T. A. B. Snijders (Eds.), *Essays on item response theory* (pp. 221-244). New York : Springer.

Hutin, R., Pochon, L.-O. & Perret, J.-F. (1991). *Connaissances mathématiques à l'école primaire : bilan des acquisitions en fin de quatrième année.* Berne : Peter Lang.

Jaeger, R. M. (1982). An iterative structured judgment process for establishing standards on competency tests : theory an application. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *4*(4), 461-475.

Jaeger, R. M. (1989). Certification of student competence. In R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (3e éd., pp. 485-514). New York : American Council on Education : MacMillan.

Jonnaert, P. (2002). *Compétences et socioconstructivisme : un cadre théorique.* Bruxelles : De Boeck.

Kahane, J.-P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques : commis-*

sion de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Paris : Odile Jacob.

Lafortune, L. & St-Pierre, L. (1994). *La pensée et les émotions en mathématiques : métacognition et affectivité.* Montréal : Les Éditions Logiques.

Landry, F. (2003). *Grilles-horaires officielles : temps scolaire effectif des élèves : enseignement primaire et secondaire premier cycle : Suisse romande et Tessin : tableaux comparatifs : année scolaire 2003-2004.* Neuchâtel : IRDP.

Lebart, L., Morineau, A. & Piron, M. (1997). *Statistique exploratoire multidimensionnelle* (2e éd.). Paris : Dunod.

Levy, P. S. & Lemeshow, S. (2003). *Sampling of populations : methods and applications* (3e éd.). New York : Wiley.

Longford, N. T. (1993). *Random coefficient models.* Oxford : Oxford University Press.

Luce, R. D. & Tukey, J. W. (1964). Simultaneous conjoint measurement : a new type of fundamental measurement. *Journal of Mathematical Psychology, 1*, 1-27.

MEQ. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise.* Québec : Gouvernement du Québec, Ministère de l'Education.

Mokken, R. J. (1971). *A theory and procedure of scale analysis with applications in political research.* The Hague : Mouton De Gruyter.

Moser, U. & Berweger, S. (2004). Influence du système éducatif et des établissements scolaires sur les performances en mathématiques. In C. Zahner (Ed.), *PISA 2003 : compétences pour l'avenir : premier rapport national* (pp. 47-62). Neuchâtel : OFS/CDIP.

Mottier Lopez, L. & Tièche Christinat, C. (2001). *Les enseignants 1P/2P donnent leur avis sur l'enseignement des mathématiques : analyse des questionnaires dans le cadre du suivi scientifique du nouvel enseignement des mathématiques.* Neuchâtel : IRDP.

Nidegger, C. (2001). *Compétences des jeunes romands : résultats de l'enquête PISA 2000 auprès des élèves de 9e année.* Neuchâtel : IRDP.

Nimier, J. (1988). *Les modes de relations aux mathématiques : attitudes et représentations.* Paris : Méridiens Klincksieck.

OCDE. (2001). *Connaissances et compétences : des atouts pour la vie : premiers résultats de PISA 2000.* Paris : OCDE.

Pasquier, G. (2004). Le PECARO, c'est quoi ? *Educateur, 6.2004*, 5-24.

Perret, J.-F. (1985). *Comprendre l'écriture des nombres.* Berne : Peter Lang.

Pinheiro, J. C. & Bates, D. (2000). *Mixed-effects models in S and S-PLUS.* New York : Springer.

Reuchlin, M. (1991). *Les différences individuelles à l'école.* Paris : Presses Universitaires de France.

Robinson, W. S. (1950). Ecological correlations and the behaviour of individuals. *American Sociological Review, 15*, 351-357.

Rogalski, J. (1982). Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueurs, surface). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *3*(3), 343-396.

Scheuer, N., Sinclair, A., Merlo De Rivas, S. & Tièche Christinat, C. (2000). Cuando ciento y setenta uno escribe 10071 : niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y Apprendizaje*, *90*, 31-51.

Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, *6*, 461-464.

Searle, S. R., Casella, G. & McCulloch, C. E. (1992). *Variance components.* New York : Wiley.

Seron, X., Deloche, G. & Noël, M. P. (1991). Un transcodage des nombres chez l'enfant : la production des chiffres sous dictée. In J. Bideaud, C. Meljac & J.-P. Fischer (Eds.), *Les chemins du nombre.* Lille : Presses Universitaire de Lille.

Snijders, T. & Bosker, R. (1999). *Multilevel analysis : an introduction to basic and advanced multilevel modeling.* London : Sage.

Tièche Christinat, C. (2000). *Suivi scientifique du nouvel enseignement des mathématiques : troisième rapport intermédiaire.* Neuchâtel : IRDP.

Tièche Christinat, C. & Delémont, M. (2005). *Pratiques et discours : le nouvel enseignement des mathématiques 1P-4P sous la loupe.* Neuchâtel : IRDP.

Tièche Christinat, C. & Knupfer, C. (1999). *Suivi scientifique du nouvel enseignement des mathématiques : deuxième rapport intermédiaire.* Neuchâtel : IRDP.

Tillé, Y. (2001). *La théorie des sondages : échantillonnage et estimation en populations finies.* Paris : Dunod.

Tobias, S. (1994). *Overcoming math anxiety.* New York : Norton.

Traub, R. E. (1994). *Reliability for the social sciences : theory and applications* (Vol. 3). Thousand Oaks : Sage.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.* Berne : Peter Lang.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple : les structures additives. *Grand N*, *38*, 21-40.

Vergnaud, G. & Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Française de Pédagogie*, *36*, 28-43.

Welch, B. L. (1951). On the comparison of several mean values : an alternative approach. *Biometrika*, *38*(3/4), 330-336.

Willms, D. J. (2003). *PISA 2000 : statut socio-économique et compétences en lecture des élèves de Suisse romande et du Tessin.* Neuchâtel : IRDP.