

Evaluation des compétences en mathématiques en fin de 2e année primaire : Résultats de la première phase de l'enquête Mathéval

Ouvrage coordonné par Jean-Philippe Antonietti



Évaluation des compétences en mathématiques en fin de 2^e année primaire

Résultats de la première phase
de l'enquête MATHÉVAL

Ouvrage coordonné par Jean-Philippe ANTONIETTI

AUTEURS

Jean-Philippe ANTONIETTI (IRDP)

Ninon GUIGNARD (SRED)

Antoine MUDRY (SFT)

Ladislav NTAMAKILIRO (URSP)

Werner RIESEN (SREP)

Chantal TIÈCHE CHRISTINAT (IRDP)

Anne-Chantal VAN DER KLINK (IRDP)

IRDP

Faubourg de l'Hôpital 43

Case postale 54

CH-2007 Neuchâtel

Tél. +41 (0) 32 889 69 70

Fax +41 (0) 32 889 69 71

E-mail: irdp.doc@ne.ch

<http://www.irdp.ch>

Fiche bibliographique :

ANTONIETTI, Jean-Philippe (éd.). – Évaluation des compétences en mathématiques en fin de 2^e année primaire: Résultats de la première phase de l'enquête MATHÉVAL / coord. par Jean-Philippe Antonietti; avec la collab. de Ninon Guignard... [et al.] – Neuchâtel: Institut de recherche et de documentation pédagogique (IRDP), 2003. - IX, 134 p. ; 30 cm. – (03.2). – Bibliogr. pp. 131-134 CHF 15.80

Mots-clés: *Évaluation, Compétence, Élève, Mathématiques, Enseignement primaire, Suisse romande, Enquête, Influence, Moyen d'enseignement, Réforme de l'enseignement, Pratique pédagogique, Enseignant*

Cette publication est également disponible sur le site IRDP :
<<http://www.irdp.ch/publicat/publi-cd.htm>>

La reproduction totale ou partielle des publications de l'IRDP est en principe autorisée, à condition que leur(s) auteur(s) en ai(en)t été informé(s) au préalable et que les références soient mentionnées.

Photo de couverture: Maurice Bettex – IRDP

Remerciements

Nous tenons à remercier tout spécialement les enseignantes et les enseignants qui ont aimablement participé à notre recherche, ainsi que leurs élèves qui se sont vus confrontés parfois à des situations mathématiques ardues.

Un vif merci également aux correspondantes et correspondants cantonaux qui ont très consciencieusement assumé le rôle d'intermédiaires entre nous-mêmes, membres du groupe scientifique du consortium MATHÉVAL, et les classes désignées pour participer à notre recherche.

Résumé

De nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques ont été introduits en Suisse romande en 1997. Quelles sont les répercussions de cette nouvelle manière d'enseigner sur l'apprentissage des élèves? Pour répondre à cette question nous avons évalué les compétences mathématiques développées par les élèves de deuxième année primaire ayant bénéficié de ces nouveaux moyens d'enseignement.

Nous montrons dans ce travail que l'évolution des compétences des élèves se déroule normalement et que les objectifs fixés par le plan d'étude romand sont visiblement atteints. Dans le domaine arithmétique, les écoliers manifestent de bonnes compétences. Dans le domaine géométrique, toutefois, leurs acquis sont moins homogènes.

La méthodologie proposée par les nouveaux moyens promeut les activités de recherche par l'entremise de situations-problèmes. Cette innovation a des répercussions sur les compétences des élèves: leurs réponses sont souvent d'une grande diversité et d'une richesse remarquable.

Les enseignants, quant à eux, apprécient ces nouveaux moyens et relèvent quasiment tous le plaisir qu'ont les élèves à faire des mathématiques. Ils se plaignent néanmoins de la plus grande difficulté à gérer la classe, ainsi qu'à évaluer les élèves.

Globalement, donc, les élèves progressent à un bon rythme et les enseignants, malgré les quelques défauts des nouveaux moyens, sont satisfaits. Une seule crainte, provoquée par les grandes différences de niveau observées entre les élèves francophones et non-francophones d'une part et entre les non redoublants et les redoublants d'autre part, nous tenaille. Nous suspectons en effet que ces différences, attendues certes, ne soient accentuées par l'emploi de la nouvelle méthodologie.

Zusammenfassung

Im Jahre 1997 sind in der Westschweiz neue Mathematik-Lehrmittel eingeführt worden. Welches sind nun die Auswirkungen dieser neuen Art des Unterrichtens auf das Lernen der Schüler? Um auf diese Frage eine Antwort zu finden, haben wir die Rechenfertigkeiten evaluiert, welche sich die Schüler der zweiten Primarklasse angeeignet haben, die mit diesen neuen Lehrmitteln gearbeitet haben.

In dieser Studie wird aufgezeigt, dass die Entwicklung der Fertigkeiten der Schüler normal verläuft und dass die durch den Westschweizer Lehrplan festgelegten Lehrziele eindeutig erreicht wurden. In der Arithmetik weisen die Schüler gute Fertigkeiten auf, in der Geometrie dagegen ist ihr Wissensstand weniger homogen.

Die in den neuen Lehrmitteln angewandte Methodologie fördert das ei-

genständige Ausprobieren anhand von konkreten Aufgabestellungen. Diese Neuerung hat Auswirkungen auf die Kompetenzen der Schüler: Ihre Lösungen sind oft sehr unterschiedlich und von bemerkenswerter Qualität.

Die Lehrpersonen ihrerseits schätzen diese neuen Lehrmittel und heben fast einstimmig das Vergnügen hervor, das der Mathematikunterricht den Schülern bereitet. Sie weisen jedoch kritisch auf grössere Schwierigkeiten in der Klassenführung sowie in der Bewertung der Leistungen der Schüler hin.

Insgesamt machen die Schüler gute Fortschritte und die Unterrichtenden sind trotz gewisser Mängel der neuen Lehrmittel zufrieden. Zwei Aspekte bieten jedoch Anlass zu grosser Besorgnis: die beträchtlichen Niveau-Unterschiede zum einen zwischen französischsprachigen und nicht-französischsprachigen Schülern und zum anderen zwischen Repetenten und Nicht-Repetenten. Wir haben nämlich den Verdacht, dass diese – in einem gewissen Masse zwar zu erwartenden – Unterschiede durch die Anwendung der neuen Methodologie noch verstärkt werden.

Riassunto

In Svizzera romanda, nel 1997, sono stati adottati dei nuovi metodi di insegnamento della matematica. Quali sono le ripercussioni di questo nuovo modo di insegnare sull'apprendimento degli allievi? Per rispondere a questa domanda abbiamo valutato le competenze matematiche sviluppate dagli allievi di seconda elementare che hanno beneficiato dell'innovazione.

In questo lavoro mostriamo che l'evoluzione delle competenze degli allievi procede normalmente e che gli obiettivi fissati dal piano di studio romando sono raggiunti. Gli allievi manifestano delle buone competenze in aritmetica. Tuttavia in geometria le loro competenze sono meno omogenee.

Questa nuova metodologia promuove le attività di ricerca attraverso la messa in campo di «situazioni-problema». Ciò ha delle ripercussioni sulle competenze degli allievi: le loro risposte sono sovente di una grande diversità e di una notevole ricchezza.

Gli insegnanti apprezzano questi nuovi strumenti e quasi tutti rilevano il piacere che hanno gli allievi a fare matematica. Si lamentano però della maggiore difficoltà a gestire la classe e a valutare gli allievi.

Globalmente, dunque, gli allievi fanno progressi a un buon ritmo e gli insegnanti, malgrado alcuni difetti di questi nuovi strumenti, sono soddisfatti. Rimane però un punto dolente che scaturisce dalle grandi differenze di livello osservate tra gli allievi francofoni e non e fra i promossi e i ripetenti. Ci chiediamo infatti se queste differenze, attese certamente, non siano accentuate dall'utilizzo della nuova metodologia.

Sommaire

Introduction	1
I Méthode	5
1 Échantillon	9
1.1 Échantillonnage	9
1.2 Les élèves	10
1.2.1 Âge	11
1.2.2 Sexe	11
1.2.3 Nationalité	12
1.2.4 Langue maternelle	13
1.2.5 Redoublement	14
1.3 Les enseignants	15
1.3.1 Sexe	15
1.3.2 Âge	16
1.3.3 Expérience	16
1.3.4 Effectif des classes	16
1.3.5 Formation	17
1.3.6 Taux d'occupation	18
2 Instruments	19
2.1 Questionnaire aux élèves	19
2.2 Questionnaire aux enseignants	19
2.3 Épreuves de mathématiques	19
2.3.1 Épreuves individuelles	20
2.3.2 Épreuves collectives	21
3 Passation	23
II Résultats	25
4 Compétences individuelles	27

4.1	Analyse item par item	28
4.1.1	Carnaval	28
4.1.2	Petite suite	33
4.1.3	Quel est le plus grand?	36
4.1.4	Au cinéma	38
4.1.5	Les colliers de Louisa	45
4.1.6	Le drapeau des pirates	48
4.1.7	Les cubes	52
4.1.8	Manhattan	55
4.1.9	Les pavillons	57
4.1.10	Les remparts	63
4.2	Analyse par domaine	66
4.2.1	Domaine numérique	66
4.2.2	Domaine géométrique	68
5	Compétences collectives	71
5.1	Analyse item par item	71
5.1.1	Les mouches de Hébus	71
5.1.2	La combinaison secrète	74
5.1.3	La pyramide	76
5.1.4	Les bonbons	79
5.1.5	Le voyageur de commerce intergalactique	81
5.1.6	Le goûter	83
5.1.7	Le ver à fruit	87
5.1.8	Promenons-nous dans les bois...	92
5.2	Analyse par domaine	95
5.2.1	Domaine numérique	95
5.2.2	Domaine géométrique	96
5.2.3	Compétences transversales	96
6	Les enseignants et leurs pratiques	99
6.1	Utilisation des nouveaux moyens	99
6.2	Pratique et gestion	101
6.3	Évaluation du travail des élèves	105
7	Explication des différences observées	107
7.1	Construction d'une échelle de capacités	108
7.1.1	Unidimensionnalité de l'épreuve individuelle	108
7.1.2	Mise en équivalence des formes A et B de l'épreuve individuelle	108
7.1.3	Estimation de l'ampleur des effets-classe	113
7.2	Comparaison des élèves	114
7.2.1	Âge	114
7.2.2	Sexe	115

7.2.3	Nationalité	116
7.2.4	Langue maternelle	116
7.2.5	Redoublement	117
7.2.6	Canton	118
7.3	Comparaison des classes	120
7.3.1	Effets-maître	120
7.3.2	Effets-classe	123
Conclusion		127
Bibliographie		131

Introduction

En 1997, de nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques sont introduits dans les classes de Suisse romande. Ces nouveaux moyens n'apportent pas sur le plan des contenus mathématiques de grandes modifications. Les notions d'ensembles et de relations ne sont plus enseignées en tant que telles, l'apprentissage de la numération se fait sans recourir à d'autres bases que celle de dix, les rudiments de la topologie ne sont plus abordés directement. Mais à part la suppression de ces quelques objets épineux (Conne, 1986; Perret, 1985), l'accent est toujours mis sur la logique et le raisonnement, sur le nombre et la numération, les opérations et leurs propriétés, l'espace et la géométrie ainsi que sur la mesure et le mesurage.

L'innovation est d'ordre didactique. Les contenus à enseigner sont les mêmes, en revanche la manière d'enseigner qui est proposée est fondamentalement différente. Selon cette nouvelle conception, très inspirée par la didactique des mathématiques française (Brousseau, 1998), l'enseignant¹ a comme tâche de proposer à l'élève des situations dans lesquelles le savoir à enseigner puisse émerger :

La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux, des «problèmes» qu'il propose. Ces problèmes choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. (Brousseau, 1998, p. 59).

L'enseignant a donc la responsabilité de créer dans sa classe les conditions qui permettent à ses élèves de vivre à leur échelle les tribulations d'une

1. Dans ce texte, les génériques masculins ont souvent été utilisés, sans aucune discrimination et uniquement pour alléger le texte.

société mathématicienne. L'approche proposée est donc résolument socio-constructiviste. Les élèves vont être les bâtisseurs de leurs connaissances qu'ils acquerront en interagissant avec leur milieu ainsi qu'en se confrontant à leurs pairs.

Depuis le début de l'introduction généralisée des nouveaux moyens en Suisse romande, l'IRDP suit cette innovation, en mettant en place une recherche comprenant deux volets distincts. Le premier volet, qui est en voie d'achèvement, a pour objet d'observer dans une perspective didactique, les réactions qu'une telle innovation provoque dans la classe et l'établissement (Mottier Lopez & Tièche Christinat, 2001; Tièche Christinat, 2000; Tièche Christinat & Knupfer, 1999).

Le deuxième volet, réalisé par un consortium romand, vise à cerner les compétences et connaissances en mathématiques mobilisables par les élèves de 2^e et 4^e primaire ayant bénéficié des nouveaux moyens. Le présent travail est un compte rendu de l'évaluation des compétences des élèves de 2^e primaire. L'évaluation des élèves de 4^e primaire se déroulera en 2004 et fera aussi l'objet d'une publication ultérieure.

Mais qu'entendons-nous par *compétence*? Nous nous référerons plus particulièrement à Jonnaert (2002) :

A travers une compétence, un sujet mobilise, sélectionne et coordonne une série de ressources (dont certaines de ses connaissances, mais aussi une série d'autres ressources qui seraient affectives, sociales et celles reliées à la situation et à ses contraintes) pour traiter efficacement une situation. Une compétence suppose, au-delà du traitement efficace, que ce même sujet pose un regard critique sur les résultats de ce traitement qui doit être socialement acceptable. (p. 41).

Globalement, nous retiendrons que la compétence est un savoir-agir fondé sur la mobilisation et l'utilisation d'un ensemble de ressources².

Par cette idée de «savoir-agir», la compétence devient ainsi indissociable des *contextes* dans lesquels elle se manifeste et des *situations* qu'elle permet de traiter. Dans la Figure 1, nous représentons schématiquement l'organisation des termes de cette définition en montrant que la compétence est une caractéristique de l'interaction entre un élève et une tâche qui lui est proposée, et est donc liée inéluctablement à la situation.

Dans notre étude, nous accorderons donc une grande importance à la description des problèmes et à la manière dont les élèves les résolvent afin de pouvoir évaluer de façon satisfaisante leurs compétences. Les tâches que nous avons conçues sont variées et devraient susciter, d'une part, des comportements automatisés et, d'autre part, des comportements moins rodés mais néanmoins nécessaires à la résolution de problèmes plus complexes. Dans les

2. Cette formulation est très proche de celle que l'on trouve dans le programme d'études du Québec (MEQ, 2001).

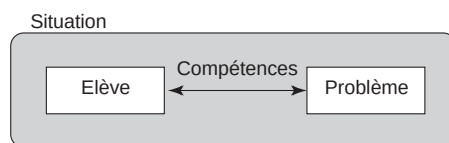


FIGURE 1 – *Représentation schématique d'une situation dans laquelle un élève est confronté à un problème mathématique.*

nouveaux moyens, de nombreuses activités se réalisent à deux, nous avons donc décidé d'examiner également les compétences que peuvent manifester des élèves qui travaillent en duo. Au terme des Chapitres 4 et 5, nous saurons si les objectifs fixés par les nouveaux moyens sont atteints.

Étant donné que nous soumettrons à chaque élève de notre échantillon plusieurs problèmes, nous pourrons inférer à partir des performances globales leurs *capacités mathématiques* qui sont invariantes pour une classe de situations et sont constitutives d'un ensemble de compétences.

Nous examinerons ensuite dans quelle mesure les capacités mathématiques des élèves sont influencées par certaines caractéristiques qui leur sont propres – comme leur âge, leur sexe, leur nationalité ou leur langue maternelle – ou par d'autres facteurs comme les pratiques enseignantes ou la structure de la classe dans laquelle ils se trouvent (ceci fera l'objet des Chapitres 6 et 7). Le schéma de la Figure 1 peut donc être complété (voir Figure 2).

Nous retrouvons donc le fameux triangle didactique légèrement voilé et voyons ainsi plus précisément sur quels points nous nous focaliserons dans cette étude.

En résumé, nous tenterons de répondre à trois questions. La première porte sur les compétences des élèves :

- Les objectifs décrits dans le plan d'étude sont-ils atteints, les compétences attendues sont-elles manifestes ?

La deuxième question porte sur la transférabilité des connaissances :

- Les connaissances mathématiques construites et mobilisées en classe sont-elles transférables à d'autres situations-problèmes ?

Et la dernière porte sur les déterminants des capacités mathématiques :

- Dans quelle mesure les capacités mathématiques des élèves sont-elles influencées par les pratiques enseignantes ?

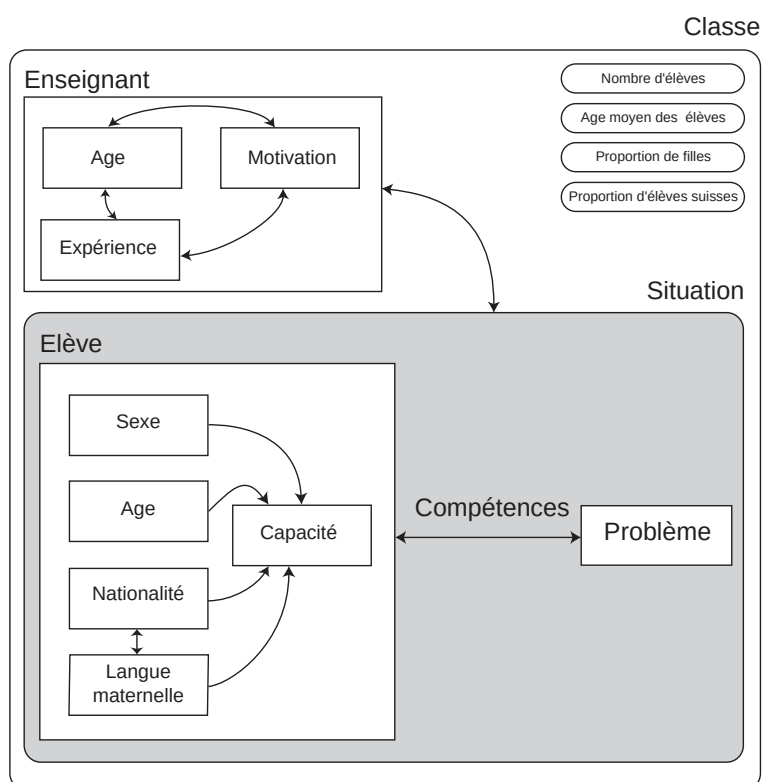


FIGURE 2 – Représentation schématique de l'agencement des variables qui peuvent éventuellement influencer les capacités mathématiques d'un élève.

Première partie

Méthode

Dans cette première partie nous allons décrire les élèves, les enseignantes et les enseignants que nous avons interrogés lors de notre enquête (Chapitre 1). Ensuite nous présenterons les instruments que nous avons élaborés et utilisés pour mener nos investigations à bien (Chapitre 2). Finalement, nous décrivons les conditions dans lesquelles se déroulèrent les différentes passations (Chapitre 3).

Chapitre 1

Échantillon

Les cantons de Berne (BE), de Fribourg (FR), de Genève (GE), du Jura (JU), de Neuchâtel (NE), du Valais (VS) et de Vaud (VD) ont participé à notre enquête. Pour assurer une certaine fiabilité aux résultats de notre étude, nous avons décidé de sonder vingt classes de deuxième année primaire par canton, soit un total de 140 classes sur l'ensemble de la Suisse romande.

Ce plan expérimental a l'avantage de bien recouvrir la Suisse romande d'une part et de permettre des comparaisons intercantionales d'autre part.

1.1 Échantillonnage

Nous avons procédé pour chaque canton à un échantillonnage stratifié des classes en fonction de leur structure. En effet certaines classes sont à degré unique, alors que d'autres sont à deux degrés ou à degrés multiples et nous voulions que la proportion des différents types de classes dans les échantillons cantonaux soit approximativement la même que celle observée dans les cantons respectifs. Nous avons donc construit nos échantillons de telle sorte que cette contrainte soit satisfaite (voir Tableau 1.1).

Dans le canton de Berne (partie francophone), par exemple, la proportion des classes à degré unique est de 38/61, soit 62%; l'échantillon que nous avons créé contient donc 13 classes à degré unique soit, *grosso modo*, la même proportion que dans le canton de référence.

Pour choisir les classes des deux strates de chaque canton, nous avons utilisé une variable auxiliaire: la taille de l'agglomération dans laquelle se trouve la classe.

Les classes de chaque strate sont ordonnées en fonction de la valeur de la variable auxiliaire associée; puis, à partir d'une origine choisie aléatoirement, les classes sont épinglées régulièrement jusqu'à former un échantillon de la taille désirée. En procédant ainsi nous sommes sûrs de toucher aussi bien des classes de tout petits villages que des classes de grands centres urbains et nous avons même la garantie que les proportions des classes de campagne et

Canton	Classes de 2P dans la population		Classes de 2P dans l'échantillon	
	À degré unique	À deux degrés ou à degrés multiples	À degré unique	À deux degrés ou à degrés multiples
BE	38 (62%)	23 (38%)	13 (65%)	7 (35%)
FR	101 (69%)	46 (31%)	13 (65%)	7 (35%)
GE	166 (53%)	149 (47%)	11 (55%)	9 (45%)
JU	29 (38%)	47 (62%)	8 (40%)	12 (60%)
NE	86 (60%)	58 (40%)	12 (60%)	8 (40%)
VS	84 (52%)	77 (48%)	10 (50%)	10 (50%)
VD	222 (43%)	295 (57%)	9 (45%)	11 (55%)

TABLEAU 1.1 – *Nombre de classes de 2P à degré unique et à deux degrés ou à degrés multiples dans les divers cantons de Romandie et dans les échantillons cantonaux. Les proportions sont indiquées entre parenthèses.*

des classes de ville dans nos échantillons cantonaux sont similaires à celles des cantons sondés.

Les classes ainsi choisies ont donc été sollicitées pour participer à l'enquête MATHÉVAL. Parmi les 140 classes contactées, 138 nous retournèrent les épreuves et les questionnaires dûment remplis.

Dans les paragraphes suivants, nous allons caractériser les élèves ayant participé à l'enquête (§1.2) ainsi que leurs enseignantes et enseignants (§1.3).

1.2 Les élèves

Le nombre total d'élèves interrogés est de 1912. Les effectifs par canton sont reportés dans le Tableau 1.2.

Canton	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD	Total
Effectif	260	297	299	222	271	281	282	1912

TABLEAU 1.2 – *Nombre d'élèves interrogés par canton.*

1.2.1 Âge

La distribution des âges des élèves interrogés est représentée dans la Figure 1.1. Leur âge moyen vaut 102.1 mois soit à peu près 8 ans et demi (l'écart-type vaut $s = 5.8$ mois).

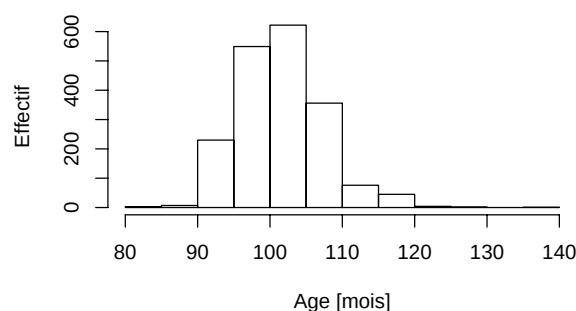


FIGURE 1.1 – *Histogramme des âges des élèves interrogés.*

Les distributions des âges des élèves que nous avons interrogés diffèrent d'un canton à l'autre ($F = 94.3$, $ddl_1 = 6$, $ddl_2 = 1905$, $p < 0.05$)¹ (voir Tableau 1.3 et Figure 1.2). Ces différences peuvent être imputées au fait que les règles définissant l'âge d'admission à l'école primaire ne sont pas les mêmes dans les cantons suisses romands².

Canton	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD
Moyenne	105.0	104.6	98.12	105.3	100.2	99.0	103.2
Écart-type	5.4	5.3	4.7	5.7	5.3	4.4	5.1

TABLEAU 1.3 – *Moyenne et écart-type des âges des élèves interrogés exprimés en mois selon les cantons.*

1.2.2 Sexe

Parmi les élèves interrogés 921 sont des filles et 991 des garçons. La proportion des filles et des garçons est *grosso modo* la même dans tous les cantons ($\chi^2 = 13.61$, $ddl = 6$, $p < 0.05$) (voir Tableau 1.4).

1. Dans ce rapport, chaque fois que nous effectuerons un test statistique, nous indiquerons entre parenthèses la valeur empirique de la variable de décision utilisée, les degrés de liberté (ddl) et le résultat de la comparaison entre la probabilité critique (p) et le seuil de signification (α) que nous avons systématiquement fixé à 5%.

2. Centre d'information et de documentation IDES. *Données de base sur le système éducatif en Suisse et dans la Principauté du Lichtenstein*, modifié le 21 janvier 2002 [consulté le 24 janvier 2003]. <http://edkfmpro.unibe.ch/ides/mainUmfragen_f.html>

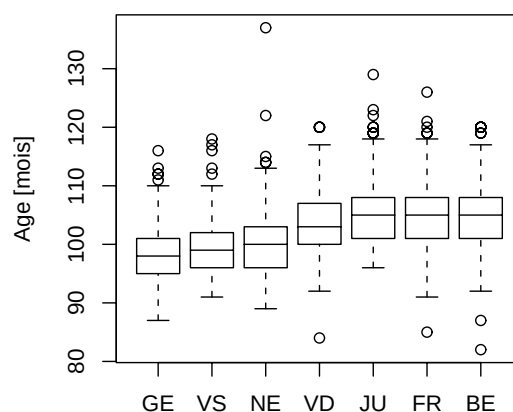


FIGURE 1.2 – *Distributions des âges des élèves interrogés selon les cantons. Les boîtes à moustaches sont ordonnées en fonction de la valeur de la médiane.*

Nous résumerons souvent dans ce rapport une distribution statistique par une boîte à moustaches (Tukey, 1977). Rappelons que pour construire une boîte à moustaches, il faut déterminer la valeur du premier quartile $Q1$, du deuxième quartile $Q2$ (*i.e.* la médiane), du troisième quartile $Q3$, ainsi que la valeur des adjacentes inférieure et supérieure. L'adjacente inférieure est la plus petite valeur observée plus grande ou égale à $Q1 - 1.5(Q3 - Q1)$. L'adjacente supérieure est la plus grande valeur observée plus petite ou égale à $Q3 + 1.5(Q3 - Q1)$. La largeur de la boîte est arbitraire. Sa hauteur est définie par l'intervalle compris entre $Q1$ et $Q3$. La boîte est partagée par un trait dont la hauteur est définie par $Q2$. Les adjacentes inférieure et supérieure définissent quant à elles les extrémités des moustaches. Les observations extrêmes, prenant une valeur plus petite que l'adjacente inférieure ou plus grande que l'adjacente supérieure, sont représentées par de petits ronds.

Canton	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD	Total
Filles	142 (55%)	143 (48%)	136 (45%)	95 (43%)	136 (50%)	148 (53%)	121 (43%)	921 (48%)
Garçons	118 (45%)	154 (52%)	163 (55%)	127 (57%)	135 (50%)	133 (47%)	161 (57%)	991 (52%)

TABEAU 1.4 – *Nombre de filles et de garçons interrogés par canton. Les proportions sont indiquées entre parenthèses.*

1.2.3 Nationalité

Parmi les élèves interrogés 1384 possèdent la nationalité suisse, 517 ne la possèdent pas (pour 11 élèves cette information est manquante). La propor-

tion d'élèves suisses n'est pas la même dans tous les cantons ($\chi^2 = 48.97$, $ddl = 6$, $p < 0.05$) (voir Tableau 1.5 et Figure 1.3).

Nationalité	Canton							Total
	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD	
Suisse	200 (77%)	229 (78%)	174 (59%)	186 (84%)	192 (72%)	201 (72%)	202 (72%)	1384 (73%)
Autre	60 (23%)	66 (22%)	122 (41%)	36 (16%)	75 (28%)	79 (28%)	79 (28%)	517 (27%)

TABLEAU 1.5 – *Nationalité des élèves interrogés selon les cantons. Les proportions sont indiquées entre parenthèses.*

Prenons comme référence la proportion des élèves de nationalité suisse dans l'échantillon complet. Dans les cantons de Berne, de Fribourg et du Jura, la proportion des élèves suisses est plus grande que la proportion de référence. Par contre, dans le canton de Genève, elle est plus petite. Dans les cantons de Neuchâtel, du Valais et de Vaud, elle est *grosso modo* la même. Ces proportions donnent une image fidèle de la réalité romande; l'on sait en effet que la proportion d'étrangers au sein de la population résidente permanente est la plus forte dans le canton de Genève et qu'elle est la plus faible dans les cantons de Berne, de Fribourg et du Jura³.

1.2.4 Langue maternelle

Parmi les élèves interrogés 1463 sont francophones, 437 sont non-francophones (l'information manque pour 12 élèves). La plupart des élèves francophones sont les élèves de nationalité suisse (voir Tableau 1.6).

Langue maternelle	Nationalité		Total
	Suisse	Autre	
Français	1322 (96%)	139 (27%)	1461 (77%)
Autre	60 (4%)	376 (73%)	436 (23%)

TABLEAU 1.6 – *Répartition des élèves francophones et non-francophones selon leur nationalité.*

3. Office fédéral de la statistique. *Statistique suisse: Chiffres clés*, modifié le 22 novembre 2002 [consulté le 24 janvier 2003]. <http://www.statistik.admin.ch/stat_ch/ber00/feck_m.htm>.

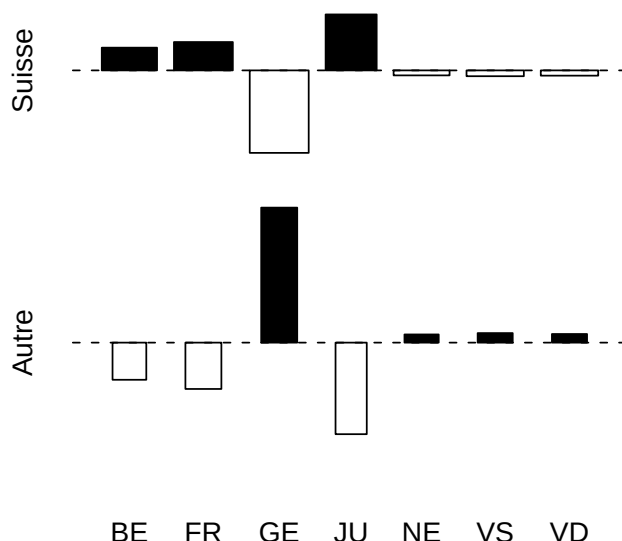


FIGURE 1.3 – *Diagramme de Cohen-Friendly représentant les écarts à l'indépendance dans la table de contingence définie par les variables Nationalité et Canton.*

Dans une table de contingence de dimension 2, chaque case (i, j) peut être caractérisée par son effectif observé n_{ij} et par son effectif attendu en cas d'indépendance e_{ij} . La racine carrée signée de la contribution au χ^2 de la case (i, j) vaut

$$d_{ij} = \frac{n_{ij} - e_{ij}}{\sqrt{e_{ij}}}.$$

Dans un diagramme de Cohen-Friendly, chaque case est représentée par un rectangle de hauteur (signée) proportionnelle à d_{ij} et de largeur proportionnelle à $\sqrt{e_{ij}}$. La surface du rectangle associé à la case (i, j) est donc proportionnelle à la différence entre l'effectif observé n_{ij} et l'effectif attendu e_{ij} . Chaque rectangle est positionné par rapport à une ligne indiquant l'indépendance ($d_{ij} = 0$). Si l'effectif observé est plus grand que l'effectif attendu, le rectangle est placé au-dessus de la ligne de base et est noirci, dans le cas contraire le rectangle est placé en-dessous et est laissé blanc.

1.2.5 Redoublement

La majeure partie des élèves interrogés ont suivi jusqu'ici un parcours scolaire sans accroc. Néanmoins certains ont redoublé leur première année d'école primaire, d'autres ont redoublé leur deuxième année, d'autres encore bénéficient

de mesures particulières (classe de développement, classe d'accueil, premier cycle parcouru en trois ans...). Entre les cantons il y a des différences significatives ($\chi^2 = 51.36$, $ddl = 18$, $p < 0.05$)⁴ (voir Tableau 1.7). Les cantons du Jura et de Vaud sont ceux qui recourent le plus fréquemment au redoublement, alors que les cantons de Neuchâtel et du Valais sont ceux qui y recourent le moins souvent.

Redoublement	Canton							Total	Fréquence
	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD		
Aucun	240	271	279	199	260	268	249	1766	(93%)
en 1P	5	12	8	9	5	4	13	56	(3%)
en 2P	8	11	10	12	4	7	8	60	(3%)
Autres mesures	7	0	0	2	1	0	10	20	(1%)

TABLEAU 1.7 – *Nombre d'élèves ayant redoublé selon les cantons.*

1.3 Les enseignants

Des questionnaires ont été envoyés à tous les enseignants intervenant dans les 140 classes impliquées dans notre recherche. Finalement, nous avons obtenu des questionnaires de 145 enseignants (plusieurs enseignants peuvent être impliqués dans une même classe); tous ces questionnaires ont été dépouillés et analysés. La première partie du questionnaire comportait des questions nous permettant de dresser le profil de nos répondants. Les réponses à ces questions d'informations générales sont présentées ci-dessous.

Des questionnaires issus de tous les cantons romands concernés nous sont parvenus. La provenance cantonale de ces questionnaires est donnée dans le Tableau 1.8.

Canton	BE	FR	GE	JU	NE	VS	VD	Total
Nombre de questionnaires	21	20	19	20	25	19	21	145

TABLEAU 1.8 – *Nombre de questionnaires retournés par canton.*

1.3.1 Sexe

La répartition des enseignants en fonction du sexe nous montre que la grande majorité des personnes concernées sont des femmes, elles représentent près de 95% de notre effectif. La proportion de femmes est comparable dans tous les

4. Les conditions d'application du test du χ^2 ne sont pas tout à fait satisfaites mais en regroupant les modalités les moins fréquentes les conclusions restent les mêmes.

cantons même si dans les cantons de Fribourg et du Valais elle est légèrement inférieure à cette valeur moyenne.

1.3.2 Âge

L'observation de l'âge de nos répondants met en évidence le fait que plus de la moitié d'entre eux sont âgés de 40 ans et plus. En outre, un très faible effectif dans la classe d'âge 36-40 ans peut être relevé. En ce qui concerne les différences cantonales, nous constatons que dans les cantons de Fribourg et de Vaud la moyenne d'âge semble inférieure aux autres cantons et, de plus, la moitié des enseignants sont âgés de moins de 35 ans.

1.3.3 Expérience

Lorsque nous nous intéressons au nombre d'années d'enseignement des répondants, nous remarquons que cette durée d'implication dans le monde scolaire est fortement corrélée à leur âge (le coefficient de corrélation vaut $r = 0.89$) (voir Figure 1.4).

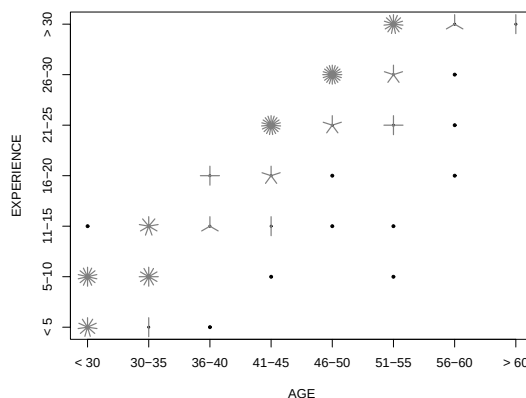


FIGURE 1.4 – *Corrélation entre l'âge des enseignants et leur expérience. Ce diagramme en tournesols permet de visualiser le nombre d'enseignants à chaque emplacement. Le nombre de pétales d'un tournesol est égal au nombre d'enseignants se trouvant en son centre. Si à un endroit il n'y a qu'un enseignant, le tournesol n'est représenté que par son cœur – un point.*

1.3.4 Effectif des classes

Concernant le nombre d'élèves par classe, la moyenne romande se situe à 18 élèves. Cependant, nous observons de grandes différences de dispersion des distributions cantonales, ces différences sont significatives ($F = 6.59$, $ddl_1 = 6$, $ddl_2 = 138$, $p < 0.05$). C'est dans les cantons de Berne et du

Jura que nous trouvons les plus fortes proportions de classes de moins de 16 élèves et c'est dans le canton de Genève que les effectifs sont les plus homogènes (toutes les classes comptent des effectifs allant de 17 à 23 élèves) (voir Figures 1.5 et 1.6).

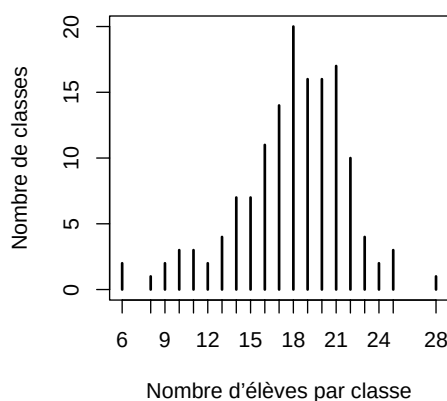


FIGURE 1.5 – *Effectif des classes.*

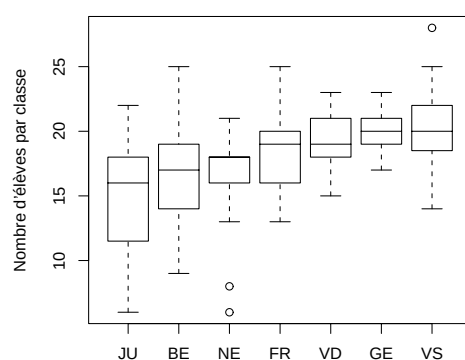


FIGURE 1.6 – *Distributions des effectifs des classes selon les cantons. Les boîtes à moustaches sont ordonnées en fonction de la valeur de la médiane.*

1.3.5 Formation

En ce qui concerne la formation initiale de nos enseignants, nous pouvons remarquer que plus des deux tiers d'entre eux sont au bénéfice d'une formation primaire et que seuls un peu plus de 10%, toutes des femmes, ont une formation de maîtresse enfantine. Il est à relever que dans le canton de Genève nous observons une forte proportion (63%) d'enseignantes ayant suivi une formation enfantine.

1.3.6 Taux d'occupation

La première constatation que nous pouvons faire quant au taux d'occupation de notre échantillon, est que plus de la moitié des enseignants (57%) occupent un poste à temps partiel. Parmi ces personnes qui ne travaillent pas à plein temps, plus de la moitié d'entre elles ont un taux d'occupation situé entre 50% et 75%, et seuls quelques rares enseignants affirment avoir un poste à moins de 50%. Nous relevons ici une différence significative entre les cantons ($\chi^2 = 35.46$, $ddl = 18$, $p < 0.05$) (voir Figure 1.7). En effet, près de 80% des Genevois occupent un poste à plein temps alors que les Bernois ne sont que 19%. De plus, tous les postes occupés à moins de 50% le sont dans les cantons de Berne, du Jura et de Neuchâtel.

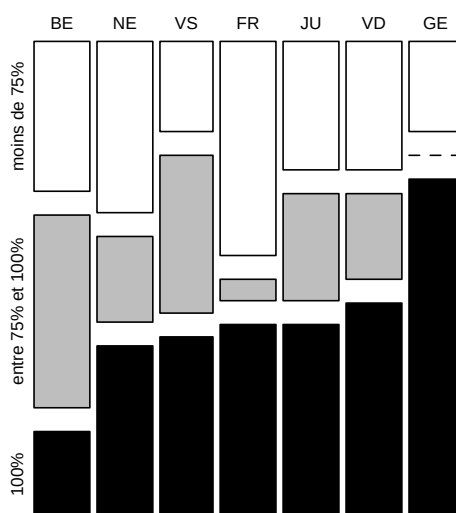


FIGURE 1.7 – *Taux d'occupation selon les cantons.*

Chapitre 2

Instruments

Pour pouvoir répondre aux questions de recherche énoncées dans l'introduction, nous avons construit deux questionnaires – l'un destiné aux élèves (§2.1), l'autre aux enseignants (§2.2) –, ainsi que des épreuves de mathématiques (§2.3).

2.1 Questionnaire aux élèves

Ce questionnaire est succinct. Il nous permet simplement de relever l'âge, le sexe, la nationalité et la langue maternelle des élèves ayant participé à l'enquête MATHÉVAL. Il nous fournit également une information concernant le retard scolaire éventuel des élèves (redoublement ou non et, le cas échéant, quelle année). Tenant compte du jeune âge des enfants, nous avons demandé aux enseignants de remplir ce questionnaire.

2.2 Questionnaire aux enseignants

Un questionnaire a été élaboré et adressé aux enseignants qui ont participé à l'enquête MATHÉVAL, il se compose de 28 questions distribuées en quatre parties. La première partie rassemble des informations générales concernant le répondant, la deuxième s'intéresse à l'utilisation qu'il fait des nouveaux moyens d'enseignement pour les mathématiques, les deux autres parties portent sur son enseignement, à la pratique et à la gestion d'une part, et à l'évaluation du travail des élèves d'autre part. Les questions sont pour la plupart fermées, mais certaines sont ouvertes et des espaces de précisions et de commentaires complètent plusieurs questions.

2.3 Épreuves de mathématiques

Afin d'apprécier les compétences mathématiques des élèves de 2P ayant bénéficié des nouveaux moyens d'enseignement, nous avons conçu deux sortes

d'épreuves : la première est constituée de problèmes à résoudre individuellement (cahiers 1A et 1B), la seconde de problèmes à résoudre en duo, éventuellement en trio (cahiers 2A et 2B).

2.3.1 Épreuves individuelles

Nous avons créé deux formes d'épreuves individuelles. Ces deux formes contiennent une première partie commune (voir Tableau 2.1).

Forme A	Forme B
1. Carnaval 2. Au cinéma 3. Petite suite 4. Quel est le plus grand?	1. Carnaval 2. Au cinéma 3. Petite suite 4. Quel est le plus grand?
5. Les pavillons 6. Manhattan 7. Le drapeau des pirates	
	8. Les colliers de Louisa 9. Les remparts 10. Les cubes

TABLEAU 2.1 – *Structure des deux épreuves individuelles.*

Ces épreuves sont le résultat d'un compromis. En effet nous voulions pouvoir mesurer les compétences de tous les élèves à la même aune – établir donc un classement général – d'une part, et recouvrir au mieux l'ensemble des domaines enseignés, d'autre part. Or pour pouvoir comparer les élèves les uns aux autres, l'idéal aurait été de soumettre à tous les élèves les mêmes problèmes, alors que pour recouvrir le plus finement possible le champ des mathématiques enseignées, il aurait fallu proposer des problèmes différents à de nombreux petits groupes d'élèves¹.

Finalement, grâce à nos deux formes d'épreuves individuelles, nous allons pouvoir sans perdre trop de qualité, à la fois construire une échelle de compétence globale (voir Chapitre 7) et recouvrir raisonnablement les domaines enseignés (voir Chapitre 4).

A travers ces épreuves, nous évaluerons tant des aptitudes numériques et arithmétiques acquises lors de la résolution de problèmes tirés des modules 2, 3 et 4 des nouveaux moyens, que des aptitudes géométriques acquises lors de la résolution de problèmes tirés des modules 5, 6 et 7 (voir Tableau 2.2).

Les problèmes de nos épreuves individuelles sont sommairement caractérisés dans le Tableau 2.3. Nous voyons par exemple que le problème *Carnaval* qui implique pour être résolu correctement que l'élève sache dénombrer une collection et comparer des nombres entiers, est un problème qui nécessite

1. Dans les années 75-80, c'est ce design expérimental qui avait été choisi par l'IRDP pour évaluer les moyens d'enseignement des mathématiques romands (Perret, 1988).

Module	Contenu
1	Des problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement
2	Des problèmes pour approcher le nombre et lui donner du sens
3	Des problèmes pour connaître l'addition
4	Des problèmes pour connaître la multiplication
5	Des problèmes pour explorer et organiser l'espace
6	Des problèmes pour approcher les figures géométriques et les transformations du plan
7	Des problèmes pour mesurer

TABLEAU 2.2 – *Contenu des modules des nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques romands.*

la mobilisation de compétences numériques semblables à celles pouvant être acquises lors de la résolution des problèmes du module 2.

Problème	Aptitudes	
	numériques	géométriques
1. Carnaval	2	
2. Au cinéma	3	
3. Petite suite	2	
4. Quel est le plus grand?	2	
5. Les pavillons		6, 7
6. Manhattan		5
7. Le drapeau des pirates		6
8. Les colliers de Louisa	4	
9. Les remparts		7
10. Les cubes		6

TABLEAU 2.3 – *Type d'aptitudes nécessaires à la résolution des problèmes des épreuves individuelles et modules de référence.*

2.3.2 Épreuves collectives

Nous avons créé deux formes d'épreuves collectives mais cette fois sans chevauchement. La particularité de ces épreuves tient à leur relative difficulté ! Nous tenions à placer les élèves face à des situations complexes qui puissent susciter chez eux des conduites de recherche similaires à celles développées à travers la résolution des problèmes du module 1. Ainsi avec ces épreuves nous espérons évaluer non seulement des aptitudes spécifiques mais aussi des aptitudes plus générales – comme sélectionner et organiser des informations, formuler des hypothèses et les vérifier ou conduire un raisonnement déductif – consubstantielles à toute activité véritablement mathématique (voir Tableau 2.4).

Problème		Aptitudes générales	Aptitudes spécifiques numériques géométriques	
Forme A	1. Les bonbons	1	3	
	2. Le voyageur de commerce	1	2, 3	5
	3. Les mouches de Hébus	1	2	
	4. Le ver à fruit	1		5
Forme B	5. La pyramide		3	
	6. La combinaison secrète	1	2	6
	7. Promenons-nous...	1		5
	8. Le goûter	1		5

TABEAU 2.4 – *Type d'aptitudes nécessaires à la résolution des problèmes des épreuves collectives et modules de référence.*

Nous n'avons pas inclut dans les épreuves individuelles de tels problèmes pour ne pas trop déstabiliser les élèves ayant déjà à faire face à une situation d'évaluation potentiellement stressante.

Chapitre 3

Passation

Tous les élèves des classes concernées passèrent les épreuves de mathématiques durant le mois de mai 2002. La passation se déroula sur deux matinées : la première consacrée à l'épreuve individuelle, la seconde à l'épreuve en groupe.

Pour chaque épreuve, l'enseignant lut à haute voix les consignes et explicita éventuellement des termes de vocabulaire. Les élèves disposèrent pour résoudre chaque épreuve d'environ une heure (les élèves n'ayant pas terminé dans ce laps de temps purent encore disposer d'une demi-heure supplémentaire). La résolution des problèmes s'est faite directement dans les cahiers avec l'interdiction de recourir à la calculatrice.

Pour l'épreuve en groupe, la formation des duos s'est faite selon la convenance de l'enseignant¹.

La moitié des classes reçut des épreuves de forme A, l'autre des épreuves de forme B.

En choisissant de telles conditions de passation, nous avons opté – au détriment d'une certaine rigueur scientifique – pour des conditions écologiques. Les élèves n'ont probablement pas tous passé les épreuves dans les mêmes conditions, en revanche ils purent travailler dans leur contexte quotidien familial, sans la présence d'un observateur extérieur éventuellement perturbateur. Lors de l'interprétation des résultats, nous devons impérativement tenir compte de ces conditions de passation particulières étant donné que les réponses des élèves que nous analyserons auront été influencées, sans que nous puissions savoir exactement dans quelle mesure, par la manière dont les enseignants organisèrent effectivement les passations dans leur classe.

1. Si l'effectif de la classe était impair, l'enseignant constituait alors en plus des paires un trio.

Deuxième partie

Résultats

Chapitre 4

Compétences individuelles

Dans ce chapitre nous allons décrire les compétences mathématiques que manifestent les élèves de notre échantillon. Nous passerons en revue tous les problèmes que nous leur avons soumis. L'ordre dans lequel nous présenterons les problèmes suit *grosso modo* l'ordre des thèmes proposés dans les nouveaux moyens (*i.e.* le nombre, les opérations arithmétiques, l'espace et la mesure). Lors de la présentation d'un problème, nous adopterons toujours le même schéma : nous commencerons par reproduire l'énoncé du problème, puis nous expliciterons brièvement les contenus mathématiques du problème et listerons les compétences nécessaires à sa résolution; ensuite nous détaillerons la grille de correction employée et résumerons les performances des élèves; finalement nous décrirons très minutieusement les procédures mises en oeuvre par les élèves pour résoudre le problème.

4.1 Analyse item par item

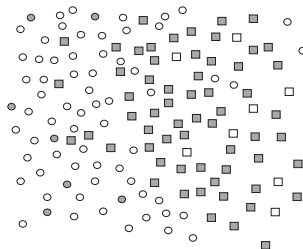
4.1.1 Carnaval

Carnaval

La place est couverte de confettis.

Combien y a-t-il de confettis ronds ? _____

Combien y a-t-il de confettis carrés ? _____



Coche la bonne réponse :

Il y a plus de carrés ☐

Il y a plus de ronds ☐

Contenu mathématique

Ce problème fait appel à la notion de cardinal d'un ensemble. Ce qui renvoie forcément aux notions d'entiers naturels et d'ordre qu'il est possible d'établir dans $\mathbb{N}$.

Compétences visées

Pour résoudre *Carnaval*, il faut savoir :

- Dénombrer des collections
- Comparer et ordonner deux nombres entiers

Grille de correction

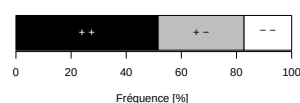
La réponse consiste à fournir le cardinal de l'ensemble des confettis ronds N_{ronds} ainsi que celui de l'ensemble des confettis carrés $N_{carrés}$. Les bonnes réponses sont $N_{ronds} = 71$ et $N_{carrés} = 69$. Dans les deux cas, nous attribuons 3 points si la réponse est correcte; nous attribuons 2 points si la réponse fournie ne s'éloigne de la bonne réponse que d'une unité et nous attribuons 1 point si la réponse fournie se trouve à 2, 3, 4 ou 5 unités de la bonne réponse. Si N_{ronds} et $N_{carrés}$ sont ordonnés correctement, cela rapporte 1 point supplémentaire.

Le nombre total de points qu'il est possible d'obtenir à cet exercice vaut donc 7.

Le problème est réussi si ce total est supérieur ou égal à 5. Le problème n'est réussi que partiellement si le total des points vaut 3 ou 4. Si le total est inférieur ou égal à 2, l'exercice est raté.

Taux de réussite

	Réussite			Total
	Réussite	partielle	Échec	
Effectif	986	596	330	1912
Fréquence	52%	31%	17%	100%



Analyse des procédures

La tâche soumise aux élèves relève du domaine de la numération et exige pour sa résolution un dénombrement et une comparaison de deux collections d'objets différents répartis inégalement dans un espace donné. Les deux collections ne composant pas deux champs spatialement définis, la résolution exige un repérage précis de chaque collection et des éléments lui appartenant, avant de mettre en place des procédures de comparaison. La numérosité relativement élevée de chaque collection et la proximité de leur taille ne permet ni une résolution par subitizing¹ ni par estimation de l'occupation spatiale. Les procédures de résolution attendues font appel à la connaissance de la suite numérique verbale inférieure à 100 et de la composition additive voir multiplicative (par regroupement de sous-collections par exemple) des nombres.

Dénombrement. En moyenne, les élèves dénombrent 70.1 confettis ronds et 67.9 confettis carrés (voir Figure 4.1).

Le dénombrement se fait selon 3 procédures générales qui permettent aux élèves un contrôle relativement fiable du comptage de la collection : le pointage, la numérotation et le regroupement (voir Figure 4.2). Décrivons ces procédures plus en détail.

Le pointage. Les élèves dénombrent en pointant les éléments un à un, accompagnant ce pointage de la comptine numérique. Ce pointage nécessite une bonne coordination pointage/nombre, et suppose ainsi de la part des élèves une attention soutenue. La numérosité importante des confettis rend ce pointage moins efficient qu'il ne le serait pour une collection plus petite d'objets. Afin de pallier cette difficulté, certains élèves procèdent à un

1. Il s'agit d'une forme d'aperception globale portant sur des petites quantités généralement inférieures ou égales à 4.

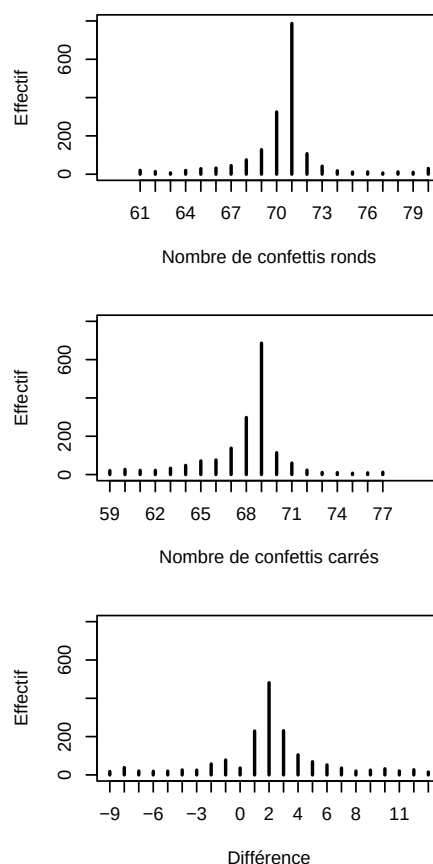


FIGURE 4.1 – *Distributions des réponses des élèves à «Carnaval». En plus des distributions du nombre de confettis ronds et carrés, nous avons représenté la distribution des différences entre le nombre de confettis ronds et le nombre de confettis carrés.*

contrôle effectué par une répétition du pointage-dénombrement ou l'accompagnement d'autres conduites.

La numérotation écrite. Cette conduite plus rare consiste de fait en une autre forme de pointage des éléments. Plus fiable que le pointage par la permanence de la trace qu'elle permet, elle est cependant chronophage et par conséquent peu choisie. L'écriture numérique devient un instrument de contrôle, prenant le relais de la mémoire. Son utilisation est signe d'un maniement de la suite ordinale des nombres (numérotation de chaque confetti), soit de la compréhension de la cardinalité. Chez quelques élèves la numérotation est faite de 10 en 10, voire de 5 en 5, mais cette conduite s'accompagne généralement de procédures de regroupement.

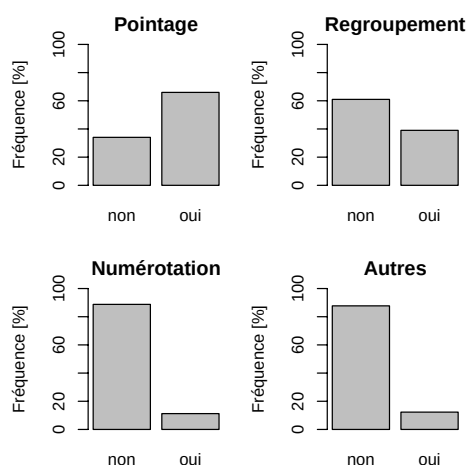


FIGURE 4.2 – *Fréquences d'utilisation des différentes procédures de dénombrement.*

Le regroupement. Outillée de diverses façons (coloriage de groupes de confettis, encerclage par des cordes de couleur), cette procédure plus classique consiste à établir des sous-collections contenant ou non un nombre équivalent d'éléments (10, 5 et parfois 2). Toutefois le respect de cette condition d'équivalence, qui relève parfois de l'intention, permet d'appliquer par la suite une loi de composition multiplicative, mais ne garantit pas la réussite de l'item. En effet, certains élèves omettent par exemple de compter les éléments unitaires restants. D'autres élèves plus sensibles à l'organisation spatiale des confettis vont doter leurs sous-collections de numérosités différentes, préservant une meilleure visibilité aux groupements, et faciliter l'opération de dénombrement par l'application de la loi de la composition additive des nombres.

Les procédures mises en évidences ont été rendues visibles grâce aux marques graphiques que les élèves ont produites dans leurs copies : le coloriage, le traçage de cheminement permettant de n'oublier aucun élément, l'encerclage de sous-collections, la séparation en strates horizontales ou verticales constituent des repères dont l'élève se munit pour contrôler l'opération de dénombrement. Des marquages numériques ou voire parfois protonumériques (bâtonnets) comme repères mnésiques du dénombrement apparaissent également dans plusieurs copies.

De fait, il n'est pas rare de voir se côtoyer plusieurs procédures dans une même copie, la numérotation écrite étant fréquemment associée à une autre procédure et allégeant dans certains cas le travail cognitif demandé. Lorsqu'une écriture numérique accompagne le regroupement, cette dernière occupe des fonctions différentes. Le nombre écrit peut indiquer soit la quantité d'objets contenus dans la sous-collection, soit le nombre de sous-collections,

soit la somme des objets de plusieurs sous-collections. Dans ce dernier cas, le dénombrement est d'emblée effectué alors que dans les deux autres cas, les quantités notées vont faire l'objet d'une opération d'addition voire peut-être de multiplication (table de 10).

Dans plusieurs cas, nous constatons que les deux collections de base ont fait l'objet chacune d'une procédure d'identification avant que ne soit entrepris un quelconque travail de dénombrement. La disposition spatiale des confettis nécessitait un travail de repérage spatial préalable. Cette différenciation pouvait même dans certains cas donner lieu à des procédures de comptage différenciées.

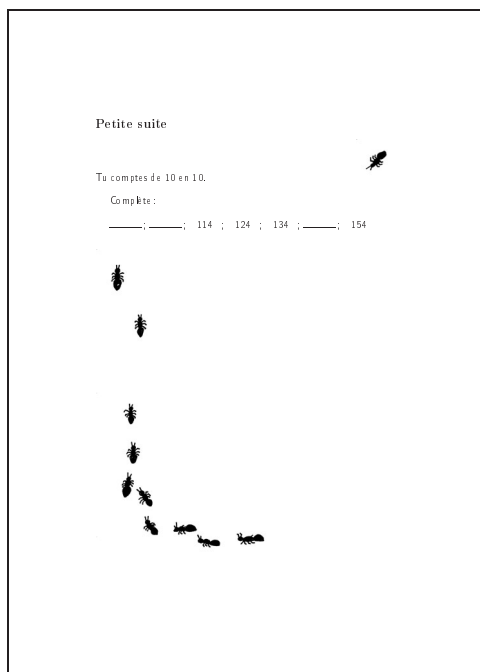
Comparaison. Parmi les élèves qui ont dénombré les confettis ronds et les confettis carrés, 96% comparent correctement leurs résultats (voir Tableau 4.1).

	$N_{\text{carrés}} > N_{\text{ronds}}$	$N_{\text{carrés}} < N_{\text{ronds}}$	Total
<i>Il y a plus de carrés</i>	323	84	407
<i>Il y a plus de ronds</i>	35	1305	1340
Total	358	1389	1747

TABLEAU 4.1 – *Résultats de la comparaison du nombre de confettis carrés au nombre de confettis ronds lorsque ces nombres sont différents.*

Les élèves ayant compté le même nombre de confettis ronds et de confettis carrés ne cochent aucune des cases ($n = 16$) ou les cochent les deux ($n = 16$); très peu n'en cochent qu'une ($n = 4$).

4.1.2 Petite suite



Contenu mathématique

Petite suite fait référence au système de numération décimal.

Compétences visées

Pour résoudre ce problème, il faut être capable de :

- Attribuer une valeur positionnelle aux chiffres
- Décomposer des nombres en centaines, dizaines et unités

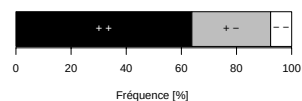
Grille de correction

Pour compléter la suite, il faut combler trois lacunes. Chaque lacune correctement remplie rapporte 1 point.

Le problème est réussi si les trois réponses sont correctes. Il est réussi partiellement si 1 ou 2 réponses sont justes. Si aucune ne l'est, il est raté.

Taux de réussite

	Réussite			
	Réussite	partielle	Échec	Total
Effectif	1220	546	146	1912
Fréquence	64%	28%	8%	100%



Analyse des procédures

Il s'agit d'un problème de type lacunaire, dont l'énoncé littéral est peu important. La suite numérique écrite dans l'ordre croissant et les espaces à remplir sont en soi suffisants pour comprendre la tâche à effectuer. Faisant l'objet de nombreuses activités orales ou écrites en 1^{re} et en 2^e année, le comptage de 10 en 10 relève d'une connaissance de la suite des nombres et des règles de l'écriture numérique. L'enjeu de la tâche proposée porte à la fois sur le comptage à rebours et sur l'écriture des nombres à 3 chiffres, dont un nombre comporte un zéro intercalaire.

En fonction des nombreuses études qui ont eu pour objet l'écriture numérique et son acquisition (Seron *et al.*, 1991; Scheuer *et al.*, 2000), nous avons relevé deux composantes de la situation qui vont organiser les réponses des élèves :

1. Les nombres écrits comportent trois chiffres.
2. Dans les exemples de l'énoncé, seul un chiffre est modifié, celui des dizaines.

Si les élèves cherchent à prendre en compte simultanément et rigidement ces deux composantes, alors ils ne parviendront pas à résoudre entièrement la tâche. Les résultats erronés semblent découler majoritairement de procédures qui révèlent la force et l'impact de ces composantes pour l'élève.

Procédure des trois chiffres. Les élèves interprètent la première composante comme une loi qui doit s'appliquer à l'ensemble des réponses. Ainsi plusieurs élèves interrogés vont créer une suite numérique composée uniquement de nombres à trois termes.

Le nombre 100 constitue le point de départ de la suite numérique (10% des élèves); les autres nombres indiquent le maintien de la contrainte d'un changement de position dans une pile, mais peu importe laquelle (dizaine ou unité) :

Ex. 1: **100** **104** 114 124 134 **144** 154
 Ex. 2: **100** **110** 114 124 134 **144** 154

Dans l'exemple 1, le changement de position (0 devient 4) porte sur la pile des unités; tandis que dans l'exemple 2, le changement de position (0 devient 1) porte sur la pile des dizaines.

Le nombre 104 a aussi parfois été choisi comme point de départ de la suite numérique :

Ex. 3: **104** **110** 114 124 134 **144** 154
 Ex. 4: **104** **108** 114 124 134 **144** 154

Une autre solution qui respecte les deux composantes est la suivante :

Ex. 5: **194** **104** 114 124 134 **144** 154

Le premier nombre 194 s'observe lors de résolution écrite de soustraction en colonnes par manque de compensation des emprunts ($104 - 10 = 194$).

Procédure de modification d'un seul chiffre. La deuxième composante portant sur une modification d'une unité de la position dans la pile des dizaines est reportée sur la pile des unités :

Ex. 6 : **112** **113** 114 124 134 **144** 154

Lors du comptage à rebours, les élèves doivent parvenir à mettre en jeu un invariant qu'ils ont repéré lors de l'écriture de la suite proposée qui se traduit sous la forme du 4. Toutefois le repérage du 4 n'est en soi pas suffisant, il doit être accompagné du choix de la bonne pile. Les exemples suivants indiquent très clairement que les élèves n'ont pas su repérer la pile qui maintenait le 4 :

Ex. 7 : **40** **104** 114 124 134 **144** 154

Ex. 8 : **14** **104** 114 124 134 **144** 154

D'autres erreurs montrent que les élèves n'ont pas su attribuer la modification de la position à la pile de la dizaine et ont établi une règle générale que l'on pourrait énoncer «il faut modifier d'une unité différents chiffres». Les suites créées par l'application d'un tel *théorème-en-acte* sont de cette nature :

Ex. 9 : **93** **104** 114 124 134 **144** 154

Ex. 10 : **95** **104** 114 124 134 **144** 154

Procédure d'écriture du zéro intercalaire. De manière générale, l'écriture du zéro intercalaire ne semble en soi pas poser de trop gros problèmes aux élèves de 2P. Toutefois, quelques conduites d'élèves semblent issues de la difficulté que sa maîtrise suppose :

Ex. 11 : **4** **14** 114 124 134 **144** 154

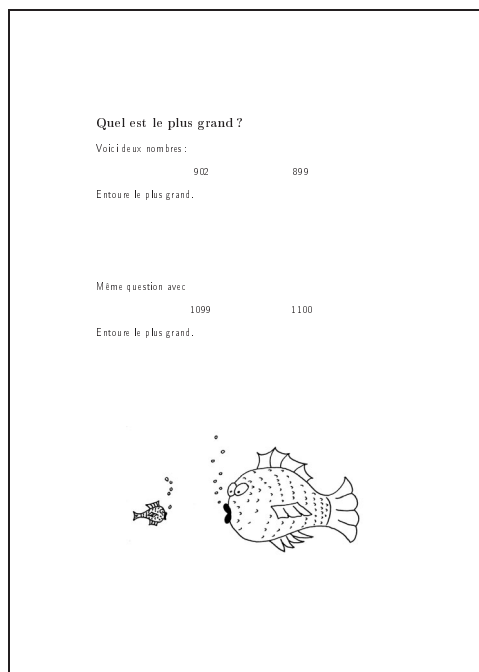
Ex. 12 : **94** **14** 114 124 134 **144** 154

Ex. 13 : **14** **104** 114 124 134 **144** 154

La valeur du zéro n'étant pour certains pas encore stabilisée, les élèves omettent 104 passant ainsi directement à 94 et surmontent ainsi la difficulté d'écriture de ce nombre :

Ex. 14 : **84** **94** 114 124 134 **144** 154

4.1.3 Quel est le plus grand ?



Contenu mathématique

Quel est le plus grand ? fait référence à l'ordination de nombres dans le système décimal.

Compétences visées

Les compétences visées sont les mêmes que dans le problème précédent. Pour résoudre correctement ce problème, il faut être capable de :

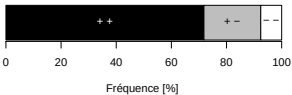
- Reconnaître la valeur positionnelle des chiffres
- Décomposer des nombres en milliers, centaines, dizaines et unités

Grille de correction

Chaque réponse correctement entourée rapporte 1 point. Le problème est réussi si les deux réponses sont justes. Le problème n'est réussi que partiellement si l'une des deux réponses est fausse. Si les deux réponses sont fausses, il est raté.

Taux de réussite

	Réussite			Total
	Réussite	partielle	Échec	
Effectif	1373	394	145	1912
Fréquence	72%	20%	8%	100%



Analyse des procédures

La comparaison de 902 et 899 est réussie par 89% des élèves, celle de 1099 et 1100 par 76%. Dans l'ensemble, la tâche est bien réussie même si les nombres à comparer se trouvent au-delà du champ numérique que les élèves sont censés maîtriser au terme de leur premier cycle d'école primaire.

Pour choisir entre deux nombres entiers naturels celui qui est le plus grand, il suffit de comparer leur longueur. Le plus long est le plus grand. Ici les nombres à comparer ont la même longueur (3 et 4 respectivement), l'algorithme de choix doit être complexifié.

Pour comparer deux nombres de même longueur, il faut comparer les chiffres qui les composent en procédant de gauche à droite. Le nombre le plus grand est celui qui possède, à la première différence, le chiffre le plus grand. Ainsi lorsqu'on compare 902 à 899, on s'aperçoit que le premier chiffre de 902 (soit 9) est déjà différent du premier chiffre de 899 (soit 8). Comme 9 est plus grand que 8, 902 est plus grand que 899.

Certains élèves n'utilisent pas cet algorithme. Ils comparent les chiffres de chaque nombre et choisissent comme nombre le plus grand celui qui possède le plus de grands chiffres. Si l'on compare 1099 et 1100 selon cette procédure, l'on est amené à conclure que 1099 est plus grand que 1100. En effet parmi les quatre paires de chiffres à comparer, on dénombre trois différences. Parmi ces trois différences deux sont en faveur de 1099 (voir Tableau 4.2).

	1099	1100
1 = 1	.	.
0 < 1	–	+
9 > 0	+	–
9 > 0	+	–

TABLEAU 4.2 – Comparaison de deux nombres basée sur la comparaison de tous les chiffres qui les composent.

4.1.4 Au cinéma

Au cinéma 1) Rachel a 12 francs pour aller au cinéma. Elle rencontre sa marraine qui lui donne 7 francs. Combien a-t-elle d'argent maintenant ? 2) Avant la séance, Annan s'achète des smarties. Il a 25 smarties dans son tube. Il en donne 8 à Elena. Combien lui en reste-t-il ?	3) Jennifer mange des pop-corn. Dans la bouscule, 34 pop-corn tombent par terre. Dans le carton de Jennifer, il ne reste plus que 11 pop-corn. Combien avait-elle de pop-corn avant de se faire bousculer ? 
4) Dans la file d'attente, il y a 18 personnes. Un groupe de 15 personnes arrive. Combien y a-t-il de personnes qui attendent maintenant ? 5) Le cinéma possède 75 places. Il y a 19 places vides. Combien y a-t-il de spectateurs qui regardent «Ali Baba et les 40 voleurs» ?	6) Après le film Simon et Julia jouent aux POG. Julia est plus forte que Simon, elle gagne 12 POG. Elle en a maintenant 35. Combien en avait-elle avant la partie ? 

Contenu mathématique

Les notions en jeu dans *Au cinéma* sont l'addition et la soustraction dans $\mathbb{N}$.

Compétences visées

Pour résoudre ces problèmes additifs, il faut être capable de :

- Additionner et soustraire en situation

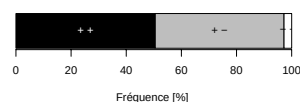
Grille de correction

Au cinéma est composé de 6 problèmes. Chaque problème correctement résolu rapporte 1 point.

Au cinéma est réussi si 5 ou 6 problèmes sont correctement résolus. Il est réussi partiellement si le nombre de problèmes résolus correctement vaut 2, 3 ou 4. Sinon il est raté.

Taux de réussite

	Réussite			Total
	Réussite	partielle	Échec	
Effectif	966	893	53	1912
Fréquence	50%	47%	3%	100%



Analyse des procédures

Quelques éléments théoriques. La construction de la notion d'addition s'organise progressivement en un vaste champ conceptuel², qui relève du nombre, des opérations logiques de réunion et de transformations, des deux opérations arithmétiques complémentaires réciproques : l'addition et la soustraction, ainsi que de nombreuses notions telles que la somme, la différence, le complémentaire, l'équivalence...

Les nouveaux moyens de mathématiques abordent ce champ conceptuel par «des problèmes pour apprendre à connaître l'addition» afin de permettre aux élèves de construire cette connaissance en lui donnant du sens et d'en faire un outil mathématique efficace. C'est en résolvant des problèmes que l'élève apprend les notations, les conventions et les règles nécessaires pour mathématiser une situation et pour en communiquer les résultats et la démarche.

Les problèmes additifs comportent des particularités qui les distinguent sur le plan de la complexité et, par conséquent, de la difficulté. «Il est important de les connaître pour comprendre les différentes significations de ces opérations pour l'élève et les difficultés qu'elles présentent.» (Gagnebin *et al.*, 1997, p. 93). C'est pourquoi Vergnaud (1986, 1991a) classe les relations additives en différentes catégories.

2. «Le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions et soustractions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques.» (Vergnaud, 1991b, p. 147).

La catégorie État-État-État (EEE) correspond à la réunion d'ensembles disjoints. État-Transformation-État (ETE) porte sur les transformations (appelées anciennement *machines*), celles-ci pouvant être positives ou négatives. La plupart des problèmes concerne l'un de ces termes : la recherche de l'état final mais aussi de l'état intermédiaire ou encore initial. Ce dernier cas est beaucoup plus complexe que la recherche de l'état final et sa réussite retardée. Les problèmes de 2P se limitent aux catégories EEE et ETE. Après la 2P, la recherche portera également sur les transformations elles-mêmes.

Problèmes additifs proposés. MATHÉVAL a proposé six problèmes additifs aux élèves, évaluant chacune des catégories requises en 2P. Tous les problèmes ont reçu le même habillage, une séance au cinéma, afin de circonvenir le plus possible la charge cognitive et représentative.

État-État-État. Deux états se composent pour donner un nouvel état. Pour éviter la surcharge dans ce domaine, nous n'avons pas proposé la situation la plus simple qui correspondrait à l'addition $a + b = x$, où x est la somme à trouver, mais nous avons opté pour une première difficulté : l'élève devait fournir une réponse relative à la complémentaire d'un ensemble. La situation se présente donc sous la forme : $a + x = b$. A priori, l'élève va chercher la complémentaire à a ou opérer sur la différence $b - a = x$.

Le cinéma possède 75 places. Il y a 19 places vides. Combien y a-t-il de spectateurs qui regardent «Ali Baba et les 40 voleurs»? (problème 5)

Une difficulté supplémentaire du problème réside dans le *distracteur* possible : 40, et il est fort possible que l'un des résultats erronés le plus fréquent, 115, corresponde à $75 + 40$.

Bien que cet item porte sur une forme additive sans transformation, il est le moins bien réussi de la série : moins d'un élève sur deux le résout (43%). On peut penser que l'élément transformateur favorise la représentation du problème, alors qu'ici, il s'agit de concevoir l'absence d'un sous-ensemble.

L'analyse qualitative révèle que la démarche la plus fréquente est la soustraction. Celle-ci est souvent correctement posée mais sa résolution a souvent échoué, malgré le recours, parfois, à une méthode proche du calcul réfléchi ($75 - 10 - 5 - 4$ par exemple). Quelques élèves se sont essayés à l'algorithme en colonnes, pas prévu par les nouveaux moyens avant la 3P, mais se sont heurtés à la difficulté de la retenue ou de l'échange. Même si cet item est celui qui a provoqué le plus souvent le recours au dessin (deux fois plus que pour les autres problèmes additifs), cette démarche n'excède pas 10% de la population interrogée.

Parmi les démarches attendues, le recours à l'addition lacunaire $19 + x = 75$ n'apparaît que rarement, ce qui représente une différence par rapport aux anciens moyens. Cette différence est probablement liée au fait qu'on travaille

beaucoup moins sur la réunion d'ensembles disjoints et peut-être parce que l'ensemble total apparaît au début de la consigne.

État-Transformation-État. Une transformation opère sur un état initial pour donner un état final. La grandeur recherchée peut être l'état initial, l'état final ou la transformation. Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, cette dernière recherche n'est pas demandée en 2P. La transformation peut être positive ou négative, suivant qu'il s'agit d'une augmentation ou d'une diminution, d'une perte.

A. Recherche de l'état final. Trois problèmes portant sur la recherche de l'état final ont été proposés aux élèves, deux avec une transformation positive, le troisième avec une transformation négative.

Rachel a 12 francs pour aller au cinéma. Elle rencontre sa marraine qui lui donne 7 francs. Combien a-t-elle d'argent maintenant ? (problème 1)

Ce problème est le plus facile de la série car la transformation est positive et suggérée par *donne 7 francs*. De plus retrouver l'état final est relativement simple en ce qui concerne l'écriture arithmétique. Enfin les nombres sont inférieurs à 20, y compris la somme. L'addition demandée correspond à l'équation $a + (+b) = x$.

Ce problème n'en est plus un pour quasiment tous les élèves de 2P (95%). La forme canonique $12 + 7 = 19$ est de loin la plus fréquente. On trouve quelques élèves qui résolvent encore ce problème par le dessin et certains qui s'essaient à l'opération en colonnes. Quelques élèves encore recourent au calcul réfléchi. Un pourcentage non négligeable d'élèves effectuent deux démarches, probablement à titre de justification ou de preuve, ce qui va bien dans l'esprit des nouveaux moyens. Dans ce cas, on trouve, rarement, l'usage de la commutativité ($12 + 7$ et $7 + 12$); plus souvent l'addition en colonnes ou le dessin pour vérifier l'addition $12 + 7$.

Dans la file d'attente, il y a 18 personnes. Un groupe de 15 personnes arrive. Combien y a-t-il de personnes qui attendent maintenant ? (problème 4)

Le vocabulaire est légèrement moins suggestif que dans le problème précédent et les nombres un peu plus élevés. L'équation correspondante est la même : $a + (+b) = x$.

Comme l'on pouvait s'y attendre, le score chute un peu, mais si 86% des élèves répondent correctement, un pourcentage légèrement plus élevé d'élèves donnent une opération correcte : $18 + 15$. Quelques élèves effectuent une addition en colonnes correctement posée mais éprouvent de la difficulté avec la retenue.

Avant la séance, Annan s'achète des smarties. Il a 25 smarties dans son tube. Il en donne 8 à Elena. Combien lui en reste-il ? (problème 2)

Cette fois-ci l'équation correspondante est $a + (-b) = x$. Il s'agit aussi de trouver l'état final mais la transformation est négative. La question est par conséquent plus difficile bien que le vocabulaire utilisé dans la consigne, le mot *reste* évoque la soustraction. Le score tombe à 79%, si l'on prend en compte l'opération avec son résultat correct. On peut majorer le score si l'on s'en tient à une démarche correcte.

Comme pour le problème précédent, on ne trouve pratiquement pas d'opération posée sous la forme $8 + 17 = 25$, ce qui constitue une différence par rapport aux moyens des années 70.

B. Recherche de l'état initial. Deux problèmes portent sur la recherche de l'état initial, l'un avec une transformation positive, l'autre avec une transformation négative. Toutes les recherches sur les problèmes additifs montrent que la recherche de l'état initial est beaucoup plus difficile que celle de trouver l'état final, voire de l'état intermédiaire.

Après le film Simon et Julia jouent aux POG. Julia est plus forte que Simon, elle gagne 12 POG. Elle en a maintenant 35. Combien en avait-elle avant la partie? (problème 6)

Ce problème est du type $x + (+a) = b$. La complexité du problème et la difficulté de sa résolution sont manifestes lorsque l'on observe les conduites adoptées par les élèves. L'opération canonique $35 - 12 = 23$, en ligne ou en colonnes, est beaucoup moins fréquente que dans les cas précédents. Lorsque l'élève s'aide d'un dessin, celui-ci n'aboutit pas. L'idée que quelqu'un gagne quelque chose induit l'addition $35 + 12$.

Contrairement au problème 2 qui demande également une soustraction mais où la recherche porte sur l'état final, on voit apparaître beaucoup plus fréquemment l'opération lacunaire $x + 12 = 35$. Une autre différence est que les termes de la soustraction peuvent être inversés: $12 - 35$. Ces deux exemples parmi d'autres mettent bien en évidence le fait que la même opération peut requérir des niveaux cognitifs différents. Que presque deux tiers des élèves se montrent capables de poser une opération ou une démarche qualitative correctes représente une belle réussite (61% ont une démarche et un résultat corrects).

Jennifer mange des pop-corn. Dany la bouscule. 34 pop-corn tombent par terre. Dans le carton de Jennifer, il ne reste plus que 11 pop-corn. Combien avait-elle de pop-corn avant de se faire bousculer? (problème 3)

Correspondant à l'équation $x + (-a) = b$, la résolution de ce problème est la plus difficile de la série État-Transformation-État, puisqu'il s'agit de retrouver l'état initial alors que la transformation est négative. De plus le terme *reste* peut induire le recours à une soustraction.

Malgré toutes ces difficultés, le problème est réussi complètement par 88% des élèves, et même un peu plus en ce qui concerne la démarche seule, ce qui représente un score nettement plus élevé que le résultat obtenu au problème précédent (problème 6) où la transformation est positive. On trouve beaucoup plus souvent l'opération canonique $34 + 11$ que $35 - 12$. Il semble donc que, plus que le type de transformation, ce soit l'opération qui compte, l'addition restant plus facile que la soustraction. De plus, un grand nombre d'élèves recourent presque systématiquement à l'addition quel que soit le genre de problème et de transformation en jeu.

Toutefois l'analyse qualitative met bien en évidence la difficulté d'une recherche de l'état initial lorsque la transformation est négative : il y a beaucoup plus d'hésitation que dans le cas de la transformation positive. Un certain nombre d'élèves qui ont donné l'opération $34 + 11 = 45$ ajoutent une réponse verbale «Au début, elle avait 34 pop-corn».

Remarques générales. L'ensemble des problèmes additifs est bien réussi, même dans des situations relativement complexes comme lorsque la recherche porte sur l'état initial. Nous avons pu constater que, lorsque la transformation est négative, le problème est mieux réussi que dans le cas d'une transformation positive parce que la résolution s'effectue grâce à une addition.

Le problème le moins bien réussi est celui qui ne porte pas sur une transformation mais sur la réunion d'ensembles disjoints (EEE), la recherche concernant un sous-ensemble complémentaire.

Bien que, pour chaque problème, l'opération canonique soit la démarche la plus fréquente, on observe une belle variété de démarches s'appuyant sur le dessin ou le calcul réfléchi.

Certaines classes se signalent par le recours à l'opération en colonnes bien que cet algorithme ne soit pas au programme de 2P. Dans ce cas, les résultats ne sont ni plus souvent justes ni plus souvent faux que lors de l'écriture en ligne, mais l'usage des colonnes est beaucoup plus souvent pratiqué dans le cas de l'addition que dans celui de la soustraction.

Les Figures 4.3, 4.4 et 4.5 illustrent la variété des démarches de calcul pour additionner.

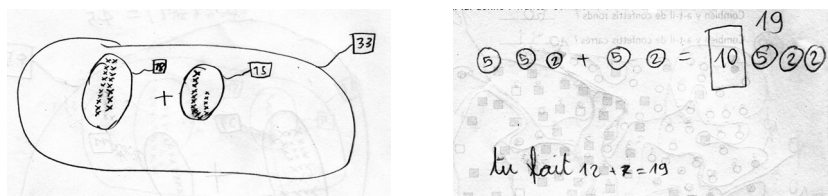


FIGURE 4.3 – Rachel a 12 francs pour aller au cinéma. Elle rencontre sa marraine qui lui donne 7 francs. Combien a-t-elle d'argent maintenant?

Avant Jennifer avait 45 pop-corn

FIGURE 4.4 – Jennifer mange des pop-corn. Dany la bouscule. 34 pop-corn tombent par terre. Dans le carton de Jennifer, il ne reste plus que 11 pop-corn. Combien avait-elle de pop-corn avant de se faire bousculer?

FIGURE 4.5 – Dans la file d'attente, il y a 18 personnes. Un groupe de 15 personnes arrive. Combien y a-t-il de personnes qui attendent maintenant?

Les Figures 4.6, 4.7 et 4.8 illustrent la variété des démarches de calcul pour soustraire.

Ella en a 18

FIGURE 4.6 – Avant la séance, Annan s'achète des smarties. Il a 25 smarties dans son tube. Il en donne 8 à Elena. Combien lui en reste-t-il?

FIGURE 4.7 – Après le film Simon et Julia jouent aux POG. Julia est plus forte que Simon, elle gagne 12 POG. Elle en a maintenant 35. Combien en avait-elle avant la partie?

Considérer l'addition dans le cadre d'un champ conceptuel est une nou-

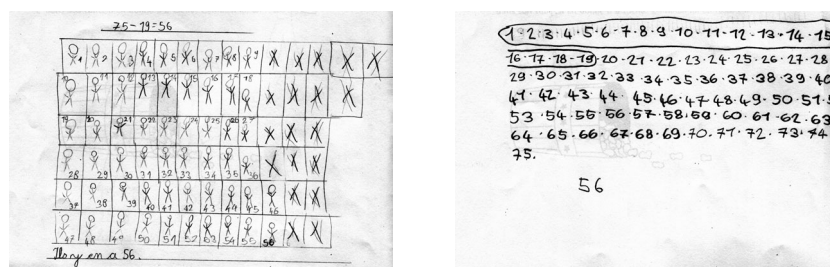


FIGURE 4.8 – Le cinéma possède 75 places. Il y a 19 places vides. Combien y a-t-il de spectateurs qui regardent «Ali Baba et les 40 voleurs» ?

veauté des nouveaux moyens qui a tenu compte de l'actualité des recherches en didactique. Les moyens des années 70 travaillaient l'addition comme réunion d'ensembles disjoints et comme *machines*. Celles-ci permettaient d'aborder l'addition et son inverse essentiellement sous forme numérique et très peu par les problèmes. Ceux-ci ne concernaient pas la recherche de l'état initial.

4.1.5 Les colliers de Louisa

Les colliers de Louisa

Louisa a une boîte de 22 perles. Elle veut faire 4 colliers. Chaque collier doit avoir le même nombre de perles. Il doit rester le moins possible de perles dans la boîte.

● ● ● ● ● ● ● ●

● ● ● ● ● ● ● ●

Chaque collier aura _____ perles.

Contenu mathématique

Les colliers de Louisa fait référence à la notion de division avec reste.

Compétences visées

Pour résoudre ce problème, il faut être capable de :

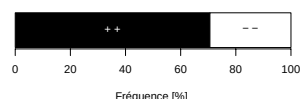
- Partager des collections
- Constituer des collections équipotentes

Grille de correction

Le problème est réussi, si la réponse est 5. Sinon il est raté.

Taux de réussite

	Réussite	Echec	Total
Effectif	692	288	932
Fréquence	71%	29%	100%



Analyse des procédures

Cette tâche de partage d'une petite collection (22 éléments) en quatre parts égales appartient au domaine des opérations et présente plusieurs difficultés que les élèves peuvent résoudre par des procédures diverses. La tâche proposée présente un support graphique important sur lequel les élèves vont pouvoir agir et ne relève pas a priori d'une tâche de division formelle, avec application d'un algorithme. Si en ce sens elle ne contient pas l'ensemble des difficultés qui sont recensées dans la littérature, les élèves sont toutefois confrontés à l'équipotence des parts et à la notion de reste.

Notre regard s'est porté essentiellement sur les procédures de partage et la gestion du reste, puisque plusieurs copies d'élèves de 2P font état soit du non respect de l'équivalence des classes, soit ont un reste supérieur au diviseur.

Procédure de partage et équipotence des classes. Le partage d'une collection en sous-collections équipotentes est souvent effectué au moyen de cordes ou de barres de partage. Cette marque graphique nous permet de constater que la réponse correcte (5 perles) ne signifie pas d'emblée que les 4 colliers auront 5 perles chacun. En effet, il suffit parfois d'une seule sous-collection composée de 5 perles pour que l'élève réponde 5. Ainsi le taux de réussite élevé que nous obtenons ne signifie pas dans tous les cas une compréhension de l'équivalence des classes.

Les procédures de regroupement ou de partage peuvent être effectuées selon des modes assez similaires. Soit l'élève prend en compte les lignes de perles l'une après l'autre et regroupe les perles appartenant à une même ligne par un trait qui pourrait représenter le fil du collier. Soit il prend en considération les deux lignes et forme des collections qui regroupent les jetons des deux lignes (voir Figure 4.9). Ce type de regroupement exige une plus

grande abstraction, dans le sens où l'élève constitue des classes d'objets et non pas des colliers.

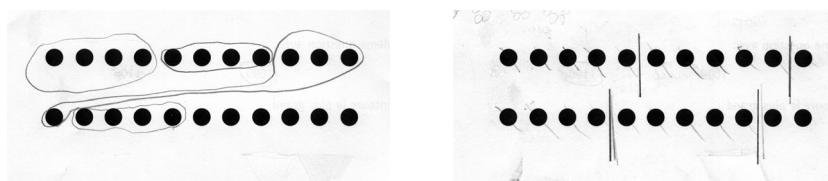


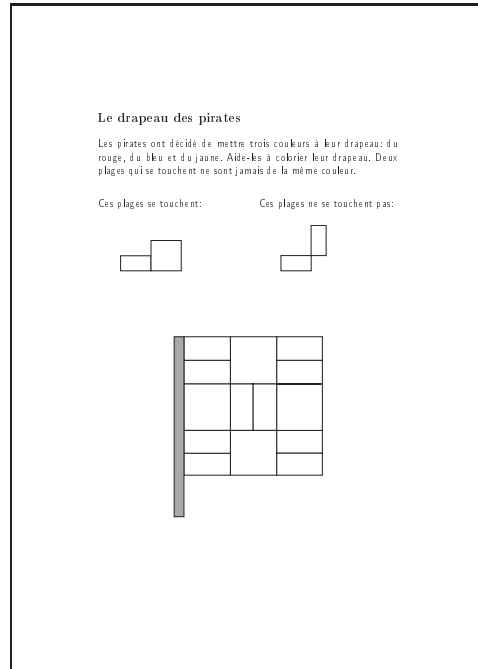
FIGURE 4.9 – Un exemple de regroupements et un exemple de partage.

Gestion du reste. La gestion du reste a été étudiée par Brun *et al.* (1994) et par Brousseau (1988) dans les opérations de division sans support dessin, les auteurs signalent que les élèves éprouvent des difficultés à comprendre que le reste doit être inférieur au diviseur. Même si le dessin facilite le partage en classes équipotentes dans le sens où il autorise l'enfant à entreprendre une représentation iconique de la quantité de perles restantes et de comparer ainsi spatialement le diviseur et le reste, les copies des élèves de 2P indiquent que cette gestion du reste est complexe et pas maîtrisée. Pour d'autres enfants, la situation de partage ne peut se concevoir avec un reste. Cette conception les amène à ne pas tenir compte du diviseur 4 et à maintenir l'exigence d'équipotentialité des collections. Trois stratégies, qui relèvent de connaissances mathématiques diverses, sont dès lors à disposition des élèves :

1. Constituer des colliers de 2 perles et maintenir ainsi le dividende exact.
2. Exécuter une division décimale et fournir alors comme réponse 5.5 (4 élèves seulement procèdent ainsi).
3. Augmenter le dividende et constituer de fait 4 colliers de 11 perles.

D'autres conduites relevées ci-dessus (cf. Procédure de partage et équipotence des classes) participent certainement également de cette conception du partage, qui est abordée dans les moyens de mathématiques de 2P par l'entremise de situations qui permettent des partages sans reste.

4.1.6 Le drapeau des pirates



Contenu mathématique

Le drapeau des pirates est un problème de coloriage d'une carte. Il fait référence à la notion de contiguïté et nécessite implicitement une logique des prédicats du premier ordre³.

Compétences visées

Les compétences visées à travers cette activité sont :

- Comprendre un énoncé
- Déduire des informations

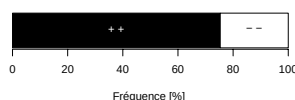
Grille de correction

Pour que le problème soit réussi, le drapeau doit être colorié avec trois couleurs et deux plages qui se touchent ne doivent jamais être de la même couleur.

3. Le calcul des prédicats du premier ordre est un langage qui parle d'objets (en l'occurrence les plages du drapeaux), des propriétés de ces objets (leur couleur : «être rouge», «être jaune», «être bleu») et des relations qui existent entre ces objets («avoir la même couleur que», «être contigu à»).

Taux de réussite

	Réussite	Echec	Total
Effectif	702	230	932
Fréquence	75%	25%	100%

**Analyse des procédures**

Comment les élèves résolvent-ils ce problème ? Comme nous ne les avons pas directement observés, il paraît fort difficile de répondre à cette question. La première idée qui nous vient à l'esprit est qu'ils ont procédé tout simplement case après case et ligne après ligne en essayant chaque fois de respecter localement les contraintes de la consigne.

Essayons de reconstituer une telle démarche. De son plumier, l'élève sort trois crayons : un rouge , un bleu  et un jaune .

Par commodité nous numérotions les plages du drapeau des pirates (voir Figure 4.10).

1	3	4	
2		5	
6	7	8	9
10	12	13	
11		14	

FIGURE 4.10 – *Le drapeau des pirates étiqueté selon l'ordre supposé du coloriage.*

1. Pour la case 1, l'élève choisit une couleur au hasard, disons le rouge.
2. Pour la case 2, l'élève a le choix entre deux couleurs : bleu et jaune. Supposons qu'il choisisse bleu (voir Figure 4.11).
3. Pour la case 3, il est obligé d'utiliser son crayon jaune.
4. Pour la case 4, il a le choix entre rouge et bleu. Supposons qu'il choisisse rouge.
5. Pour la case 5, il n'a pas le choix, il la colorie en bleu.
6. Pour la case 6, il a le choix entre rouge et jaune. Supposons qu'il choisisse rouge.
7. Pour la case 7, il n'a pas le choix, il doit la colorier en bleu.
8. Pour la case 8, il n'a pas le choix non plus, il doit la colorier en rouge.
9. Il est contraint de colorier la case 9 en jaune.
10. Pour la case 10, il a le choix entre bleu et jaune. Supposons qu'il choisisse jaune.
11. Pour la case 11, il a le choix entre rouge et bleu. Supposons qu'il choisisse rouge.

12. A ce stade, il est bloqué. Il lui faudrait une quatrième couleur. En modifiant la couleur de la case 11, ça ne changerait rien à la situation. Par contre, s'il modifiait la couleur de la case 10, il pourrait sortir de l'impasse et continuer. Nous supposons que c'est ce qu'il fait, il colorie la case 10 en bleu.
13. Il est obligé de colorier la case 12 en jaune.
14. Pour la case 13, il a le choix entre rouge et bleu. Supposons qu'il choisisse le rouge.
15. Il termine en coloriant la case 14 en bleu.

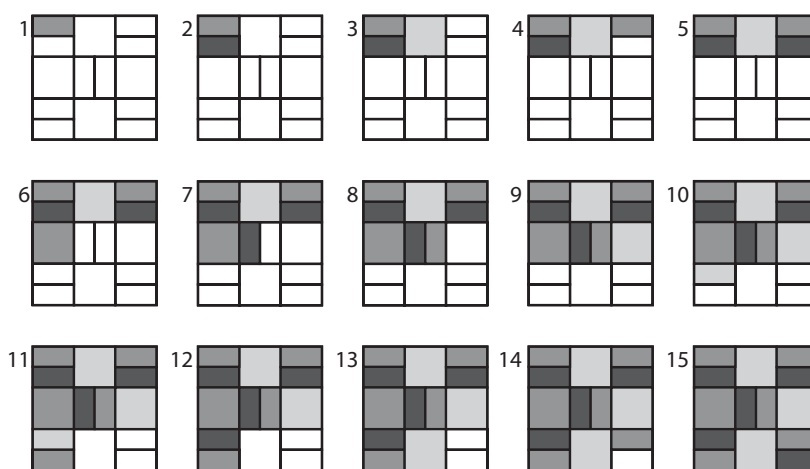
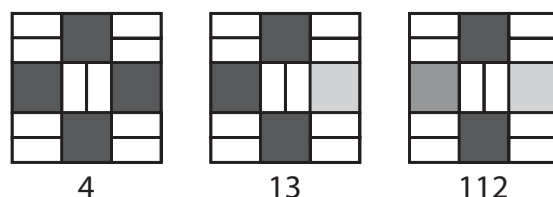


FIGURE 4.11 – *Résolution imaginaire du problème du drapeau des pirates.*

Les motifs obtenus selon cette procédure – ou n'importe quelle autre, pour autant que la solution soit juste – peuvent être répartis en trois familles. Les motifs de ces familles ont un trait commun : leurs cases 3 et 12 sont de la même couleur (les cases 7 et 8 ont forcément les deux couleurs restantes). Quant aux cases 6 et 9, soit elles ont la même couleur que les cases 3 et 12 (ces motifs formeront ce que nous nommerons la famille 4), soit l'une est de la même couleur que les cases 3 et 12 et l'autre pas (ces motifs formeront la famille 13), soit les deux ont une couleur différente de celle des cases 3 et 12 et sont différentes entre elles aussi (ces motifs formeront la famille 112) (voir Figure 4.12).

Si les élèves avaient tous résolu le problème du drapeau des pirates en appliquant la stratégie que nous venons de décrire (coloriage case après case, ligne après ligne et tirage au sort en cas d'alternative), alors nous devrions observer que les motifs se répartissent dans les familles 4, 13 et 112 dans les proportions $3/8$, $1/2$ et $1/8$ respectivement⁴.

4. En procédant de manière analogue, mais colonne après colonne, les proportions théoriques attendues sont les mêmes.

FIGURE 4.12 – *Trois familles de motifs.*

Qu'en est-il dans la réalité ? Comparons les proportions empiriques aux proportions théoriques (voir Tableau 4.3).

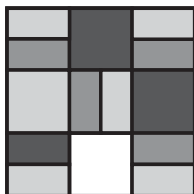
Famille	Effectif empirique	Proportion empirique	Proportion théorique
4	546	77.8%	37.5%
13	97	13.8%	50.0%
112	59	8.4%	12.5%
Total	702	100.0%	100.0%

TABLEAU 4.3 – *Répartition des différents motifs.*

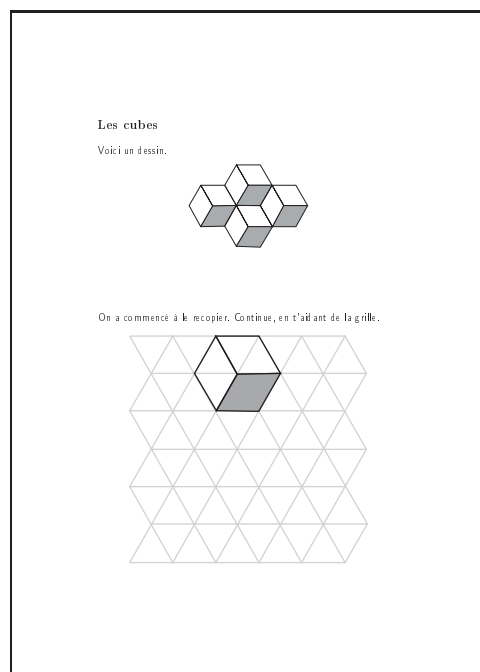
La différence entre les proportions empiriques et les proportions théoriques est statistiquement significative ($\chi^2 = 627.1$, $ddl = 2$, $p < 0.05$).

Les élèves ont donc généralement résolu ce problème différemment. Le motif 4 est très fréquent (77.8%). Cela suggère que la plupart des élèves se sont saisis de ce problème globalement et qu'ils ont été frappés par sa bonne forme. Et au lieu de colorier ce drapeau morceau après morceau en ne tenant compte que des contraintes locales, ils se sont empressés de mettre en évidence la croix formée par les cases 3, 6, 9 et 12.

Nous possédons tout de même l'indice que certains élèves ont procédé comme nous l'imaginions. Ils colorièrent 11 cases, selon notre schéma puis, ne pouvant plus continuer sans enfreindre la consigne, restèrent momentanément coincés ! Finalement ils se résolurent à laisser la case 12 blanche, et à colorier les deux dernières cases. Une cinquantaine d'élèves colorièrent le drapeau des pirates de cette manière (voir Figure 4.13).

FIGURE 4.13 – *Saut sur une impasse.*

4.1.7 Les cubes



Contenu mathématique

Les cubes fait référence à une homothétie.

Compétences visées

Ce problème consiste à :

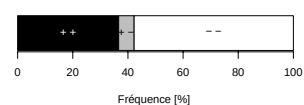
- Reproduire une figure en l'agrandissant

Grille de correction

Pour réussir le problème il faut reproduire la figure parfaitement. Pour le réussir partiellement, il ne faut qu'omettre de griser correctement les trois losanges. Dans toutes les autres situations, il est raté.

Taux de réussite

	Réussite			
	Réussite	partielle	Échec	Total
Effectif	359	55	566	980
Fréquence	37%	5%	58%	100%



Analyse des procédures

Cette tâche est difficile pour des élèves de 2P, pour deux raisons principalement.

Nous leur demandons, d'une part, de reproduire une figure plane qui semble tridimensionnelle. En effet, nombreux sont ceux qui y voient 4 cubes juxtaposés. Le titre du problème, en confortant cette impression, contribue à la confusion.

D'autre part, le dessin d'origine est à recopier dans un réseau hexagonal. Si les élèves ont une certaine familiarité des réseaux rectangulaires et carrés, les réseaux hexagonaux leur paraissent probablement plus insolites, quotidiennement on en rencontre rarement et peu de jeux de société se déroulent dans de tels réseaux, à quelques exceptions près comme le *jeu d'Hex*, *Abalone* ou *Sahara*.

Examinons les réponses des élèves. Celles-ci peuvent être réparties selon leur degré d'adéquation en 4 grandes classes (voir Tableau 4.4).

	Sans réponse	Classe				Total
		I	II	III	IV	
Effectif	40	62	252	212	414	980
Fréquence	4%	6%	26%	22%	42%	100%

TABLEAU 4.4 – *Typologie des réponses.*

Les réponses de la classe I sont des reproductions du dessin initial faites sans l'aide de la grille mise à disposition. Nous donnons dans la Figure 4.14 a l'exemple d'une telle réponse. A l'instar de Luquet (1927), nous pourrions dire que ces tracés correspondent à une attitude de *réalisme intellectuel*; les élèves ne dessinent pas ce qu'ils voient, mais ce qu'ils savent. Dans le dessin d'origine, ils voient 4 cubes. On leur demande de recopier ce dessin. Cette tâche a déjà été commencée. Un cube a été tracé. Il suffit donc d'en rajouter 3. Mais un cube, comme chacun le sait, est carré !

Les réponses de la classe II mettent en évidence une approche plus analytique. Les élèves voient dans le dessin d'origine la représentation de 4 cubes projetés ou éventuellement la reproduction de 4 motifs hexagonaux. Le dessin qu'ils doivent terminer contient déjà l'un de ces motifs. Il ne reste plus qu'à en rajouter 3. Ce qui semble important à ces élèves est de reproduire le motif élémentaire. La manière dont ces motifs sont agencés importe peu (voir Figure 4.14 b). Le nombre de motifs n'est même pas toujours pris en considération : certains élèves en représentent moins que dans l'original, d'autres plus (voir Tableau 4.5).

Les réponses de la classe III sont celles d'élèves qui ont une perception plus globale de la figure à reproduire, cette dernière constitue un tout dont le contour est capital. Ces élèves rencontrent néanmoins des difficultés à tenir compte à la fois de la structure d'ensemble et des détails. Au premier coup

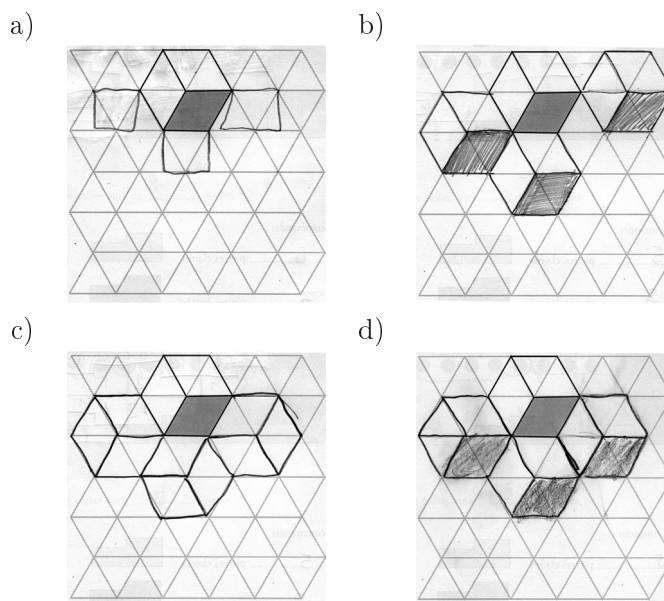


FIGURE 4.14 – Quelques solutions proposées au problème «Les cubes».

	Nombre de motifs			Total
	inférieur à 3	égal à 3	supérieur à 3	
Effectif	104	86	62	252
Fréquence	41%	34%	25%	100%

TABLEAU 4.5 – Nombre de motifs élémentaires reproduits parmi les dessins de la classe II.

d'oeil on pourrait croire que leur dessin est juste mais il y a quelques erreurs : certains traits sont en trop, d'autre manquent parfois (voir Figure 4.14 c et d).

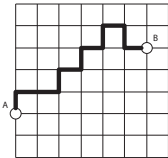
Les réponses de la classe IV sont celles d'élèves qui ont su reproduire correctement à la fois le pourtour de la figure et les détails intérieurs.

Ce genre d'activité mal réussie est vraisemblablement peu entraîné en classe. Les résultats sont donc probablement très liés au développement cognitif spontané des élèves !

4.1.8 Manhattan

Manhattan

On a dessiné un chemin pour aller de A (départ) à B (arrivée). Dessine en rouge un autre chemin, de même longueur, pour aller de A à B.



Dessine maintenant en bleu un troisième chemin pour aller de A à B, plus court que les deux premiers.



Contenu mathématique

Ce problème est une initiation au déplacement dans un réseau quadratique et à la mesure de distances de Manhattan⁵.

Compétences visées

Pour résoudre ce problème, il faut être capable de :

- Comprendre un énoncé
- Mesurer la longueur d'un chemin dans un réseau quadratique à l'aide de la longueur de la maille carrée élémentaire
- Construire un chemin plus court

Grille de correction

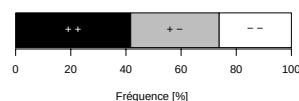
Si le chemin rouge va du point A au point B et qu'il mesure 11 segments élémentaires comme le chemin qui est déjà dessiné, nous attribuons 1 point. Si le chemin bleu va du point A au point B et qu'il mesure 9 segments élémentaires, nous attribuons 1 point aussi.

5. En mathématique, la distance de Manhattan (sic) se nomme aussi «city block» ou «métrique absolue».

Le problème est réussi si les deux chemins sont correctement tracés. Le problème n'est réussi que partiellement si un seul chemin est représenté correctement. Si aucun chemin n'est tracé correctement le problème est échoué.

Taux de réussite

	Réussite			Total
	Réussite	partielle	Échec	
Effectif	389	299	244	932
Fréquence	42%	32%	26%	100%



Analyse des procédures

L'idée de ce problème est de permettre une comparaison avec une activité courante dans les anciens moyens. Ce genre d'activité ne relève donc pas du nouveau cursus et présente ainsi un caractère de nouveauté pour l'élève. Elle vise la capacité à décoder des informations, à les comprendre afin de résoudre une situation nouvelle. *Manhattan* consiste en un chemin tracé dans un quadrillage. La longueur de ce chemin est définie par le nombre de segments-unités (les côtés des carrés du quadrillage).

Un chemin de 11 unités est déjà tracé. L'élève doit dessiner un chemin rouge de même longueur et un chemin bleu plus court, en l'occurrence 9 unités, un chemin *plus court* revenant, dans ce cas, au chemin *le plus court*.

Une des premières difficultés consiste à entrer dans le problème et à comprendre ce qui est donné puis demandé. Si c'est le cas pour tous les problèmes, il y a ici une difficulté à comprendre que le chemin est fait de segments, que chaque segment vaut un carré et que le chemin s'étend entre deux points : *A* et *B*. Si 94% des élèves sont capables de respecter le quadrillage, il n'y en a plus que 82% qui tracent un chemin partant de *A* et arrivant à *B*. Presque 10% ignorent totalement ces deux points, les autres seulement l'un des deux points mais surtout l'arrivée.

Ce qui retient l'attention lorsque l'on regarde les productions, c'est que les élèves, pour la plupart, dessinent un chemin de même longueur que le tracé en suivant celui-ci de près comme s'il y avait indifférenciation entre la longueur et la forme du tracé. Ils procèdent peut-être par correspondance terme à terme comme lorsqu'ils construisaient probablement une collection équipotente en plaçant un nouvel élément sous chaque élément de l'ensemble donné, accordant à la proximité l'argument de parité, ou peut-être exécutent-ils une translation sur une ligne inférieure.

Une autre remarque concerne l'aspect perceptif du problème : très peu d'élèves dessinent un chemin au-dessus du tracé comme si celui-ci constituait une limite ou une barrière. En ce qui concerne les erreurs les plus fréquentes, nous relevons deux chemins de même longueur soit de 9 unités (environ 20%), soit de 11 unités (également 20% environ) au lieu d'un de 11 et un de 9.

Comparativement aux élèves évalués par rapport aux anciens moyens, ce problème est nettement moins bien réussi, ce qui montre que l'entraînement à une tâche donnée provoque dans certains cas une réussite supérieure à celle d'une activité totalement nouvelle. Toutefois, le fait que deux tiers des élèves réussissent au moins partiellement une telle tâche témoigne d'une jolie compétence à aborder des problèmes nouveaux.

4.1.9 Les pavillons

Les pavillons

Voici les pavillons de 6 bateaux pirates. Entoure les pavillons qui ont autant (la même chose) de gris que de noir.

A

B

C

D

E

F

Ce pavillon a autant (la même chose) de gris que de noir. Montre-le !

Contenu mathématique

Ce problème fait référence aux notions de surface, d'aire⁶ et de transformations isométriques (translation, rotation et symétrie orthogonale).

Compétences visées

La résolution de ce problème devrait mobiliser les compétences suivantes :

- Se représenter des transformations
- Décomposer des figures
- Comparer des figures
- Comparer des aires

6. On confond parfois *surface* qui désigne un ensemble de points et *aire* qui désigne la mesure d'une surface.

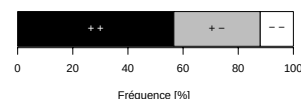
Grille de correction

A cet exercice il est possible d'obtenir un total de 7 points. Les 6 premiers s'obtiennent en entourant les pavillons A, B, D, E et F. Le septième point s'obtient en justifiant correctement l'affirmation selon laquelle l'aire grise égale l'aire noire.

La tâche est réussie si le nombre de points est supérieur ou égal à 5. Elle n'est réussie que partiellement si le nombre de points vaut 3 ou 4. Elle est échouée si le nombre de points est inférieur ou égal à 2.

Taux de réussite

	Réussite			Total
	Réussite	partielle	Échec	
Effectif	528	292	112	932
Fréquence	57%	31%	12%	100%



Analyse des procédures

Quel raisonnement faut-il faire pour savoir si la surface grise d'un pavillon a la même aire que sa surface noire ? Les 6 pavillons à examiner se répartissent, en fonction du type de raisonnement correct à effectuer, en trois classes.

La première est composée des pavillons A, B, D et F. Pour pouvoir comparer dans chacun de ces pavillons l'aire des surfaces grises à l'aire des surfaces noires il suffit de remarquer que l'image par symétrie axiale de chacune des surfaces grises est une surface noire et vice versa. Dans le pavillon F, par exemple, formé de deux triangles et de deux trapèzes, nous constatons que pour des raisons de symétrie les triangles sont égaux⁷ et les trapèzes aussi. Or comme deux surfaces égales ont la même aire, il en découle que l'aire des surfaces grises est égale à l'aire des surfaces noires. Schématiquement :

$$\begin{aligned}\text{Triangle gris} &= \text{Triangle noir} \\ \text{Trapèze gris} &= \text{Trapèze noir}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\text{Aire}(\text{Triangle gris}) &= \text{Aire}(\text{Triangle noir}) \\ \text{Aire}(\text{Trapèze gris}) &= \text{Aire}(\text{Trapèze noir})\end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned}\text{Surface}(\text{grise}) &= \text{Surface}(\text{Triangle gris}) \cup \text{Surface}(\text{Trapèze gris}) \\ \text{Surface}(\text{noire}) &= \text{Surface}(\text{Triangle noir}) \cup \text{Surface}(\text{Trapèze noir})\end{aligned}$$

Les surfaces ne se chevauchant pas, il en découle que :

7. Rappelons que deux figures sont égales si elles ont les mêmes mesures.

$$\begin{aligned}\text{Aire}(\text{grise}) &= \text{Aire}(\text{Triangle gris}) + \text{Aire}(\text{Trapèze gris}) \\ \text{Aire}(\text{noire}) &= \text{Aire}(\text{Triangle noir}) + \text{Aire}(\text{Trapèze noir})\end{aligned}$$

Finalement :

$$\text{Aire}(\text{grise}) = \text{Aire}(\text{noire}).$$

Pour les pavillons A et D, il est à peine plus difficile de juger de l'égalité des aires car l'axe de symétrie est virtuel, il n'apparaît pas comme le bord de surfaces grises et noires.

La deuxième classe est formée du pavillon E. Ce pavillon doit être décomposé en triangles élémentaires (voir Figure 4.15).

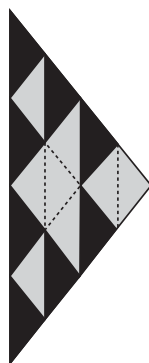


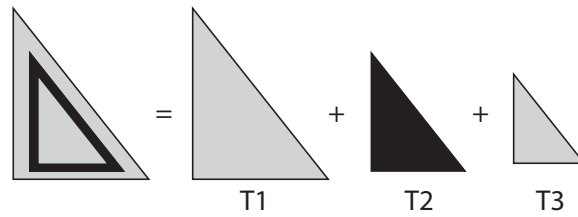
FIGURE 4.15 – Décomposition du pavillon E en triangles élémentaires.

Tous les triangles élémentaires sont égaux. Ils ont donc tous la même aire. Pour savoir si l'aire grise est égale à l'aire noire, il suffit de compter le nombre de triangles élémentaires qui composent la surface grise, ainsi que le nombre de triangles élémentaires qui composent la surface noire. Dans les deux cas, il en faut 8. Les aires grise et noire sont donc égales.

La troisième et dernière classe est formée du pavillon C. Ce pavillon est symétrique. On peut donc n'en considérer qu'une moitié. Cette moitié peut être vue comme la superposition de trois triangles : deux gris (T1 et T3) et un noir (T2) (voir Figure 4.16).

L'aire du liseré noir est égale à la différence entre l'aire du triangle T2 et celle du triangle T3. L'aire de la bordure grise est égale à la différence entre l'aire du triangle T1 et celle du triangle T2. La largeur du liseré noir est plus petite que celle de la bordure grise qui l'entoure. Ainsi l'aire de la bordure grise est plus grande que celle du liseré noir :

$$\text{Aire}(\text{T1}) - \text{Aire}(\text{T2}) > \text{Aire}(\text{T2}) - \text{Aire}(\text{T3}).$$

FIGURE 4.16 – *Reconstruction du pavillon C.*

Comme l'aire grise est la somme de l'aire de la bordure grise et du petit triangle gris intérieur (T3), il en découle que l'aire de la surface grise est plus grande que celle de la surface noire. Schématiquement :

$$\begin{aligned}
 \text{Aire(grise)} &= \text{Aire(Bordure grise)} + \text{Aire(T3)} \\
 &= \text{Aire(T1)} - \text{Aire(T2)} + \text{Aire(T3)} \\
 \text{Aire(noire)} &= \text{Aire(Liseré noir)} \\
 &= \text{Aire(T2)} - \text{Aire(T3)}
 \end{aligned}$$

Comme :

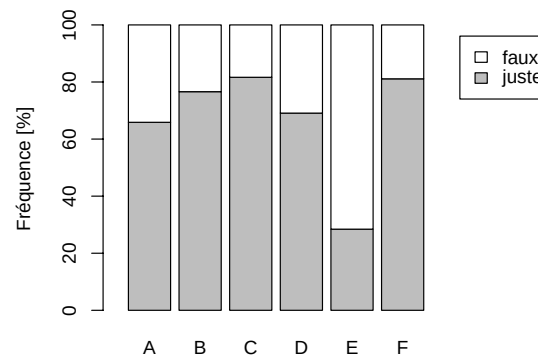
$$\text{Aire(T1)} - \text{Aire(T2)} > \text{Aire(T2)} - \text{Aire(T3)},$$

on en tire que :

$$\text{Aire(grise)} > \text{Aire(noire)}.$$

A la lumière de ce qui précède, nous comprenons que l'item le plus simple est l'item C – qui ne requiert qu'un jugement perceptif –, puis viennent les items B et F, puis les items A et D et finalement l'item E.

Ces prédictions sont corroborées par les observations (voir Figure 4.17).

FIGURE 4.17 – *Taux de réussite aux différents items du problème «Les pavillons».*

En outre, les trois profils de réponses les plus fréquents sont $\boxed{A}, \boxed{B}, C, \boxed{D}, \boxed{E}, \boxed{F}$ (11%), $\boxed{A}, \boxed{B}, C, \boxed{D}, E, \boxed{F}$ (33%) et $A, \boxed{B}, C, D, E, \boxed{F}$ (9%). Le premier pattern correspond à 6 bonnes réponses; le deuxième pattern correspond à 5 réponses justes, seul l'item le plus difficile n'est pas solutionné correctement; le troisième pattern correspond à trois bonnes réponses aux trois items les plus simples (voir Tableau 4.6).

C	F	B	D	A	E	Effectif	Fréquence
juste	juste	juste	juste	juste	juste	98	11%
juste	juste	juste	juste	juste	faux	308	33%
juste	juste	juste	faux	faux	faux	81	9%

TABLEAU 4.6 – *Profils de réponses les plus fréquents. Les items sont classés par difficulté croissante.*

Remarquons que la réponse correcte aux items A, B, D et F peut être trouvée simplement en comparant le nombre de surfaces grises au nombre de surfaces noires.

Analysons maintenant la deuxième partie du problème.

Quelques élèves ($n = 24$) ont tout bonnement nié l'égalité des aires affirmées dans l'énoncé du problème. Relevons à titre d'exemple les propos de KEV :

Non. Il y a plus de gris.

NOC aussi refuse explicitement l'égalité des aires, mais en plus il justifie sa réponse :

1 gris, 2 noir

Il y a plus de noir que de gris.

D'autres ont essayé de se convaincre de l'égalité des aires en quadrillant la figure. Mais la majorité ($n = 385$) montre qu'il est possible de décomposer le pavillon en quatre triangles élémentaires en partageant le parallélogramme gris en deux (voir Figure 4.18).

On s'aperçoit ainsi que le nombre de triangles gris est égal au nombre de triangles noirs.

Certains élèves procèdent différemment. Plusieurs proposent par exemple de déplacer un triangle noir de telle sorte que la juxtaposition de deux triangles noirs forme un parallélogramme égal au parallélogramme gris (voir Figure 4.19). Voici un échantillon de leurs explications :

VLO. Si on atache les deux noir ont optien la même chose que la form gris.

LEO. Si on rasanble le noir sa fait la maimme contiter.



FIGURE 4.18 – Construction suggérant que l'aire des deux triangles noirs est égale à celle du parallélogramme gris.



FIGURE 4.19 – Autre construction suggérant que l'aire des deux triangles noirs est égale à celle du parallélogramme gris.

Une autre construction originale que nous avons observée est reproduite dans la Figure 4.20. En intervertissant un triangle gris et un triangle noir, on voit qu'il est possible de transformer le pavillon initial en un pavillon formé uniquement de deux triangles symétriques !

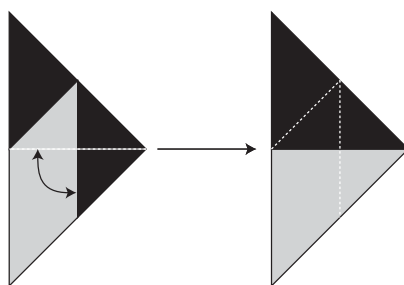
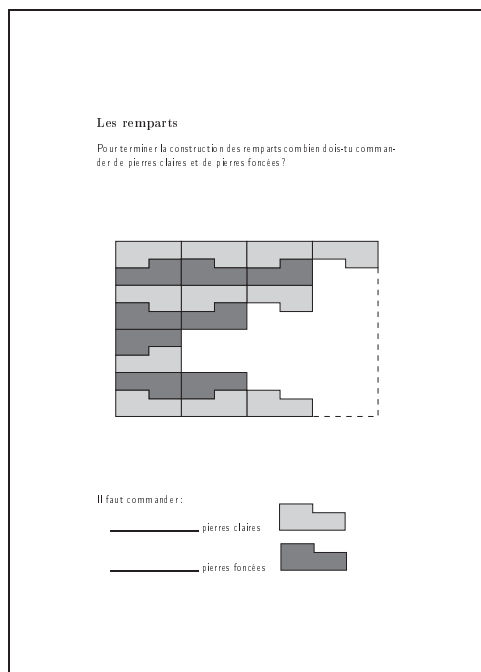


FIGURE 4.20 – Recomposition du pavillon permettant de se convaincre que l'aire grise est égale à l'aire noire.

Ces quelques exemples montrent la diversité et l'intelligence des solutions proposées par des élèves de 2P.

4.1.10 Les remparts



Contenu mathématique

Les remparts sont un problème de pavage.

Compétences visées

Pour résoudre ce problème il faut être capable de :

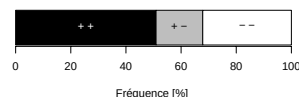
- Comprendre la structure de l'ornement en repérant les axes et les centres de symétrie
- Poursuivre la construction du pavage en rajoutant le nombre de pierres adéquat

Grille de correction

L'indication du bon nombre de pierres claires à commander rapporte 1 point, celle du bon nombre de pierres foncées aussi. Le problème est réussi si ces deux nombres sont corrects. Le problème n'est réussi que partiellement si un seul de ces deux nombres est correct. Il est échoué si aucun de ces deux nombres n'est indiqué.

Taux de réussite

	Réussite			
	Réussite	partielle	Échec	Total
Effectif	499	166	315	980
Fréquence	51%	17%	32%	100%



Analyse des procédures

Le motif du mur complété régulièrement possède deux axes de symétrie orthogonaux, l'un vertical et l'autre horizontal et donc aussi un centre de rotation d'ordre 2 (situé à l'intersection des deux axes).

Pour terminer la construction des remparts, il est judicieux d'en esquisser le plan. Il faut prolonger les trois horizontales qui définissent les quatre couches de pierres, puis les deux verticales (voir Figure 4.21).

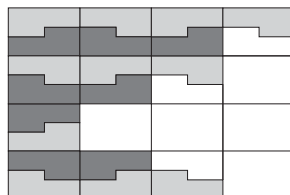


FIGURE 4.21 – *Les remparts à compléter.*

Ces constructions font apparaître une structure simple qui permet de mieux comprendre que les remparts sont un empilement régulier de rectangles tous formés d'une pierre claire et d'une pierre foncée qui s'emboîtent. A ce stade, il ne reste plus qu'à découper les rectangles élémentaires et à leur attribuer la bonne teinte.

Les élèves ont-ils véritablement procédé ainsi? Pour le savoir nous avons essayé de repérer dans chaque ébauche de solution la présence d'horizontales, de verticales et de découpes plus fines (voir Tableau 4.7).

		$\overline{D}$ (31%)		D (69%)	
		$\overline{V}$	V	$\overline{V}$	V
$\overline{H}$		214 (71%)	19 (6%)	85 (13%)	50 (7%)
H		14 (5%)	56 (18%)	28 (4%)	514 (76%)

TABLEAU 4.7 – *Éléments de construction utilisés pour terminer les remparts.* H : présence d'horizontales, $\overline{H}$: absence d'horizontale, V : présence de verticales, $\overline{V}$: absence de verticale, D : avec détails, $\overline{D}$: sans détail.

Décrivons les quatre conduites les plus fréquentes dans l'ordre de leur complexité croissante.

- $(\overline{H} \ \overline{V})\overline{D}$ La conduite la plus simple est de ne rien faire du tout (effectif : 214; proportion globale : 22%).
- $(\overline{H} \ \overline{V})D$ Une conduite à peine plus sophistiquée consiste à compléter les remparts sans plan d'ensemble, en procédant localement pierre après pierre (voir Figure 4.22) (effectif : 85; proportion globale : 9%).
- $(H \ V)\overline{D}$ Une troisième procédure consiste à ne tracer que la charpente, sans les détails (effectif : 56; proportion globale : 6%).
- $(H \ V)D$ La dernière consiste à dessiner la structure puis à compléter en ciselant les blocs rectangulaires (effectif : 514; proportion globale : 52%).

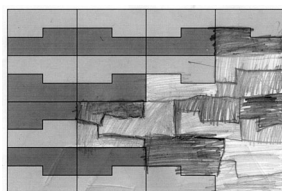


FIGURE 4.22 – *Construction des remparts sans plan d'ensemble.*

Nous constatons que généralement si un élève utilise comme éléments de construction des verticales, il utilise aussi des horizontales.

Regardons maintenant s'il existe un lien entre la procédure employée et le taux de réussite (voir Tableau 4.8).

Procédure	Réussite		
	Échec	partielle	Réussite
$(\overline{H} \ \overline{V})\overline{D}$	41%	22%	37%
$(\overline{H} \ \overline{V})D$	67%	25%	8%
$(H \ V)\overline{D}$	27%	23%	50%
$(H \ V)D$	20%	10%	70%

TABLEAU 4.8 – *Taux de réussite selon la procédure employée.*

Plus la conduite est sophistiquée, plus il y a de chance de réussir. A une exception près... Comment la conduite la plus rudimentaire $(\overline{H} \ \overline{V})\overline{D}$ qui consiste à ne faire aucune construction, peut-elle conduire aussi fréquemment au succès?

Il est possible naturellement que certains élèves soient plus clairvoyants que d'autres et arrivent mentalement à compter les pierres manquantes.

Imaginons une démarche qui ne requiert aucune construction et qui puisse conduire à la bonne solution sans surcharge cognitive.

Les remparts une fois construits se composeront de $4 \times 4 = 16$ blocs rectangulaires formés chacun d'une pierre claire et d'une pierre foncée encastées l'une dans l'autre. Il y aura donc 16 pierres claires et 16 pierres foncées. Comme 11 pierres claires et 8 pierres foncées sont déjà posées, il faut commander pour compléter l'ouvrage $16 - 11 = 5$ pierres claires et $16 - 8 = 8$ pierres foncées.

Malheureusement nous n'avons trouvé dans les copies des élèves aucune trace qui puisse étayer l'utilisation de cette élégante démarche. L'explication est probablement plus triviale !

Notons que dans certaines classes tous les élèves ont donné les bonnes réponses sans jamais faire une seule construction ! Il y a fort à parier que dans ces classes l'enseignant ait suggéré la bonne réponse. Par ailleurs nous pouvons aussi envisager que certains élèves aient tout simplement copié la solution sur leur voisin.

4.2 Analyse par domaine

Nous venons de décrire en détail comment des élèves de 2P résolvent divers problèmes mathématiques. Nous avons observé comment ils représentent un problème, quelles stratégies ils mettent en place pour le résoudre, quelles erreurs ils commettent, de quelle manière ils communiquent les résultats de leurs recherches... La vision que nous proposons est pour le moment kaléidoscopique. Dans ce paragraphe nous allons rassembler toutes les informations concernant les taux de réussite des élèves et tenterons ainsi de répondre à la première question formulée dans notre introduction à savoir «les objectifs décrits dans le plan d'étude sont-ils atteints, les compétences attendues sont-elles manifestes?».

Nous analyserons dans un premier temps les compétences mathématiques relevant du domaine numérique (Modules 2, 3 et 4 des nouveaux moyens), puis dans un deuxième temps celles relevant du domaine géométrique (Modules 5, 6 et 7).

4.2.1 Domaine numérique

Les problèmes des épreuves individuelles qui relèvent du domaine numérique sont *Carnaval*, *Petite suite*, *Quel est le plus grand?*, *Au cinéma* et *Les colliers de Louisa*. Au paragraphe 4.1, nous avons caractérisé la réussite à chacun de ces problèmes à l'aide d'une échelle ordinale à trois modalités : *Échec*, *Réussite partielle* et *Réussite*. Comment intégrer toutes les informations contenues dans la distribution d'une telle variable et pouvoir péremptoirement affirmer si oui ou non les compétences mathématiques nécessaires à la résolution d'un problème sont globalement mobilisables en situation ?

Le critère que nous avons choisi est simple. Il suffit que la proportion des élèves qui réussissent soit supérieure à la proportion de ceux qui échouent (indépendamment de ceux qui ne réussissent que partiellement). Pour disposer d'une réponse à peine plus nuancée, nous avons transformé l'échelle ordinale de réussite en une variable d'intervalle en associant à la modalité *Échec* la valeur -1 , à la modalité *Réussite partielle* la valeur 0 et à la modalité *Réussite* la valeur 1 . Ensuite nous avons calculé pour chaque problème sa réussite moyenne. Cette moyenne prend forcément sa valeur dans l'intervalle compris entre -1 et 1 . Plus cette moyenne est proche de 1 , plus les compétences impliquées sont généralement partagées. Au dessus de 0 , nous considérons que les compétences sont, au sein de la cohorte des élèves, mobilisables !

A titre d'exemple, traitons la distribution des réussites associée au problème *Carnaval*. 330 écoliers échouent (-1), 596 réussissent partiellement (0) et 986 réussissent (1). Calculons la moyenne de cette distribution :

$$\bar{x} = \frac{330 \times (-1) + 596 \times 0 + 986 \times 1}{330 + 596 + 986} = \frac{986 - 330}{1912} = \frac{656}{1912} = 0.343$$

Cette moyenne est positive, les compétences nécessaires à la résolution de ce problème sont mobilisables par la majorité. Les écoliers romands sont donc capables de dénombrer de relativement grandes collections d'objets et savent comparer deux nombres entiers !

Pour les autres problèmes du domaine numérique, les calculs sont résumés dans le Tableau 4.9 (voir également la Figure 4.23).

Problème	Réussite Moyenne	Intervalle de confiance à 95%
Carnaval	0.343	[0.309; 0.177]
Petite suite	0.562	[0.533; 0.590]
Quel est le plus grand?	0.642	[0.615; 0.670]
Au cinéma	0.478	[0.453; 0.502]
Les colliers de Louisa	0.412	[0.355; 0.469]

TABLEAU 4.9 – *Réussite des problèmes du domaine numérique.*

Globalement nous pouvons affirmer que bien des connaissances nécessaires à la résolution des problèmes relevant du domaine numérique sont assimilées. Pour la plupart des élèves le temps de sensibilisation est révolu, la période de consolidation est entamée. Les élèves sont ainsi en majorité capables de :

- Dénombrer une collection
- Comparer des nombres entiers
- Compléter une séquence de la suite numérique
- Décomposer des nombres en centaines, dizaines et unités

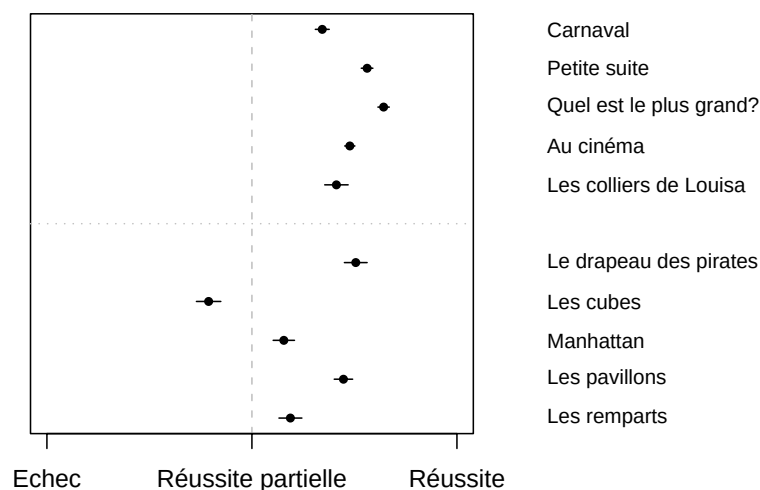


FIGURE 4.23 – Résultats aux problèmes du domaine numérique en haut et aux problèmes du domaine géométrique en bas. Sont représentées les réussites moyennes (•) ainsi que les intervalles de confiance à 95% (-).

- Reconnaître la valeur positionnelle des chiffres
- Résoudre des problèmes simples en utilisant des écritures additives et soustractives

Et dans une moindre mesure de :

- Partager une collection

Ces résultats sont le signe de l'importance qu'accordent les enseignants à ces connaissances arithmétiques de base et du très grand travail qu'ils ont réalisé dans leur classe pour que les élèves se les approprient.

4.2.2 Domaine géométrique

Les problèmes des épreuves individuelles qui relèvent du domaine géométrique sont *Le drapeau des pirates*, *Les cubes*, *Manhattan*, *Les pavillons* et *Les remparts*. Caractérisons la réussite à ces problèmes comme précédemment (voir Tableau 4.10 et Figure 4.23).

De manière générale, nous voyons que les tâches géométriques sont moins bien réussies que les tâches arithmétiques. L'une d'entre elles, même, ne franchit pas le seuil de la *Réussite partielle* (la réussite moyenne du problème

Problème	Réussite Moyenne	Intervalle de confiance à 95%
Le drapeau des pirates	0.506	[0.451; 0.562]
Les cubes	-0.211	[-0.271; -0.152]
Manhattan	0.156	[0.104; 0.208]
Les pavillons	0.446	[0.401; 0.491]
Les remparts	0.188	[0.131; 0.244]

TABLEAU 4.10 – Réussite des problèmes du domaine géométrie.

Domaine	Moyenne	Écart-type
Numérique	0.487	0.118
Géométrie	0.217	0.285

TABLEAU 4.11 – Moyenne et écart-type des réussites selon les domaines.

Les cubes est négative). Non seulement ces tâches sont moins bien réussies mais la variabilité de leur réussite est plus grande aussi (voir Tableau 4.11).

Il est possible que les tâches que nous avons proposées pour investiguer les compétences géométriques soient plus en décalage avec les problèmes des nouveaux moyens que celles que nous avons utilisées pour sonder le domaine numérique. Mais nous pensons que cette différence est due plutôt à la manière dont les enseignants organisent et planifient les activités mathématiques au cours de l'année. En conformité au fil rouge des nouveaux moyens, beaucoup commencent par proposer des problèmes pour approcher le nombre et lui donner sens (Module 1) et des problèmes pour connaître l'addition (Module 2) et n'abordent des problèmes pour explorer et organiser l'espace (Module 5), des problèmes pour approcher les figures géométriques et les transformations de plan (Module 6) ou des problèmes pour mesurer (Module 7) que durant la seconde partie de l'année.

Dans ces conditions il est normal d'observer de moins bons résultats dans le domaine géométrique, les élèves ayant tout bonnement moins travaillé ce champ des mathématiques, il leur est forcément moins familier. La variabilité des réussites s'explique par le fait que si en effet beaucoup d'enseignants repoussent le traitement des modules géométriques en fin d'année, certains – comme la méthodologie l'encourage aussi – choisissent un autre cheminement et proposent plus tôt des problèmes ayant trait à la géométrie. Quoi qu'il en soit, et malgré un investissement moindre (découlant probablement aussi du plus petit nombre d'activités proposées dans le domaine géométrique), nous pouvons affirmer que les écoliers romands savent dans des situations simples :

- Découvrir des invariants
- Se représenter des transformations

- Construire un pavage
- Comparer des mesures

Chapitre 5

Compétences collectives

Beaucoup d’activités des nouveaux moyens sont prévues pour être réalisées à deux. C’est pour cette raison que nous avons aussi concocté des épreuves collectives. Ces épreuves ont toujours été passées à deux ou à trois, elles ne nous permettent donc d’évaluer que des compétences distribuées¹ ! Établissons selon le même schéma que précédemment un panorama de ces compétences !

5.1 Analyse item par item

5.1.1 Les mouches de Hébus

Les mouches de Hébus

Hébus est un troll. Comme tous les trolls, il est absolument dégoûtant. Un nuage de mouches le suit donc en permanence. Chaque matin son ami Lanfeust lui pose quatre questions afin d'estimer le nombre de mouches qui lui tourment autour. Lanfeust propose un nombre et Hébus répond en lui disant s'il est trop grand, trop petit ou si c'est le nombre exact.

lundi matin

- Lanfeust propose 78, Hébus répond trop grand.
- Lanfeust propose 29, Hébus répond trop grand.
- Lanfeust propose 17, Hébus répond trop grand.
- Lanfeust propose 6, Hébus répond trop grand.

Combien y a-t-il de mouches qui volent autour de Hébus ce matin ?
Énumérez toutes les possibilités ?

mardi matin

Proposition de Lanfeust	Réponse de Hébus
45	trop grand
23	trop petit
39	trop grand
27	trop petit

Combien y a-t-il de mouches qui volent autour de Hébus ce matin ?
Énumérez toutes les possibilités ?



1. Si nous avions voulu évaluer l'apport spécifique du travail collectif, il aurait fallu aussi demander à des élèves de résoudre ces problèmes de manière individuelle.

Contenu mathématique

Les mouches de Hébus fait référence à la relation d'ordre qui existe dans $\mathbb{N}$ ainsi qu'aux notions de minorant, de majorant, de bornes inférieure et supérieure.

Compétences visées

Pour résoudre ce problème, il faut être capable de :

- Comprendre un énoncé
- Faire des hypothèses et les vérifier
- Chercher un ensemble de solutions
- Comprendre et utiliser l'ordre qui existe dans l'ensemble des entiers naturels pour approximer un ensemble de nombres

Grille de correction

Ce problème est formé de deux parties (*lundi matin* et *mardi matin*) qui s'évaluent chacune de la même manière.

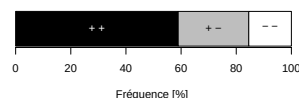
Soit $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ l'ensemble ordonné des réponses correctes à l'une des deux parties. Supposons que les réponses fournies soient les éléments de l'ensemble $\{y_1, \dots, y_j, \dots, y_m\}$, les y_j sont également ordonnés.

Si $x_1 \leq y_1$ et $y_m \leq x_n$, alors nous attribuons 1 point. Si en plus la liste des réponses est exhaustive (*i.e.* $m = n$), nous attribuons un point supplémentaire.

Il est donc possible d'obtenir à ce problème un maximum de 4 points. Le problème est réussi si le nombre de points obtenus vaut 3 ou 4. Le problème est réussi partiellement si le nombre de points obtenus vaut 2. Sinon, il est raté.

Taux de réussite

	Réussite			Total
	Réussite	partielle	Échec	
Effectif	267	116	70	453
Fréquence	59%	26%	15%	100%



Analyse des procédures

Le problème relève de la compréhension de la suite ordinale des nombres et de la relation *plus grand* ou *plus petit* et fait appel à la notion d'intervalle numérique. Les différentes propositions avancées par Lanfeust et commentées par Hébus constituent des indices qui permettent de préciser l'intervalle numérique et ses bornes. La caractéristique de cette tâche consiste à mettre

en oeuvre ces connaissances numériques et à coordonner les informations reçues pour obtenir une solution qui est composée de plusieurs réponses numériques. La première partie du problème (*lundi matin*) décline une suite ordonnée et décroissante de majorants, rétrécissant à chaque proposition l'intervalle possible, la borne inférieure pouvant se situer à 0 ou à 1. La deuxième partie du problème (*mardi matin*), présente quant à elle deux majorants et deux minorants, le premier couple définissant un intervalle plus grand que le deuxième.

Dans l'ensemble des réponses les notions *trop grand*, ou *trop petit* sont bien comprises par les élèves. Rares sont les élèves qui proposent des nombres plus petits que ceux jugés trop petits et plus grands que ceux jugés trop grands. Les difficultés portent par contre sur le choix des bornes et la composition de l'intervalle.

Choix des bornes. Dans la partie 1 du problème (*lundi matin*), nous constatons que l'expression du 0 dans l'intervalle numérique n'est pas très présente; elle nécessite un raisonnement purement mathématique et fait état d'une plus grande abstraction face à la situation concrète que le problème peut représenter. Nous avons également trouvé un élève qui contestait la présence possible du nombre 1 comme réponse, en vertu du relevé orthographique de «combien de mouches» qui a un *s*, il ne peut pas y avoir qu'une seule mouche. Les autres élèves qui ont omis le chiffre 1 dans l'écriture de nombres composant l'intervalle ont peut-être également suivi ce raisonnement, mais nous ne pouvons l'affirmer.

Le choix des bornes inférieure et supérieure dans le problème *mardi matin* semble relativement difficile. Les élèves proposent une suite complète de nombres comprise entre des bornes incorrectes. Les intervalles ainsi créés peuvent être les suivants :

- Intervalle entre les deux majorants, à savoir entre 39 et 45
- Intervalle entre les deux minorants à savoir entre 23 et 27
- Intervalle entre un minorant (23 ou 27) et un majorant (39 ou 45)

Composition de l'intervalle. Les élèves énumèrent une suite ordonnée de nombres qui n'est pas nécessairement complète, ou indiquent quelques nombres qui se situent dans l'intervalle correct. A titre d'exemple, voici la réponse de MUT à la deuxième partie du problème (*mardi matin*) :

30 et 29

il y a 27 et c'est trop petit et alors on a fait 30 et pour trouver le 29 il

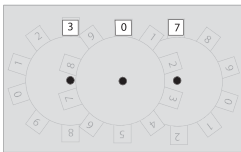
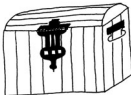
y avait 39 c'est trop gros et alors on a fait 29.

Cette suite numérique se situe fréquemment à l'intérieur d'une dizaine, sans passage à la dizaine supérieure ou inférieure. Sans incriminer uniquement leur compétence dans le passage de la dizaine, d'autres facteurs, tels

que la taille de l'intervalle et l'écriture exhaustive² de cette suite numérique entrent en jeu, ces réponses montrent une coordination des connaissances encore hésitante voire balbutiante pour certains élèves.

D'autres procédures qui pourraient relever de connaissances plus primitives consistent à considérer chaque nombre donné par Lanfeust comme une borne supérieure ou une borne inférieure. Le problème ainsi réinterprété consiste alors à trouver après chaque échange entre Lanfeust et Hébus le plus grand des éléments majorés ou le plus petits des éléments minorés. Selon cette procédure les réponses fournies à la deuxième partie du problème sont : 44, 24, 38 et 28. Dans ce type de réponses, le problème est ainsi dessaisi de l'objet mathématique qu'il donnait à rencontrer, les élèves montrant leur non-maîtrise de la notion d'intervalle.

5.1.2 La combinaison secrète

La combinaison secrète Le coffre dans lequel se trouve le trésor est cadenassé. La bonne combinaison peut être obtenue en modifiant la position de chacune des 3 roulettes sur lesquelles sont inscrits les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Initialement la combinaison est la suivante :  A partir de la combinaison initiale (307), tournez chaque roulette de trois crans dans un sens ou dans l'autre pour obtenir le plus grand nombre possible. Écrivez ce nombre :	Toujours à partir de la combinaison initiale (307), tournez chaque roulette de trois crans dans un sens ou dans l'autre pour obtenir le plus petit nombre possible. Écrivez ce nombre : 
--	---

Contenu mathématique

La combinaison secrète fait appel aux propriétés de l'ensemble ordonné des entiers naturels et de leur écriture dans le système décimal.

2. Nous devons noter à ce sujet que peu d'élèves inscrivent leur réponse sous une forme condensée comme «28 – 38» ou «tous les nombres de 28 à 38». Pourtant l'exhaustivité a un coût d'écriture certain, et ce d'autant plus lorsqu'on trouve certaines copies où les élèves ont écrit 11 fois la réponse littérale du type «il en na 28 qui volent autour de la tête».

Compétences visées

Pour résoudre ce problème, il faut être capable de :

- Comprendre un énoncé
- Lire le schéma d'un mécanisme et s'imaginer son fonctionnement
- Reconnaître la valeur positionnelle des chiffres
- Décomposer un nombre en centaines, dizaines et unités

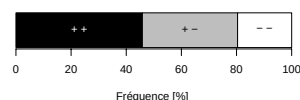
Grille de correction

A ce problème, il faut trouver deux nombres qui s'écrivent chacun avec trois chiffres. Chaque chiffre correctement placé rapporte 1 point.

Le problème est réussi si le nombre total de points vaut 5 ou 6. Il est réussi partiellement si le nombre de points vaut 2, 3 ou 4. Sinon il est raté.

Taux de réussite

	Réussite			Total
	Réussite	partielle	Échec	
Effectif	215	162	92	469
Fréquence	46%	34%	20%	100%



Analyse des procédures

Les roues du coffre ne peuvent être tournées que de trois crans dans un sens ou dans l'autre. En première position, ne peuvent donc apparaître que les chiffres 0 ou 6. En deuxième position, ne peuvent apparaître que les chiffres 3 ou 7. En troisième et dernière position ne peuvent apparaître que les chiffres 0 et 4. Parmi les chiffres pouvant apparaître après manipulation du mécanisme, 4 sont visibles, 2 sont cachés. Ces derniers sont forcément plus difficilement accessibles.

Centaines		Dizaines		Unités	
0	6	7	3	4	0
visible	caché	visible	visible	caché	visible

Pour répondre correctement à la première question (former le nombre le plus grand possible, *i.e.* 674), il faut utiliser deux nombres cachés; alors que pour répondre correctement à la deuxième question (former le nombre le plus petit possible, *i.e.* 030), il n'y en a besoin d'aucun. La première partie du problème est donc beaucoup plus difficile et devrait être moins bien réussie. C'est exactement ce que nous observons ($\chi^2 = 4.99$, $ddl = 1$, $p < 0.05$) (voir Tableau 5.1).

Pour la première combinaison, les réponses fausses les plus fréquentes sont 630 (7%), 730 (3%), 670 (3%) et 634 (2%). Pour la seconde, ce sont les combinaisons 034 (8%), 074 (5%) et 037 (2%).

Réponse	1 ^{re} combinaison	2 ^e combinaison
Juste	192 (41%)	226 (48%)
Fausse	277 (59%)	243 (52%)
Total	469 (100%)	469 (100%)

TABLEAU 5.1 – *Taux de réussite aux deux parties du problème.*

5.1.3 La pyramide

La pyramide

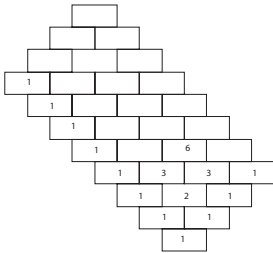
Dans cet empilement une brique posée sur deux autres briques porte la somme des nombres notés dans ces deux briques.

Par exemple :





Complétez.



Contenu mathématique

La pyramide fait référence aux propriétés du monoïde $(\mathbb{N}, +)$.

Compétences visées

La résolution de ce problème requiert les compétences suivantes :

- Comprendre un énoncé
- Additionner des nombres

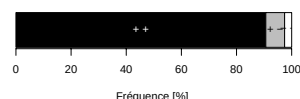
Grille de correction

Il y a en tout 17 sommes à calculer. Chaque somme correcte vaut 1 point, chaque erreur n'est pénalisée qu'une fois.

Le problème est réussi, si 14 réponses au moins sont justes. Le problème est réussi partiellement si le nombre de réponses correctes est compris entre 4 et 13. Il est raté sinon.

Taux de réussite

	Réussite	Réussite partielle	Échec	Total
Effectif	425	32	12	469
Fréquence	90%	7%	3%	100%



Analyse des procédures

Le problème soulevé par *La pyramide* consiste à comprendre une petite structure additive présentée sous forme de pyramide. Deux exemples de deux étages doivent être interprétés et transférés sur une structure plus grande qui en comporte onze. La structure pyramidale consiste à additionner deux nombres d'un étage et d'en porter l'addition sur l'étage supérieur.

L'élève peut se limiter à produire des additions successives par une méthode de proche en proche, mais il peut aussi observer les régularités de la structure et les reproduire ou s'en servir comme mode de contrôle. Ainsi, la colonne oblique de gauche ne comporte que le nombre 1; celle qui lui est adjacente comporte la suite des nombres itérés 1, 2, 3, ...; la suivante comporte des sauts réguliers : +2, +3, +4, ...

Presque tous les élèves réussissent cette tâche : 90% totalement et encore 7% partiellement. Ce score considérable pour une question relativement difficile vient de ce que les élèves ont eu plusieurs fois l'occasion de pratiquer une tâche similaire. En effet, deux situations, *Toujours plus haut* et *Murs pour dix* présentent des pyramides. Le problème proposé par MATHÉVAL diffère en ce sens que la pyramide comporte beaucoup plus d'étages mais ne demande, pour être remplie, que des additions successives alors que celles des situations scolaires sont plus petites mais obligent l'élève à des décompositions en plus des additions.

On observe deux grands types d'erreurs : des erreurs de calcul et des erreurs de procédure. Dans le cas des erreurs de calcul, c'est le plus souvent l'addition des grands nombres qui est la cause de difficulté. Au lieu d'additionner grâce au calcul réfléchi, les élèves s'essaient à l'algorithme en colonnes mais ne le maîtrisent pas. On trouve ainsi cet exemple très caractéristique $36 + 85$ donne 1111 car l'addition des unités $6 + 5$ fait 11 et l'addition des dizaines $3 + 8$ vaut aussi 11. La juxtaposition des deux sommes donne donc 1111.

En ce qui concerne les erreurs de procédure, ce sont peut-être ces tâches scolaires qui ont eu un effet perturbateur, car plusieurs élèves remplissent leur pyramide selon une méthode mixte. Ils décident d'un nombre dans la case supérieure puis descendent en décomposant sur deux ou trois étages mais additionnent *normalement* dans les étages inférieurs (voir Figure 5.1).

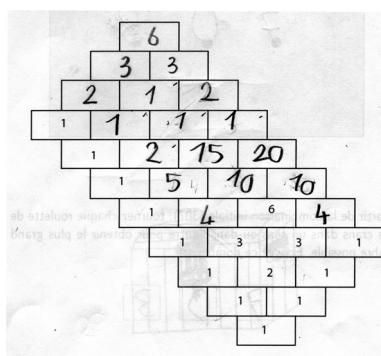


FIGURE 5.1 – *Influence perturbatrice de tâches scolaires sur la résolution de «La pyramide».*

D'autres élèves essaient aussi, malencontreusement, de reproduire une série sur les colonnes obliques : répétition du 1 sur la 2^e colonne depuis la gauche ou addition correcte sur le 5^e étage ($1 + 3 = 4$) puis répétition du 4 sur cette 2^e colonne.

Nous pouvons être satisfaits du niveau de cette réussite, mais il est dommage que l'algorithme d'addition soit déjà enseigné en 2P. Certes, la plupart des élèves se débrouillent bien avec des nombres qui dépassent la centaine, mais il ne faut pas oublier que ce problème se résolvait à deux. Et cet algorithme profite probablement essentiellement aux élèves qui n'éprouvent pas de difficulté en mathématiques et plus particulièrement dans la construction du nombre (cf. $36 + 85$ qui donne 1111).

5.1.4 Les bonbons

Les bonbons

Jacques a dans ses poches 13 bonbons. Certains sont des sugus, d'autres sont des malabars, d'autres encore sont des caramels. Il a 3 malabars. Des sugus, il en a moins. Des caramels, il en a plus. Combien Jacques a-t-il de sugus et de caramels dans ses poches ? Il y a deux réponses possibles, donnez-les !

Réponse 1 : _____ sugus et _____ caramels.

Réponse 2 : _____ sugus et _____ caramels.

Contenu mathématique

Les bonbons est un problème qui fait à nouveau référence aux propriétés du monoïde $(\mathbb{N}, +)$.

Compétences visées

Pour résoudre ce problème il faut être capable de :

- Comprendre un énoncé
- Mettre en application une stratégie de résolution
- Décomposer un nombre en trois termes de plusieurs façons

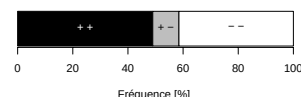
Grille de correction

Une réponse est un couple formé du nombre de sugus et du nombre de caramels.

Le problème est réussi si les deux réponses (*i.e.* les deux couples) sont justes. Si une seule réponse est correcte, le problème n'est réussi que partiellement. Si aucune réponse n'est juste, le problème est échoué.

Taux de réussite

	Réussite			Total
	Réussite	partielle	Échec	
Effectif	222	43	188	453
Fréquence	49%	10%	41%	100%

**Analyse des procédures**

L'intérêt et la difficulté de ce problème tiennent à ce qu'il se situe entre numération et partage inégal (décomposition de 13 en trois facteurs). La consigne est complexe et la résolution suppose la prise en charge de plusieurs données : il faut trouver les deux valeurs plus petites que 3 et trouver pour chaque cas le complémentaire à 13 en tenant compte des valeurs trouvées plus la valeur donnée : 3 malabars.

La plupart des élèves qui résolvent correctement ce problème (49%) ne laissent pas de trace de leur démarche. Ceux qui dessinent (9%) ont plus de peine et, en général, leur dessin ne sert à répondre correctement qu'à l'une des deux solutions. Notons que le pourcentage d'élèves qui dessinent ici est plus grand que ceux qui le font pour les problèmes additifs. D'autres (14%) recourent à l'écriture d'une opération.

Les élèves qui se trompent partiellement ou totalement ont souvent de la peine à tenir compte de toutes les contraintes. Nombre d'entre eux trouvent les nombres corrects de sugus mais n'arrivent pas à calculer correctement le nombre de caramels. Certains décomposent 13 ou 10 ($13 - 3$) en deux facteurs mais sans tenir compte qu'il faut moins de sugus que de malabars.

Beaucoup de cahiers présentent une consigne où 13 est entouré et où 3 malabars est souligné. On peut probablement y voir l'intervention de l'enseignant qui a repéré cette difficulté des élèves à tenir compte de tous les aspects du problème.

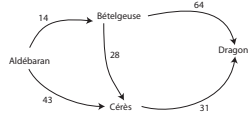
5.1.5 Le voyageur de commerce intergalactique

Le voyageur de commerce intergalactique

Gaston est un voyageur de commerce intergalactique. Il habite Aldébaran et doit se rendre sur la planète du Dragon. Voici la durée des vols spatiaux à sa disposition :

Départ	Arrivée	Durée en heures
Aldébaran	Bételgeuse	14
Aldébaran	Cérés	43
Bételgeuse	Cérés	28
Bételgeuse	Dragon	64
Cérés	Dragon	31

Quel itinéraire doit-il emprunter pour se rendre au plus vite sur la planète du Dragon ?





Réponse : La durée du trajet le plus court est de _____ heures.

Contenu mathématique

Le voyageur de commerce intergalactique fait référence à la notion de graphe pondéré.

Compétences visées

Pour résoudre ce problème, il faut être capable de :

- Lire un horaire et un graphique
- Combiner des informations
- Explorer un ensemble de possibilités
- Faire des additions
- Comparer des nombres entiers

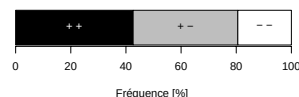
Grille de correction

Si l'itinéraire à emprunter pour se rendre le plus rapidement d'Aldébaran à la planète du Dragon est indiqué, nous attribuons 1 point. Si la durée du trajet est calculée, nous attribuons 1 point également.

Le problème est réussi si le nombre de points total vaut 2. Il n'est réussi que partiellement si le nombre total de points vaut 1. Il est raté dans le cas où le total vaut 0.

Taux de réussite

	Réussite			Total
	Réussite	partielle	Échec	
Effectif	193	172	88	453
Fréquence	43%	38%	19%	100%



Analyse des procédures

Envisager différents cheminements possibles entre deux points, composer des durées et comparer les résultats pour chaque itinéraire prévu sont les différentes compétences que la résolution du problème exige. Il mobilise de fait les connaissances se référant au champ conceptuel de l'addition tel que l'a défini Vergnaud (1991b) et à la représentation spatiale.

Les réponses données, qu'elles soient justes ou fausses sont issues de calculs que les élèves ont soit opérés mentalement³ et dont on ne trouve aucune trace sur les copies, soit font l'objet d'opérations écrites. Celles-ci prennent la forme d'opération d'addition en ligne ou en colonnes et pour quelques rares travaux d'un tableau de décomposition numérique *dizaines-unités* faisant ainsi état de procédures algorithmiques diverses.

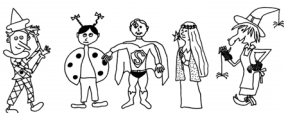
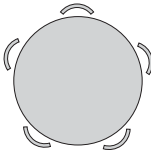
L'addition en colonnes ne se révèle pas garante de la bonne exécution de l'algorithme de l'addition. Des erreurs portant sur la retenue sont assez fréquentes, d'autres erreurs de comptage peuvent apparaître. D'autres modes de résolution, qui semblent refléter des pratiques propres à certaines classes indiquent que les élèves additionnent au moyen de représentations iconiques de la quantité avec un regroupement en base dix. D'autres modes de résolution font état de procédures idiosyncrasiques pertinentes pour l'addition.

Certaines erreurs proviennent d'une interprétation particulière de la demande. Certains élèves ont ainsi interprété le problème comme une demande de trouver l'itinéraire entre Aldébaran et la planète du Dragon comprenant l'étape la plus courte. Plusieurs tracés du voyage effectué dans l'espace indiquent en effet que les élèves mentionnent non pas la somme des durées des trajets parcourus, mais la plus courte étape dans l'itinéraire choisi. Selon cette procédure, les élèves ayant choisi de passer d'Aldébaran à la planète du Dragon en passant par Bételgeuse, répondent 14 heures (3%). Alors que ceux ayant choisi de passer par Cérès répondent 31 heures (6%).

Nous ne trouvons que quelques rares enfants qui optent pour un trajet en zigzag qui aurait pour stations intermédiaires Cérès puis Bételgeuse. Si l'orientation des flèches du diagramme a sans aucun doute incité les élèves à choisir les trajets les plus unidirectionnels (Aldébaran – Bételgeuse – Dragon ou Aldébaran – Bételgeuse – Dragon), l'addition de grands nombres qu'aurait occasionné un trajet moins direct a un effet également réhibitoire pour les élèves.

3. Parfois les enfants signalent «On a conter».

5.1.6 Le goûter

Le goûter Cinq enfants – Julie, Mélanie, Lili, Frank et Rachid – ont pris place autour d'une table pour le goûter. Ils se sont déguisés. Julie a Pinocchio à sa gauche et la coccinelle à sa droite. Mélanie la fée s'est assise entre Superman et la coccinelle. Superman est assis à côté de Frank. Frank est placé entre Rachid et la sorcière. Lili mange une tartinette au miel. Placez chaque enfant autour de la table et écrivez son nom. 	
---	--

Contenu mathématique

Le goûter fait principalement appel à des notions élémentaires de logique appliquées à un agencement spatial rudimentaire.

Compétences visées

Ce problème requiert les compétences suivantes :

- Comprendre un énoncé
- Tirer des informations
- Faire des déductions
- Maîtriser les relations spatiales

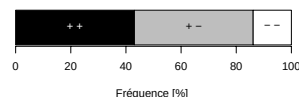
Grille de correction

Nous comptons le nombre de coïncidences maximal entre la réponse fournie et la bonne réponse.

Le problème est réussi, si le nombre de coïncidences vaut 4 ou 5. Il n'est réussi que partiellement si ce nombre vaut 2 ou 3. Sinon il est raté.

Taux de réussite

	Réussite			Total
	Réussite	partielle	Échec	
Effectif	202	202	65	469
Fréquence	43%	43%	14%	100%



Analyse des procédures

Les nouveaux moyens ont renoncé à un module intitulé *logique* et ont préféré l'appellation : *des problèmes pour conduire un raisonnement*. Le contenu de ce module est donc constitué de problèmes dont la résolution suppose des compétences transversales et où l'accent est mis sur les démarches. Celles-ci supposent un ensemble de connaissances et d'instruments élaborés grâce aux apprentissages effectués dans des modules plus spécifiques et plus ciblés. Les activités qui y sont proposées font essentiellement appel au traitement de l'information et au développement de stratégies de recherche. Elles ont l'avantage d'être référées aux notions et aux méthodes de la logique élémentaire non en tant qu'objets mathématiques, comme c'était le cas dans les moyens des années 70, mais en tant qu'outils au service de la pensée.

Dans cette optique, MATHÉVAL a proposé aux élèves un problème relativement complexe du point de vue de la consigne qui comporte un grand nombre d'informations à gérer. Celles-ci concernent notamment les relations spatiales (positions relatives) et les correspondances entre un ensemble de prénoms et un ensemble de déguisements. Elles se singularisent par le fait qu'elles ne font aucunement appel au nombre.

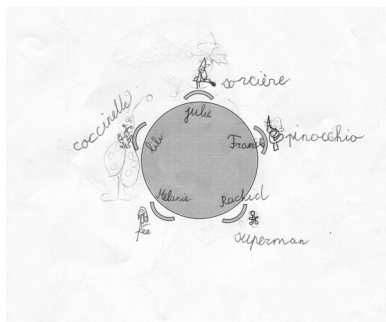
L'*effet énigme* de ce problème (en ce sens qu'il est composé d'une suite de propositions à traiter et à mettre en relation et qu'il permet la vérification de la solution) est atténué par l'enchaînement des propositions : un élément d'une phrase est repris dans la phrase suivante. Seule la dernière proposition échappe à cette logique : elle n'a d'autre incidence que de rappeler la présence du cinquième enfant, Lili.

L'ambiguïté relative à la position du spectateur pour juger de qui est à droite ou qui est à gauche est levée par la précision apportée : on n'a pas «Pinocchio est à *gauche* de Julie» mais «Julie a Pinocchio à *sa gauche*». Mais, si l'ambiguïté est levée, l'expression et sa représentation sont plus complexes, impliquant la mise à distance de son propre point de vue pour se mettre à la place d'autrui, opération mentale encore en élaboration à 7–8 ans. De plus, si Julie est placée en bas du dessin de la table, sa droite correspond à la droite du dessin. Mais si Julie est placée en haut, ce qui est le cas le plus fréquent, alors la droite de Julie est à gauche sur le dessin.

Un élève sur cinq environ réussit à résoudre l'énigme en tenant compte de la relation «avoir à sa droite» et «avoir à sa gauche». En revanche 42% des élèves sont capables de donner une configuration sans contradiction en

optant soit pour la relation «avoir à sa gauche» et «avoir à sa droite» soit pour la relation «être à gauche de» ou «être à droite de». Dans ce dernier cas, les réponses sont nettement plus nombreuses, les élèves se situant comme *spectateurs externes*, au lieu de se placer mentalement à la place des enfants autour de la table (voir Figure 5.2 a et b).

a)



b)

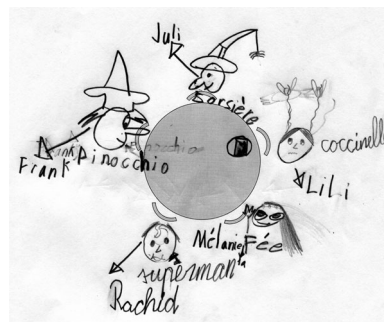
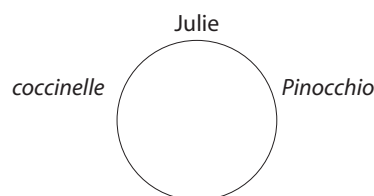


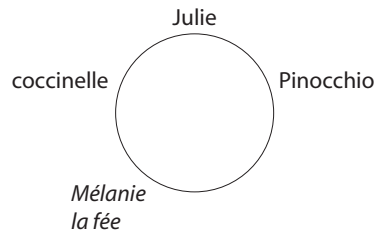
FIGURE 5.2 – Deux exemples représentatifs : (a) le premier respectant la relation «avoir à sa droite (ou à sa gauche)» et (b) le second répondant la relation «être à droite (ou à gauche) de».

Mis à part le problème de position relative des éléments, l'énigme consiste à réfléchir sur chaque proposition successive, à décider de l'élément à placer, puis à reconsidérer l'ensemble des propositions pour en évacuer les possibles contradictions. Cette difficulté est accrue par le fait que les propositions présentent tour à tour le nom de l'enfant ou le déguisement.

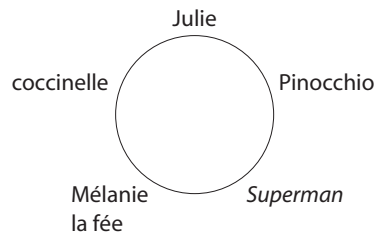
Par exemple, lorsque Julie est placée, avec Pinocchio à sa gauche (à droite de la configuration) et la coccinelle de l'autre côté, on passe à la deuxième proposition.



«Mélania la fée est assise entre Superman et la coccinelle» : il s'agit de placer Mélanie juste à la droite de la coccinelle sinon la relation «... est assise entre ...» n'est pas respectée.

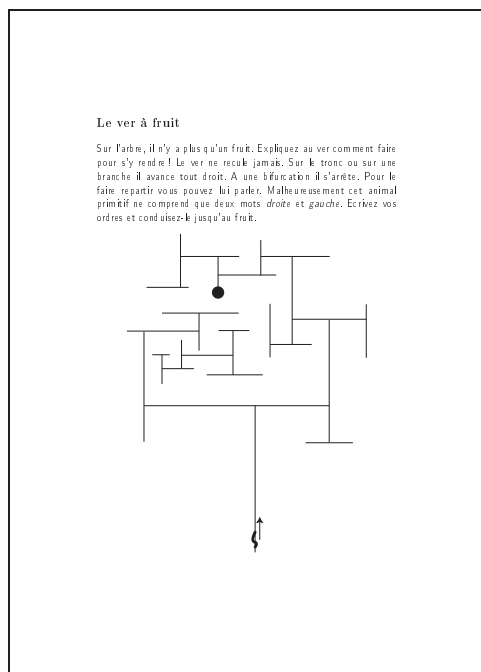


Il faut ensuite inférer que Mélanie aura, à sa propre droite, Superman, vu qu'à sa gauche, il y a la coccinelle.



Superman est à côté de Frank : celui-ci ne peut être à sa gauche étant donné que la place est occupée par Mélanie. Il est donc à sa droite, ce qui veut dire que Frank doit être identifié à Pinocchio. Ainsi va le raisonnement, de proche en proche. Cette démarche est encore ardue en 2P, aussi observe-t-on que parmi les 24 configurations possibles, presque toutes sont choisies. Environ 1/5 des élèves ont choisi correctement une des deux positions correctes de Frank-Pinocchio ou de Lili-coccinelle mais n'ont pas su coordonner les deux positions. Ils ont été capables de respecter soit la relation «avoir à sa droite» mais pas «avoir à sa gauche», soit l'inverse.

5.1.7 Le ver à fruit



Contenu mathématique

Le ver à fruit fait appel aux notions d'arbre binaire et de langage formel.

Compétences visées

Pour résoudre ce problème il faut être capable de :

- Comprendre un énoncé
- Explorer afin de trouver le bon itinéraire
- Décrire et coder cet itinéraire en utilisant un référentiel mobile

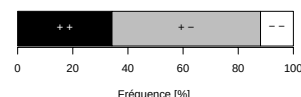
Grille de correction

Pour conduire le ver du pied de l'arbre au fruit, il faut lui donner huit ordres. Chaque ordre correctement formulé rapporte 1 point. Le nombre maximum de points qu'il est possible d'obtenir à cette tâche vaut donc 8.

La tâche est réussie si le nombre de points est supérieur ou égal à 6. Elle n'est réussie que partiellement si le nombre de points vaut 3, 4 ou 5. Elle est échouée si le nombre de points est inférieur ou égal à 2.

Taux de réussite

	Réussite			Total
	Réussite	partielle	Échec	
Effectif	155	244	54	453
Fréquence	34%	54%	12%	100%



Analyse des procédures

La difficulté de la tâche réside dans le fait qu'il faut, pour pouvoir diriger correctement le ver, être capable de se mettre à sa place. Ceci requiert des compétences similaires à celles qui sont nécessaires pour gouverner les déplacements de la Tortue de LOGO (Papert, 1981).

Beaucoup d'élèves commencent par représenter au crayon le chemin que va devoir emprunter le ver à fruit. Douze seulement se fourvoient à ce stade.

Ensuite ils établissent la liste des ordres à donner au ver, mais ils ne sont pas toujours exhaustifs (voir Tableau 5.2).

Nombre d'ordres	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Effectif	18	0	3	9	84	22	19	52	246
Fréquence	4%	0%	1%	2%	18%	5%	4%	12%	54%

TABLEAU 5.2 – *Nombre d'ordres donnés au ver à fruit.*

La majorité donne les 8 injonctions.

Certains en oublient une; souvent l'avant dernière. Les ordres sont souvent directement écrits aux embranchements de l'arbre. L'espace disponible pour inscrire le septième ordre étant très exigu, les élèves ont tendance à omettre cet ordre plus fréquemment qu'un autre.

D'autre encore n'en communiquent que 4. Numérotions les commandements dans l'ordre des embranchements parcourus par le ver à fruit. Le plus souvent, les élèves qui ne proposent que 4 injonctions précisent la direction à prendre aux embranchements 1, 3, 5 et 7. Ce sont les embranchements pour lesquels la direction à prendre est parallèle au bord inférieur de la feuille.

Examinons plus en détail les 246 réponses complètes, celles qui proposent pour chaque embranchement une direction. Et calculons la proportion de bonnes réponses pour chacune des 8 bifurcations (voir Tableau 5.3 et Figure 5.3).

Embranchement	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Fréquence	93%	72%	84%	55%	80%	72%	40%	68%

TABLEAU 5.3 – *Proportion d'injonctions correctes selon l'embranchement.*

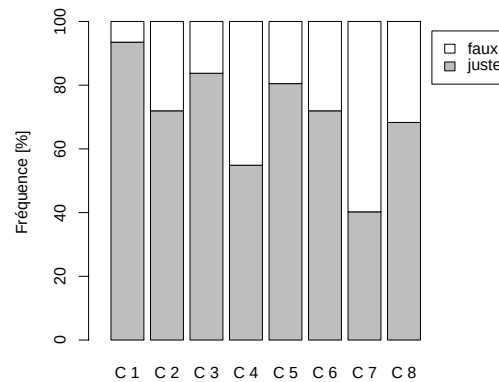


FIGURE 5.3 – Proportion d'injonctions correctes selon l'embranchement.

Ces résultats appellent deux commentaires. Nous constatons, premièrement, que la proportion des réussites a tendance à baisser au fur et à mesure que le ver progresse. Ceci est probablement dû à l'encombrement de l'espace : plus le ver se rapproche du fruit, plus les rameaux de l'arbre sont courts et moins il y a de place pour écrire les ordres !

Nous remarquons, deuxièmement, que le taux de réussite dépend fortement du type de bifurcations. Il y a en effet 4 types de bifurcations que nous nommerons simplement A, B, C et D (voir Figure 5.4).

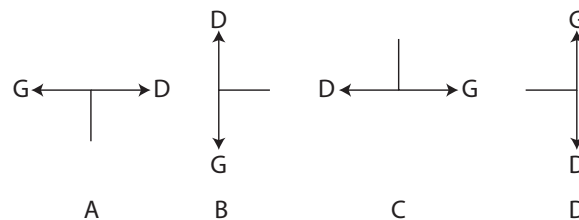


FIGURE 5.4 – Types de bifurcations.

Les bifurcations de type A sont celles où le décalage entre le référentiel de la feuille (référentiel absolu) et celui du ver (référentiel relatif) est nul. Les bifurcations de type B sont celles où le décalage entre ces deux référentiels vaut 90° . Les bifurcations de type C et D sont celles où le décalage est de 180° et -90° respectivement.

Pour donner la bonne direction face à une bifurcation de type A, il suffit de connaître sa droite et sa gauche; cette situation est la plus simple, le référentiel de la feuille coïncide avec celui du ver. La situation la plus compliquée correspond aux bifurcations de type C, car pour que le ver aille vers la gauche de la feuille, il faut lui dire *droite* et pour qu'il aille à droite, il faut lui dire *gauche*. Les bifurcations de types B et D sont de difficulté intermédiaire (voir Tableau 5.4).

Décalage	Embranchement	Taux de réussite	Taux de réussite moyen
0°	C1	93	86
	C3	84	
	C5	80	
90°	C4	55	65
	C6	72	
	C8	68	
-90°	C2	72	72
180°	C7	40	40

TABLEAU 5.4 – *Taux de réussite selon le type d'embranchement.*

L'ensemble de ces résultats statistiques suggèrent que les élèves ont adopté, pour résoudre ce problème l'une des quatre démarches suivantes.

La stratégie la moins élaborée consiste à ne donner un ordre que lorsque le ver se trouve sur un segment vertical et doit opter pour une direction parallèle au bord inférieur de la feuille (ceci correspond aux embranchements C1, C3, C5 et C7 de types A et C). Pour que le ver aille vers la droite de la feuille, il faut lui dire *droite*, idem pour gauche et ceci indépendamment du type d'embranchement. (voir Figure 5.5 a).

La deuxième stratégie consiste à commencer comme précédemment. Ensuite il faut tourner la page d'un quart de tour (dans le sens trigonométrique) et compléter la liste des ordres pour les embranchements restants C2, C4, C6 et C8 (voir Figure 5.5 b). L'ordre *gauche* est émis si l'on désire que le ver aille vers le haut de la feuille. L'ordre *droite* si l'on veut diriger le ver vers le bas de la feuille.

La troisième stratégie consiste à faire exactement comme dans la deuxième stratégie mais au lieu de tourner la feuille dans le sens trigonométrique, il faut la tourner dans le sens des aiguilles d'une montre (voir Figure 5.5 c). Ainsi l'on émettra l'ordre *droite* pour que le ver aille vers le haut de la feuille et l'ordre *gauche* pour qu'il aille vers le bas.

La quatrième stratégie, la plus sophistiquée, consiste à faire tourner la feuille après chaque changement de direction du ver. Lorsqu'il tourne à droite, il faut faire tourner la feuille à gauche et lorsqu'il tourne à gauche, il faut faire tourner la feuille à droite. Ainsi l'on adopte systématiquement le référentiel du ver à fruit (voir Figure 5.5 d).

Un élément important vient à l'appui de ces descriptions. Parmi les 246 réponses complètes, les trois listes d'ordres les plus fréquentes sont celles figurant dans le Tableau 5.5.

La première liste correspond à l'application de la stratégie 4, la deuxième correspond à l'application de la stratégie 2 et la troisième à la stratégie 3.

Au terme de l'analyse de cette tâche, nous voyons que beaucoup d'élèves savent distinguer leur droite de leur gauche, par contre très peu encore sont capables d'adopter le point de vue du ver à fruit ! Ce qui n'est somme toute

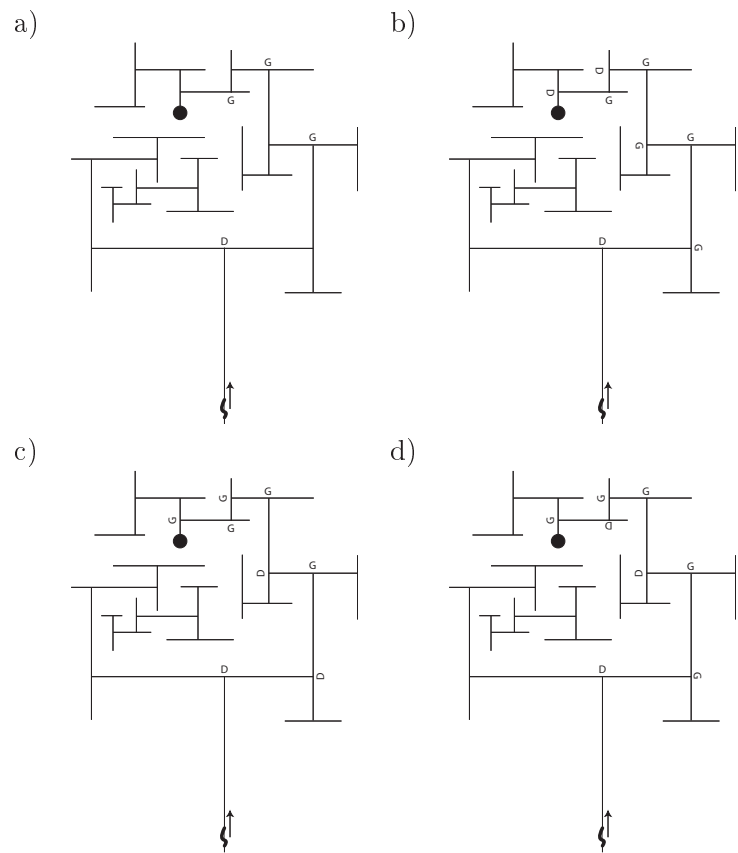


FIGURE 5.5 – *Les ordres émis selon nos quatre stratégies.*

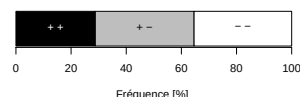
	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	Occurrences
1)	D	G	G	D	G	G	D	G	51
2)	D	G	G	G	G	D	G	D	24
3)	D	D	G	D	G	G	G	G	19

TABLEAU 5.5 – *Listes d’ordres les plus fréquentes.*

pas très étonnant si l’on se réfère à la fameuse tâche des trois montagnes de Piaget où la réussite n’était atteinte qu’à l’âge d’environ 9 ans (Piaget & Inhelder, 1948).

Taux de réussite

	Réussite			
	Réussite	partielle	Échec	Total
Effectif	135	168	166	469
Fréquence	29%	36%	35%	100%

**Analyse des procédures**

Très pragmatiquement, beaucoup d'élèves flèchent dans la grille le chemin inverse puis reportent entre le point noir et le carré blanc la succession des flèches tracées antérieurement dans le réseau.

La solution peut naturellement s'obtenir directement à partir du code sans se référer au déplacement dans la grille. En effet, à partir d'un code donné, le parcours inverse s'obtient en inversant l'ordre des flèches ainsi que leur sens. Schématiquement :

$$-(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}) = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$$

Seule la combinaison de ces deux opérations conduit à la bonne solution. A travers les différentes réponses des élèves, il est possible de mettre en évidence une gradation dans la complexité des solutions proposées, d'ordonner les solutions par paliers successifs. Et nous sommes tentés *a posteriori* de considérer cette échelle comme le reflet d'un développement cognitif. Décrivons cette évolution étape par étape.

Cheminement principal**Étape 0** ($n = 75, p = 16\%$)

A cette étape aucune proposition n'est faite :

• □

Étape 1 ($n = 44, p = 9\%$)

A cette étape la solution proposée est simplement la copie de l'énoncé. Les flèches du code sont données dans le même ordre et ont le même sens que celles du code initial :

• $\rightarrow \searrow \rightarrow \nwarrow \nwarrow \rightarrow$ □

Étape 2 ($n = 9, p = 2\%$)

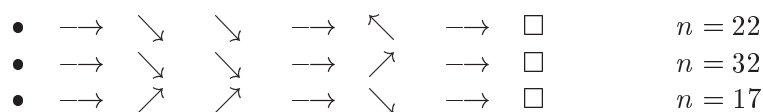
Ici, il y a inversion de l'ordre, mais le sens des flèches est maintenu :

• $\rightarrow \nwarrow \nwarrow \rightarrow \searrow \rightarrow$ □

Étape 3a ($n = 71, p = 15\%$)

A cette étape, l'ordre des flèches est inversé et seul le sens des flèches obliques est modifié.

Nous observons quelques ratés dans le changement de sens des flèches obliques. Il arrive qu'elles changent aussi de direction. Certains élèves ont de la peine à concevoir que pour aller du point noir qui se trouve à gauche de la feuille au carré blanc qui se trouve à droite, il faille suivre une flèche qui va de droite à gauche !

**Étape 3b** ($n = 22, p = 5\%$)

L'ordre des flèches est inversé, seul le sens des flèches horizontales est changé :

**Étape 4** ($n = 109, p = 23\%$)

La solution proposée est correcte, il y a inversion de l'ordre des flèches et changement de leur sens :



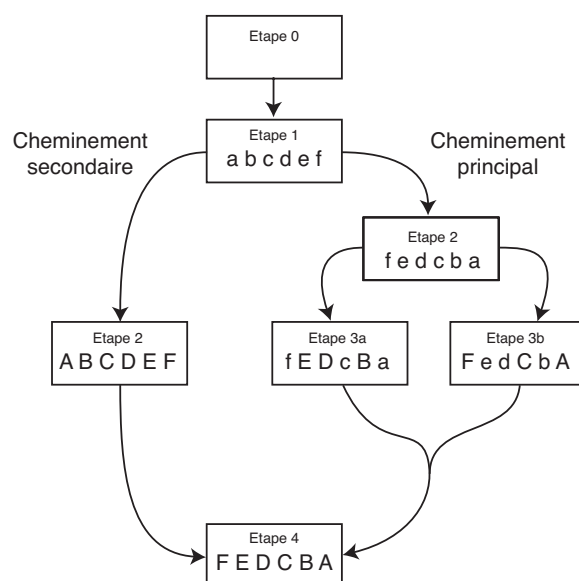
Si la majorité inverse d'abord l'ordre et ensuite le sens, une petite proportion d'élèves empruntent un autre cheminement. Ils commencent par changer le sens des flèches et ensuite seulement l'ordre.

Cheminement secondaire**Étape 2** ($n = 16, p = 3\%$)

L'ordre des flèches n'est pas modifié mais leur sens est inversé :



Résumons par un graphique ce qui précède. Pour rendre plus lisible notre schéma, nous recoderons les solutions des élèves. La séquence *abcdef* signifie que les flèches dessinées sont dans le même ordre et dans le même sens que celles qui codent pour le trajet qui va du carré blanc au rond noir. La séquence *fedcba* signifie que l'ordre a été inversé. Pour signaler le changement de sens d'une flèche, nous écrirons en majuscule la lettre qui la code (voir Figure 5.6).

FIGURE 5.6 – *Évolution des réponses.*

5.2 Analyse par domaine

Comme dans le chapitre précédant, nous allons résumer les résultats des élèves selon les deux grands domaines numérique et géométrique. Mais ici l'attribution des problèmes aux domaines est un peu plus périlleuse car les problèmes de nos épreuves collectives ne sont pas aussi typés que ceux des épreuves individuelles. Certains de ces problèmes font appel à la fois à des notions d'arithmétique et à des notions de géométrie et tous, à l'exception peut-être du problème *La pyramide*, nécessitent pour être résolus la mobilisation de compétences transversales telles que celles entraînées plus spécifiquement par les activités du Module 1 (Des problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement).

Il en découle que ces problèmes sont, insistons sur ce point, intrinsèquement plus difficiles que ceux des épreuves individuelles et par conséquent leur réussite devrait être généralement moins bonne, même si les élèves y ont travaillé en duo.

5.2.1 Domaine numérique

Les problèmes *Les mouches de Hébus*, *La combinaison secrète*, *La pyramide*, *Les bonbons* et *Le voyageur de commerce intergalactique* relèvent principalement du domaine numérique. Caractérisons la réussite à ces problèmes comme au paragraphe 4.2 (voir Tableau 5.6 et Figure 5.7).

Bien que ces problèmes soient difficiles, les élèves les réussissent relativement bien. Parmi les cinq situations proposées, la barre de la réussite

Problème	Réussite Moyenne	Intervalle de confiance à 95%
Les mouches de Hébus	0.435	[0.366; 0.504]
La combinaison secrète	0.262	[0.193; 0.332]
La pyramide	0.881	[0.845; 0.917]
Les bonbons	0.075	[-0.016; 0.163]
Le voyageur de commerce	0.232	[0.162; 0.301]

TABLEAU 5.6 – Réussite des problèmes du domaine numérique.

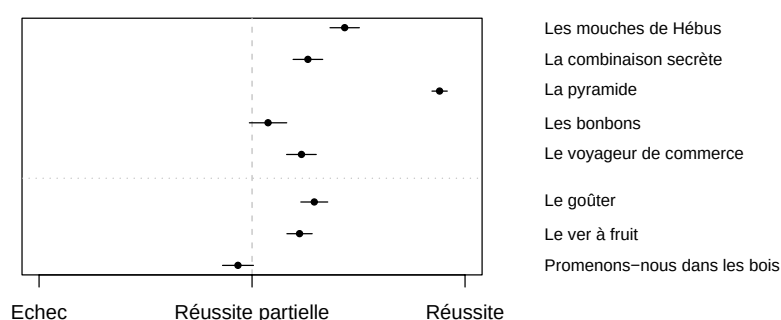


FIGURE 5.7 – Résultats aux problèmes des épreuves collectives. Sur ce diagramme nous avons représenté la réussite moyenne de chaque problème (●) ainsi que l'intervalle de confiance à 95% associé (—).

partielle est franchie significativement dans quatre.

Un problème, *La pyramide*, approche la réussite totale. Ce résultat s'explique par la similitude entre ce problème et les problèmes *Toujours plus haut* et *Murs pour dix* des nouveaux moyens (Ging *et al.*, 1996). Dans ces trois problèmes, le principe de construction selon lequel «une brique posée sur deux autres briques porte la somme des nombres notés dans ces deux briques» est le même.

5.2.2 Domaine géométrique

Les problèmes des épreuves collectives qui concernent la géométrie sont *Le goûter*, *Le ver à fruit* et *Promenons-nous dans les bois*... Parmi ces trois problèmes, deux satisfont nos critères de réussite (voir Tableau 5.7).

5.2.3 Compétences transversales

Les épreuves collectives sont globalement moins bien réussies que les épreuves individuelles. Ceci probablement à cause de la difficulté et de la nouveauté des problèmes qui pour pouvoir être résolus correctement nécessitent à chaque

Problème	Réussite Moyenne	Intervalle de confiance à 95 %
Le goûter	0.292	[0.229; 0.355]
Le ver à fruit	0.223	[0.164; 0.282]
Promenons-nous dans les bois...	-0.066	[-0.139; 0.006]

TABLEAU 5.7 – Réussite des problèmes du domaine géométrique.

fois l'élaboration d'une démarche de recherche complète marquée par les étapes suivantes (Descaves, 1992) :

- Comprendre l'énoncé et en construire une représentation
- Sélectionner et organiser les informations
- Mathématiser et mettre en signes
- Mettre en oeuvre des stratégies et des procédures de résolution
- Communiquer les résultats

C'était exiger beaucoup de nos mathématiciens en herbe. Et nous ne pouvons qu'être satisfaits de leurs performances.

Ces résultats nous permettent de répondre à la deuxième question formulée dans l'introduction à savoir «les connaissances mathématiques construites et mobilisées en classe sont-elles transférables à d'autres situations-problèmes?»

Selon Claparède (1933), l'intelligence – qu'il oppose à l'instinct et à l'habitude – est la capacité de résoudre par la pensée des problèmes nouveaux. La question que nous nous posons, reformulée, est de savoir si, grâce à la nouvelle méthodologie, les enseignants sont capables d'apprendre à leurs élèves l'intelligence ! En ces termes on mesure mieux l'envergure du défi et on n'est pas étonné de constater qu'une petite majorité d'élèves seulement résout correctement des problèmes qui ne leur sont pas familiers. Ce résultat est tout de même encourageant. Parions qu'il soit dû à la nouvelle manière d'enseigner les mathématiques et à la méthode qu'ont acquis les élèves en accomplissant les nombreuses activités de recherche proposées dans les nouveaux moyens.

Chapitre 6

Les enseignants et leurs pratiques

6.1 Utilisation des nouveaux moyens

Les nouveaux moyens d'enseignement pour les mathématiques sont utilisés dans les différents cantons surtout depuis 1997 ou 1998; c'est ce qu'affirment plus des deux tiers de nos répondants. Quelques enseignants les utilisent depuis 1996 et quelques autres les ont introduits plus tardivement. Ces moyens ont surtout été utilisés par nos répondants dans les premiers degrés de la scolarité (1^{re} et 2^e année) et parfois plus ponctuellement dans des degrés supérieurs.

L'appréciation de ces moyens est globalement positive; seuls un peu plus de 3% des enseignants interrogés portent une appréciation plutôt négative (voir Figure 6.1).

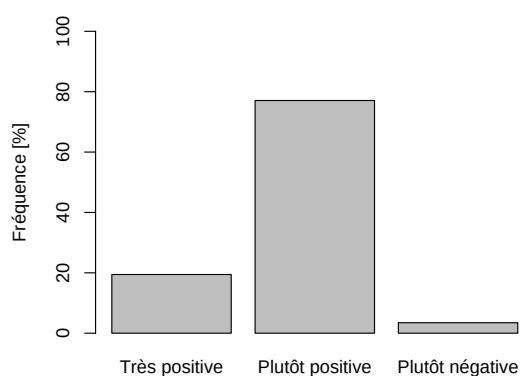


FIGURE 6.1 – *Appréciation globale des nouveaux moyens.*

Une suite logique de cette question était de mettre en évidence les principaux points positifs et négatifs de ces nouveaux moyens. Les trois points

positifs les plus souvent cités sont l'aspect ludique de l'apprentissage, la possibilité de travailler de manière interactive et en groupes ainsi que l'opportunité offerte de développer les facultés de recherche de raisonnement et de logique.

En ce qui concerne les points négatifs, les plus fréquemment cités sont le manque d'exercices d'entraînement ou de consolidation proposés et la difficulté de gestion des activités.

Les Tableaux 6.1 et 6.2 présentent les principaux points relevés pour ces questions avec la proportion de répondants les ayant mentionnés.

Points positifs	% de citations
L'aspect ludique de l'apprentissage	48
Le travail en groupes, l'interactivité	44
La possibilité de développer des facultés de recherche	40
La variété, la grande diversité des activités	30
La présentation du matériel et son attractivité	28
Le plaisir engendré pour les élèves	21
La possibilité pour l'élève de construire ses connaissances	20
La mise en situation concrète	17

TABLEAU 6.1 – *Principaux points positifs cités par les enseignants concernant les nouveaux moyens.*

Points négatifs	% de citations
Le manque d'exercices d'entraînement	51
La gestion difficile des activités	41
Les consignes compliquées	32
La gestion difficile du matériel	20
L'inapplicabilité à tous les élèves	17
La difficulté d'évaluation	11
Le manque de structures	9

TABLEAU 6.2 – *Principaux points négatifs cités par les enseignants concernant les nouveaux moyens.*

La dernière question de cette partie consacrée à l'utilisation des moyens d'enseignement nous a permis de constater que plus des deux tiers des enseignants estiment que ces moyens peuvent être utilisés avec tous les élèves. Les justifications données par ceux qui estiment que ces nouveaux moyens ne sont pas utilisables avec tous les élèves sont surtout centrées sur les difficultés liées aux élèves. Les réticences les plus fréquentes concernent l'utilisation

de ces moyens avec des élèves allophones, ou présentant des problèmes de lecture et de vocabulaire, ou alors avec des élèves faibles et lents, ayant peu d'autonomie, ou encore avec des élèves se montrant peu logiques.

Quelques tendances cantonales quant à l'utilisation des nouveaux moyens d'enseignement pour les mathématiques se dessinent. Les enseignants neuchâtelois sont globalement les plus positifs, alors que les enseignants bernois et valaisans sont les seuls à formuler des avis négatifs. De plus, c'est dans le canton de Neuchâtel que la plus forte proportion d'enseignants estiment que ces moyens sont utilisables avec tous les élèves. Le seul canton dans lequel la majorité des répondants sont d'un avis contraire est le Valais.

6.2 Pratique et gestion

Après ces différentes questions liées à l'utilisation des nouveaux moyens, le questionnaire proposait aux enseignants de nous expliquer leur pratique et gestion de l'enseignement des mathématiques. Pour commencer, il leur était demandé de citer les principaux objectifs de connaissances, de méthodes et d'attitudes qu'ils se proposaient d'atteindre par leur enseignement.

Les réponses données par les enseignants à cette question ouverte sont peu homogènes. En effet, nous constatons des confusions dans les distinctions des trois rubriques : *objectifs de connaissances*, *objectifs de méthodes* et *objectifs d'attitudes*. Si la rubrique objectifs de connaissances ne pose pas trop de problèmes, certains enseignants formulent leurs propres objectifs de méthodes et d'attitudes, ils décrivent leurs manières de travailler et les attitudes qu'ils adoptent. Ils mentionnent, par exemple, comme objectifs de méthodes le fait de *laisser l'enfant découvrir par lui-même*, de *donner envie d'apprendre*, de *donner des consignes simples et claires*, etc. Comme objectifs d'attitudes nous retrouvons des libellés tels que : *laisser chercher*, *ouverture de l'enseignant face aux démarches différentes*. Certains enseignants ont précisé à côté des trois rubriques proposées les notions de *savoirs*, *savoir-faire* et *savoir-être*. Finalement pour rendre compte des réponses à cette question, plusieurs catégories ont été répertoriées.

Les deux objectifs de connaissances cités par une majorité d'enseignants sont *le calcul* et *la connaissance des nombres*. Les objectifs de méthodes ont été plus difficiles à répertorier; aucun objectif n'est cité par la majorité des enseignants, près d'un tiers de ceux-ci mentionnent *l'autonomie et la responsabilisation*. En ce qui concerne les objectifs d'attitudes, la majorité des enseignants citent *le travail en groupe*.

Les pourcentages de citations des différentes catégories sont présentés dans les Tableaux 6.3, 6.4 et 6.5.

Après avoir relevé ces différents objectifs, il nous semblait intéressant de recueillir des informations concernant l'utilisation éventuelle de moyens d'enseignement autres que les officiels. La question se décline en deux points :

Objectifs de connaissances	% de citations
Le calcul	68
La connaissance des nombres	63
L'espace et la géométrie	43
La compréhension et le raisonnement	39
La résolution de problèmes	32

TABLEAU 6.3 – *Objectifs de connaissances cités par les enseignants.*

Objectifs de méthodes	% de citations
L'autonomie, la responsabilisation	30
Le développement de stratégies	28
Le travail en groupes, la collaboration	26
L'utilisation de méthodes de calculation et de dénombrement	23
La confrontation et l'argumentation	23
L'organisation de la recherche	23

TABLEAU 6.4 – *Objectifs de méthodes cités par les enseignants.*

Objectifs d'attitudes	% de citations
Le travail en groupe	66
La persévérance	34
L'ouverture d'esprit et la curiosité	32
La gestion personnelle des apprentissages	32
L'esprit de recherche et le raisonnement	28
Le débat et l'argumentation	15
La confiance en soi	13

TABLEAU 6.5 – *Objectifs d'attitudes cités par les enseignants.*

dans un premier temps les enseignants énumèrent les moyens complémentaires auxquels ils ont recours, et dans un deuxième temps ils précisent à quelles fins ils utilisent ces compléments. La première évidence qui mérite d'être mentionnée est le fait que la très large majorité, plus de neuf enseignants sur dix, utilisent des moyens d'enseignement complémentaires. De plus, ils sont 88% à donner des précisions.

Les *fiches de calculs* est le moyen cité le plus fréquemment, par 45% des enseignants. Plus du quart des répondants font référence à des fiches concoctées par leurs soins (*fiches personnelles*). Les *fiches des anciens moyens* sont citées comme moyens complémentaires par 12% des enseignants. D'autres personnes font aussi référence à des *fiches individuelles*, ou des *fiches achetées*

dans le commerce. Les *jeux* sont aussi présents dans bon nombre de classes puisque 20% des enseignants mentionnent y avoir recours comme moyens complémentaires de leurs leçons de mathématiques. Quant à l'*ordinateur*, il est mentionné par 11% des répondants.

Ces moyens complémentaires sont utilisés par la moitié des enseignants comme *entraînement aux techniques de calcul*, ou comme «drill» afin que les élèves acquièrent des automatismes et une certaine aisance. La *consolidation de certaines notions* est citée par 16% des enseignants, la *diversification*, le fait de varier les activités est mentionné par 10% et les notions d'*évaluation* et de bilan de contrôle sont elles citées par 7% des enseignants. Cette question a suscité une grande diversité de réponses. Certains enseignants ont recours à des moyens complémentaires pour occuper les élèves rapides, ou alors pour habituer les élèves à travailler seuls, silencieusement, de manière à faciliter la gestion de la classe. D'autres mentionnent encore le recours à des fiches supplémentaires, comme travail à domicile.

La question suivante nous permettait de nous faire une idée du temps octroyé aux différentes activités lors de l'utilisation en classe des nouveaux moyens. Les enseignants devaient nous indiquer comment ils répartissent le temps consacré aux mathématiques entre les activités individuelles, les activités en duos, les activités en groupes ou les autres types d'activités. En moyenne, nous constatons que ce sont les activités individuelles qui sont le plus pratiquées, elles occupent près de 40% du temps total d'enseignement des mathématiques. Elles sont suivies par les activités en duos ou en groupes qui représentent chacune un peu plus de 25% du temps.

Un tiers des enseignants ont formulé un commentaire à cette répartition du temps. C'est souvent pour relever la difficulté de cette estimation et le côté très approximatif de leurs réponses. Certains enseignants remarquent que cette répartition du temps de travail peut dépendre de plusieurs choses : de l'attitude des élèves, de leur rythme de travail, de la dynamique de la classe, des périodes de l'année, etc. Plusieurs enseignants justifient un pourcentage d'activités individuelles élevé, ils se jugent encore inexpérimentés ou ils estiment avoir des élèves difficiles. D'autres enseignants utilisent ces lignes de commentaires pour préciser ce qu'ils entendent par *autres types d'activité*, il peut s'agir de mises en communs, d'activités collectives, de jeux, etc. D'autres encore trouvent agréable de pouvoir travailler de toutes ces manières.

En ce qui concerne le temps hebdomadaire consacré à l'enseignement des mathématiques, la moyenne obtenue à partir des réponses relevées est de 256 minutes, à savoir 4 heures et 16 minutes. Certains enseignants précisent que la durée des leçons est flexible et que le temps consacré aux mathématiques varie d'une semaine à l'autre, certains estiment encore que ce nombre d'heures prévu par la grille horaire cantonale est insuffisant. D'autres mentionnent d'ailleurs qu'ils augmentent le temps imparti.

La planification de l'enseignement des mathématiques a également fait

l'objet d'une question. Il en ressort que l'enseignement est prioritairement planifié en fonction de l'expérience de l'enseignant (cité par 82% des répondants), et en fonction des modes d'activité, comme le précisent 76% des enseignants.

Au moment de commencer des activités en mathématiques, la majorité des enseignants (81%) affirment expliciter le vocabulaire toujours ou souvent. Environ 63% des répondants lisent la consigne et presque le même pourcentage la font reformuler par un élève. De plus, quelque 60% des enseignants reformulent eux-mêmes la consigne.

Lors des leçons de mathématiques, les trois quarts des enseignants rencontrent parfois ou souvent des difficultés liées à la gestion de la classe. Ces difficultés peuvent être attribuées principalement au bruit, à la discipline et à l'agitation des élèves ou au nombre élevé d'élèves qui, de plus, sont parfois répartis dans plusieurs degrés. D'autres raisons telles que la trop grande quantité d'activités ou la difficulté à gérer des groupes sont également évoquées mais dans une moindre mesure.

Les moyens mis en oeuvre pour surmonter ces difficultés sont avant tout l'organisation de la classe en sections afin de pouvoir travailler en alternance avec les différents élèves et la responsabilisation des élèves.

Les Tableaux 6.6 et 6.7 résument les principales réponses relevées pour ces questions avec la proportion de répondants les ayant données.

Raisons évoquées	% de citations
Le bruit, la discipline, l'agitation	32
Le nombre élevé d'élèves, de degrés	32
Le trop grand nombre d'activités à gérer, les observations difficiles	19
La difficulté des élèves à collaborer	15
La gestion des groupes	14

TABLEAU 6.6 – *Raisons des difficultés liées à la gestion de la classe citées par les enseignants.*

Moyens mis en oeuvre	% de citations
Les sections de classe, l'alternance	39
La responsabilisation des élèves	13
L'excellente organisation	9
La mise à disposition d'activités individuelles	7
La discipline	7

TABLEAU 6.7 – *Moyens mis en oeuvre pour surmonter les difficultés liées à la gestion de la classe citées par les enseignants.*

Quelques différences cantonales sont intéressantes à relever, il ne s'agit ici encore que de tendances. Les enseignants des cantons de Berne, du Jura et de Neuchâtel privilégient les activités individuelles en leur consacrant la plus grande partie du temps, contrairement au canton de Genève qui est celui dans lequel le pourcentage de temps consacré à ces mêmes activités est le plus faible. Les enseignants genevois sont ceux qui consacrent la part de leur enseignement la plus importante aux activités en groupes. Quant aux moyennes cantonales du temps hebdomadaire consacré à l'enseignement des mathématiques, elles diffèrent quelque peu, en effet elles oscillent entre 234 minutes, à savoir 3 heures et 54 minutes, dans les cantons de Neuchâtel et de Vaud, et 279 minutes, 4 heures et 39 minutes dans le canton de Fribourg. Il est à relever qu'un enseignant fribourgeois enseigne les mathématiques environ 500 minutes par semaine, soit plus de 8 heures!

En ce qui concerne les procédés utilisés par les enseignants pour débiter une activité mathématique les Genevois sont deux fois plus nombreux que leurs collègues romands à lire systématiquement la consigne lorsqu'ils débiter une activité (42% des enseignants genevois cochent la case *toujours*, et seulement 19% des romands). Ils sont aussi deux fois plus nombreux à reformuler systématiquement la consigne (32% et 15% respectivement). Par contre les enseignants valaisans reformulent les consignes moins fréquemment que leurs collègues romands (16% des valaisans cochent la case *rarement*, alors que les romands ne sont que 6% à cocher cette case). Les enseignants neuchâtelois sont ceux qui explicitent le vocabulaire le plus systématiquement (60% alors que les romands sont 38%). Une autre tendance intéressante à observer est que les enseignants qui ont en charge une classe avec un effectif important font plus souvent lire la consigne à un élève que leurs collègues.

6.3 Évaluation du travail des élèves

La dernière partie du questionnaire s'intéressait à l'évaluation du travail des élèves. Dans le cadre de leur enseignement des mathématiques plus de la moitié des enseignants éprouvent parfois de la difficulté à évaluer le travail et qu'un peu plus du quart de nos répondants avouent en avoir souvent (voir Figure 6.2).

Les modules qui présentent le plus de difficulté à évaluer sont les modules 1, 5 et 6. Le module 1 consacré au raisonnement pose des problèmes à près d'un enseignant sur deux, les modules 5 et 6 centrés sur la géométrie créent des difficultés à un enseignant sur trois. Les autres modules ne semblent pas causer de problèmes particuliers.

Les principaux points évalués par les enseignants sont les connaissances accumulées, la mise en oeuvre de méthodes appropriées et l'évolution dans les attitudes attendues. Les deux principales formes d'évaluation pratiquées par la très grande majorité des répondants sont les épreuves en classe, citées

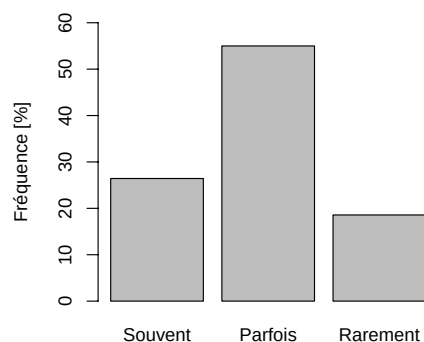


FIGURE 6.2 – *Difficulté à évaluer le travail des élèves dans le cadre de l'enseignement des mathématiques.*

par 92% des enseignants, et l'observation du travail mentionnée par 88% des répondants. L'autoévaluation et les entretiens d'évaluations sont pratiqués par moins de la moitié de nos enseignants.

Quelques divergences cantonales peuvent être relevées quant à l'évaluation du travail des élèves. C'est dans le canton du Valais que la proportion d'enseignants qui éprouvent *souvent* des difficultés lors des évaluations est la plus élevée, elle se monte à près de 45%. Et ce sont les enseignants vaudois qui semblent avoir le moins de difficultés. De plus, c'est dans les cantons du Jura et du Valais que le module 1 crée le plus de difficultés; dans ces cantons plus des deux tiers des enseignants l'ont cité. En ce qui concerne le module 6, c'est dans les cantons du Jura et de Neuchâtel qu'il engendre le plus de problèmes.

Chapitre 7

Explication des différences observées

Nous avons vu dans les Chapitres 4 et 5 que les problèmes ne sont pas résolus avec le même succès par tous les élèves. Mais nous ne savons pas encore si les élèves qui réussissent ainsi que ceux qui échouent sont toujours les mêmes. Nous ne savons pas si leur classement reste inchangé quelque soit la tâche présentée.

Dans le paragraphe 7.1, nous allons montrer que les performances des élèves peuvent être décrites à l'aide d'un seul trait latent que nous nommerons *capacités mathématiques*. En bref, nous montrerons que les élèves qui réussissent généralement à résoudre correctement un grand nombre de problèmes possèdent de bonnes capacités mathématiques, alors que ceux qui en résolvent un plus petit nombre possèdent de plus faibles capacités.

Nous examinerons ensuite comment les capacités des élèves telles que nous les inférerons à partir de leurs performances peuvent s'expliquer par des caractéristiques leur étant propres, comme leur âge, leur sexe ou leur nationalité (§7.2). Nous étudierons aussi l'influence que peuvent avoir les enseignants sur les capacités mathématiques développées par leurs élèves. Finalement, nous analyserons le rôle des variables environnementales telles que le nombre d'élèves dans la classe ou le type de classe (classe à un degré, à deux degrés ou à degrés multiples) (§7.3).

Au terme de ce chapitre nous aurons donc répondu à la troisième question formulée dans l'introduction, nous saurons quels sont les facteurs qui influencent les résultats en mathématiques des élèves.

7.1 Construction d'une échelle de capacités

7.1.1 Unidimensionnalité de l'épreuve individuelle

Effectuons une analyse en composantes principales des problèmes constituant la forme A de l'épreuve individuelle¹. Pour déterminer le nombre de composantes à retenir, nous effectuerons une analyse en parallèle au seuil de 5% (Silverstein, 1987; O'Connor, 2000). Une seule composante principale est significative (voir Tableau 7.1). Cette dernière explique 32% de la variance totale.

Composante	1	2	3	4	5	6	7
Variance	2.24	1.04	0.88	0.82	0.78	0.67	0.57
Valeur critique	1.17	1.11	1.06	1.02	0.99	0.95	0.92

TABLEAU 7.1 – *Variances des composantes principales calculées à partir des réponses aux problèmes de la forme A de l'épreuve individuelle et valeurs critiques établies grâce à une analyse parallèle.*

Procédons de manière similaire avec les problèmes de la forme B de l'épreuve individuelle. Ici encore une seule composante principale est significative. Cette dernière explique 35% de la variance totale (voir Tableau 7.2).

Composante	1	2	3	4	5	6	7
Variance	2.47	1.01	0.82	0.80	0.69	0.65	0.56
Valeur critique	1.17	1.10	1.06	1.02	0.99	0.96	0.92

TABLEAU 7.2 – *Variances des composantes principales calculées à partir des réponses aux problèmes de la forme B de l'épreuve individuelle et valeurs critiques établies grâce à une analyse parallèle.*

Ainsi tous les problèmes de la forme A contribuent à une seule et même dimension (voir Figure 7.1), tous les problèmes de la forme B aussi (voir Figure 7.2).

Or les formes A et B ont une partie commune; par transitivité, nous pouvons donc conclure que tous les problèmes contribuent à révéler une unique dimension qui reflète globalement les capacités mathématiques des élèves.

7.1.2 Mise en équivalence des formes A et B de l'épreuve individuelle

A la lumière de ce qui précède, nous sommes en droit d'appliquer une procédure de mise en équivalence linéaire couramment utilisée en science de

1. Dorénavant nous donnerons à chaque exercice exactement le même poids.

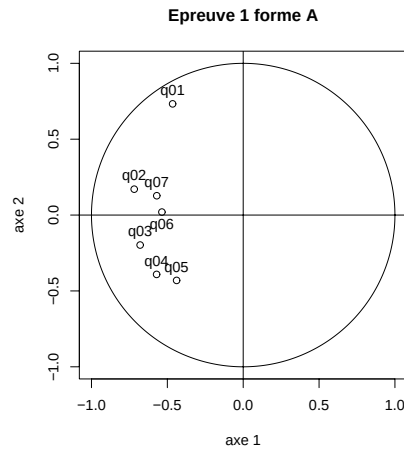


FIGURE 7.1 – Représentation des problèmes de la forme A dans le plan défini par les deux premières composantes principales.

Liste des abréviations :

q01 :	Carnaval;	q05 :	Les pavillons;
q02 :	Au cinéma;	q06 :	Manhattan;
q03 :	Petite suite;	q07 :	Le drapeau des pirates.
q04 :	Quel est le plus grand?		

l'éducation (Angoff, 1971; Lord, 1955).

Nous disposons de deux tests X et Y que nous aimerions mettre en équivalence en recourant à un test d'ancrage Z (voir Figure 7.3).

Les élèves sont répartis aléatoirement en deux groupes². Les tests X et Z sont administrés à une moitié des élèves (groupe 1); les tests Y et Z sont administrés à l'autre moitié (groupe 2).

La formule de conversion des scores au test X dans la métrique du test Y s'écrit dès lors :

$$Y^* = AX + B. \quad (7.1)$$

Où

$$A = \frac{\hat{\sigma}_Y}{\hat{\sigma}_X}$$

et

$$B = \hat{\mu}_Y - A\hat{\mu}_X.$$

2. Dans notre étude ce sont des grappes d'élèves (*i.e.* les classes) qui sont réparties aléatoirement en deux groupes.

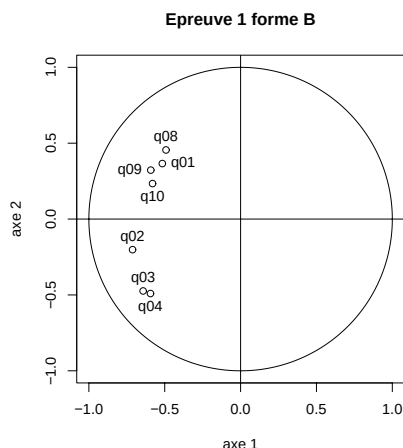


FIGURE 7.2 – Représentation des problèmes de la forme B dans le plan défini par les deux premières composantes principales.

Liste des abréviations :

q01 : <i>Carnaval</i> ;	q08 : <i>Les colliers de Louisa</i> ;
q02 : <i>Au cinéma</i> ;	q09 : <i>Les remparts</i> ;
q03 : <i>Petite suite</i> ;	q10 : <i>Les cubes</i> .
q04 : <i>Quel est le plus grand ?</i>	

Avec

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_X &= \bar{X} + b_{XZ_1}(\bar{Z} - \bar{Z}_1) \\
 \hat{\mu}_Y &= \bar{Y} + b_{YZ_2}(\bar{Z} - \bar{Z}_2) \\
 \hat{\sigma}_X^2 &= s_X^2 + b_{XZ_1}^2(s_Z^2 - s_{Z_1}^2) \\
 \hat{\sigma}_Y^2 &= s_Y^2 + b_{YZ_2}^2(s_Z^2 - s_{Z_2}^2)
 \end{aligned}$$

Détaillons les différentes composantes de ces formules :

$\bar{X}$	est la moyenne des scores du premier groupe au test X ;
$\bar{Y}$	est la moyenne des scores du premier groupe au test Y ;
$\bar{Z}$	est la moyenne des scores des deux groupes au test Z ;
$\bar{Z}_1$	est la moyenne des scores du premier groupe au test Z ;
$\bar{Z}_2$	est la moyenne des scores du second groupe au test Z ;
s_X^2	est la variance des scores du premier groupe au test X ;
s_Y^2	est la variance des scores du second groupe au test Y ;
s_Z^2	est la variance des deux groupes au test Z ;
$s_{Z_1}^2$	est la variance des scores du premier groupe au test Z ;
$s_{Z_2}^2$	est la variance des scores du second groupe au test Z ;
b_{XZ_1}	est la pente de la droite de régression de X sur Z (groupe 1);
b_{YZ_2}	est la pente de la droite de régression de Y sur Z (groupe 2).

La formule de conversion des scores au test Y dans la métrique du test X est analogue à la formule 7.1.

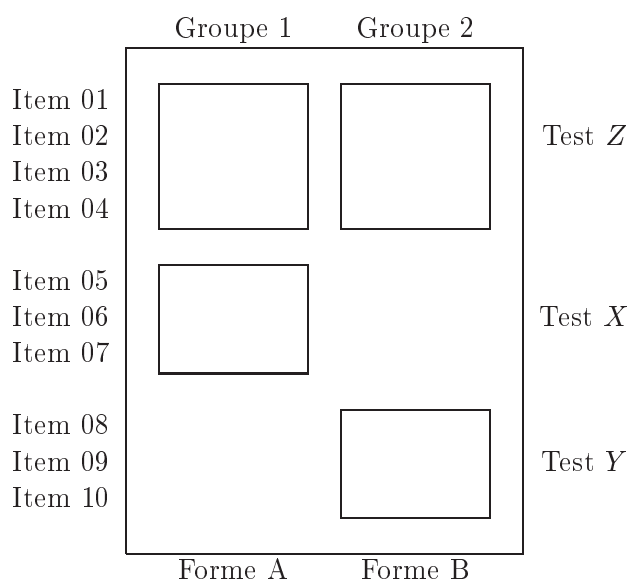


FIGURE 7.3 – Plan expérimental utilisé pour l'évaluation des capacités mathématiques individuelles. Ce plan a été décrit en détail dans la partie méthodologique.

Pour attribuer à chaque élève un score global de capacités mathématiques nous allons calculer d'une part les scores Y^* qu'auraient dû obtenir les élèves du groupe 1 au test Y si nous le leur avions proposé, et d'autre part les scores X^* qu'auraient dû obtenir les élèves du groupe 2 au test X , puis nous assignerons à chaque élève la somme de ses scores au trois tests X , Y et Z .

Pour les élèves du groupe 1, le score global T est déterminé par l'équation :

$$T = X + Y^* + Z;$$

pour les élèves du groupe 2, ce score global T est déterminé par l'équation :

$$T = X^* + Y + Z.$$

Pour terminer, nous avons décidé de fixer arbitrairement la moyenne de la variable T à 500 et son écart-type à 100³. Les scores T sont arrondis à l'unité (voir Tableau 7.3 et Figure 7.4).

La distribution des scores de capacités mathématiques est asymétrique (le coefficient d'asymétrie vaut $\gamma_1 = -0.48$), elle s'étale sur la gauche, la moyenne est inférieure à la médiane. Cette distribution est caractéristique de tests d'acquisition où souvent l'on constate un entassement des scores au-dessus de la moyenne signalant ainsi qu'une minorité seulement des élèves

3. Cette convention a aussi été adoptée par les chercheurs participant au Programme International du Suivi des Acquis des élèves (Nidegger, 2001).

Minimum	1 ^{er} quartile	Médiane	3 ^e quartile	Maximum
131	434	511	579	674

TABLEAU 7.3 – *Résumé numérique de la distribution des scores de capacités mathématiques.*

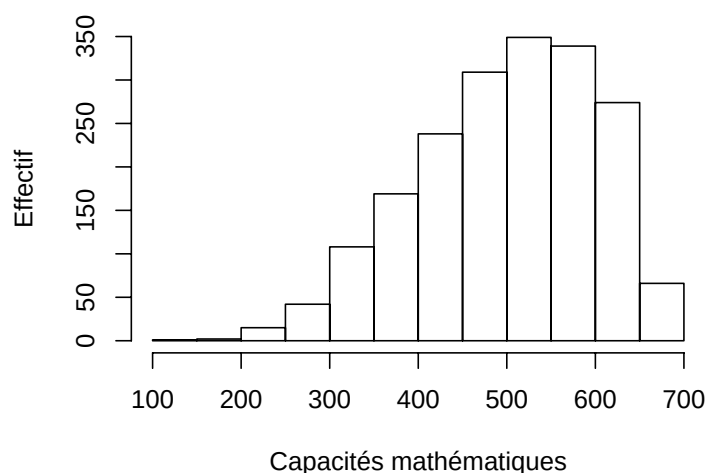


FIGURE 7.4 – *Distribution des scores de capacités mathématiques (effectif : 1912; moyenne : 500; écart-type : 100).*

éprouvent des difficultés et n'ont pas encore atteint les objectifs fixés par le plan d'étude.

Les groupes 1 et 2, ayant travaillé sur les formes A et B de l'épreuve individuelle respectivement, sont équivalents. Les capacités mathématiques de ces deux groupes se distribuent de la même manière – même moyenne ($t = 0.61$, $ddl = 1910$, $p > 0.05$) et même variance ($F = 1.00$, $ddl_1 = 931$, $ddl_2 = 979$, $p > 0.05$) (voir Tableau 7.4).

	Groupe 1 (forme A)	Groupe 2 (forme B)
Effectif	932	980
Moyenne	498.56	501.37
Variance	10009.11	10000.85

TABLEAU 7.4 – *Moyenne et variance de la variable capacités mathématiques dans les groupes 1 et 2.*

Dans les analyses qui suivent, c'est à l'aide de cette variable synthétique *capacités mathématiques* que nous comparerons les élèves puis les classes.

7.1.3 Estimation de l'ampleur des effets-classe

Les données que nous analysons ont une structure hiérarchique en deux couches. Les élèves, unités du premier niveau – le niveau micro – sont répartis dans différentes classes, unités du deuxième niveau – le niveau macro. Pour analyser ces données nous commencerons, comme il est traditionnel de le faire en sciences sociales, par comparer les élèves sans tenir compte du fait qu'ils sont regroupés en classes. Puis nous agrégerons les résultats des élèves par classe et comparerons ces résultats agrégés⁴. Mais au préalable nous allons déterminer l'ampleur des effets-classe.

La variabilité des capacités mathématiques évaluées dans un contexte scolaire peut se décomposer en deux parts. La première part est attribuée dans une large mesure à des différences d'intelligence, d'aptitude ou, selon une terminologie plus récente, à des différences cognitives (Reuchlin, 1991). La seconde est attribuée à des effets-classe qui résultent du style éducatif des enseignants, des pratiques en classes ou de la structure de la classe (Bressoux, 1994).

La variance totale de la variable *capacités mathématiques* $Var_{total}(X)$ se décompose donc en deux termes. Le premier est égal à la variance intra-classe $Var_{intra}(X)$, le second est égal à la variance inter-classes $Var_{inter}(X)$.

$$Var_{total}(X) = Var_{intra}(X) + Var_{inter}(X),$$

avec :

$$\begin{aligned} Var_{total}(X) &= \frac{1}{n} \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2 \\ Var_{intra}(X) &= \frac{1}{n} \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \\ Var_{inter}(X) &= \frac{1}{n} \sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

où :

- x_{ij} représente les capacités mathématiques de l'élève j de la classe i ;
- $\bar{x}_i$ est la moyenne des capacités mathématiques des élèves de la classe i ;
- $\bar{x}$ est la moyenne générale des capacités mathématiques;
- n_i est l'effectif de la classe i ;
- n est le nombre total d'élèves interrogés.

Dans notre étude, la part de variance intra-classe vaut 81%; la part de variance inter-classes 19%. Ces chiffres sont en accord avec la littérature (Bressoux, 1994).

4. De nouvelles techniques statistiques permettent de mieux tenir compte de l'imbrication hiérarchique de plusieurs niveaux. Néanmoins, pour des raisons de simplicité, nous n'effectuerons pas de telles analyses (Bryk & Raudenbush, 1992; Goldstein, 1995; Snijders & Bosker, 1999).

$$\frac{Var_{intra}(X)}{Var_{total}(X)} = 81\%$$

$$\frac{Var_{inter}(X)}{Var_{total}(X)} = 19\%$$

Même si les différences observées entre les élèves sont attribuables principalement à des facteurs individuels (4/5), nous constatons que les effets-classe ne sont pas du tout négligeables (1/5). La Figure 7.5 rend compte de ce phénomène. Nous voyons qu’au sein des classes il y a une grande variabilité et dans une moindre mesure entre les classes aussi.

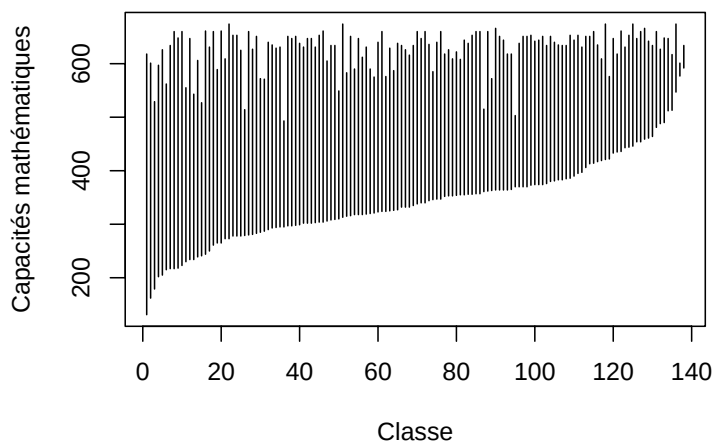


FIGURE 7.5 – *Capacités mathématiques minimale et maximale dans les différentes classes de notre échantillon. Les classes sont ordonnées selon les capacités mathématiques de l’élève le plus faible.*

7.2 Comparaison des élèves

7.2.1 Âge

Globalement nous n’observons pas de lien entre l’âge et les capacités mathématiques. Le coefficient de corrélation vaut 0.01 et n’est pas significatif ($t = 0.355$, $ddl = 1893$, $p > 0.05$). Nous aurions pu pourtant nous attendre à une légère dépendance positive entre l’âge et les capacités mathématiques car entre 8 et 9 ans le développement cognitif est appréciable. Ce lien est probablement masqué par des différences inter-individuelles plus saillantes.

7.2.2 Sexe

Nous n'observons pas non plus de différences entre les filles et les garçons ($t = 1.142$, $ddl = 1910$, $p > 0.05$) (voir Tableau 7.5 et Figure 7.6).

	Effectif	Moyenne	Écart-type
Fille	921	497	101
Garçon	991	503	100

TABLEAU 7.5 – Capacités mathématiques selon le sexe.

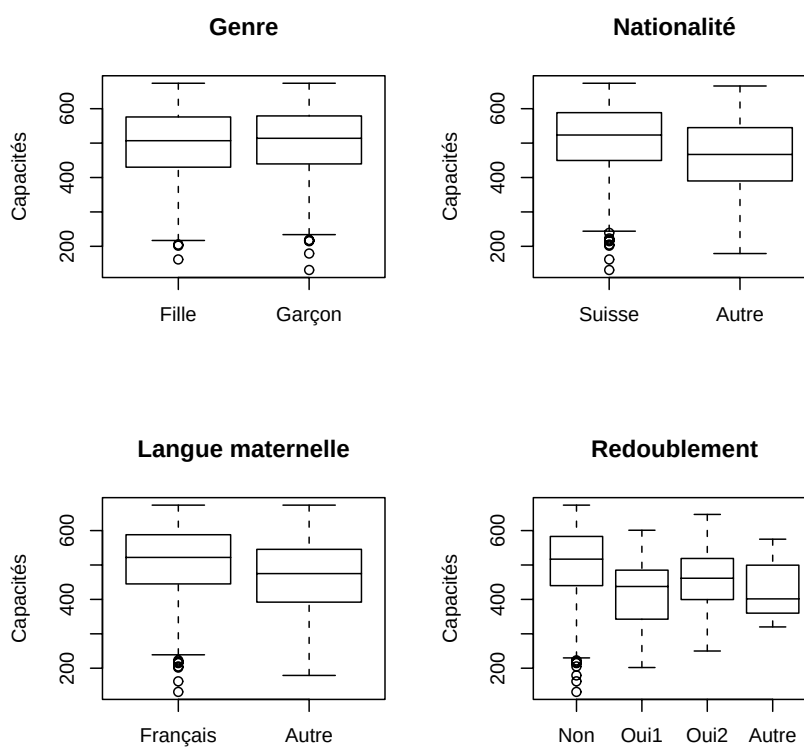


FIGURE 7.6 – Comparaison des capacités mathématiques selon le genre, la nationalité, la langue maternelle et le redoublement.

Pour mieux comparer les mesures opérées sur le groupe des filles et celui des garçons, nous allons décrire les deux distributions en termes de recouvrements. La moyenne des capacités mathématiques des garçons vaut 503. Ce score est dépassé par 54% des garçons et également par 51% des filles! Le recouvrement des distributions est donc très large.

De longue date, les psychologues ont constaté que les filles sont supérieures dans le domaine verbal. Elles l'emportent aussi globalement dans les résultats scolaires (au moins dans les débuts de la scolarité), sans doute par une attitude générale plus favorable au travail scolaire. Les garçons par contre sont supérieurs surtout dans les épreuves spatiales et en matière de techniques, de sciences et de mathématiques (Becker & Forsyth, 1994; Friedman, 1994; Reuchlin, 1985). Malgré ces différences connues, il semblerait que notre dispositif ne soit pas discriminant selon le sexe.

7.2.3 Nationalité

Les capacités mathématiques des élèves d'origine suisse sont significativement supérieures à celles des élèves d'origine étrangère ($t = 9.33$, $ddl = 1899$, $p < 0.05$) (voir Tableau 7.6 et Figure 7.6).

	Effectif	Moyenne	Écart-type
Suisse	1384	513	97
Autre	517	466	100

TABLEAU 7.6 – *Capacités mathématiques selon la nationalité.*

La proportion des élèves suisses ayant un score supérieur à la moyenne des élèves suisses vaut 54%. La proportion des élèves étrangers ayant un score supérieur à la moyenne des élèves suisses vaut 36%. Les distributions se chevauchent modérément. De telles différences entre élèves suisses et étrangers ne sont probablement pas dues à la nationalité proprement dite mais plutôt au fait que les élèves étrangers maîtrisent souvent moins bien le français.

7.2.4 Langue maternelle

Les capacités mathématiques des élèves francophones sont significativement supérieures à celles des élèves non-francophones ($t = 7.93$, $ddl = 1898$, $p < 0.05$) (voir Tableau 7.7 et Figure 7.6).

	Effectif	Moyenne	Écart-type
Francophone	1433	510	98
Non-francophone	467	469	100

TABLEAU 7.7 – *Capacités mathématiques selon la langue maternelle.*

La proportion des élèves francophones ayant un score supérieur à la moyenne des élèves francophones vaut 55%. La proportion des élèves non-francophones ayant un score supérieur à la moyenne des élèves francophones vaut 37%. Ces résultats sont tout à fait similaires à ceux présentés dans le paragraphe précédent.

Les problèmes que nous avons proposés aux élèves nécessitent une certaine maîtrise du français. En effet, pour pouvoir extraire les informations pertinentes d'un énoncé mathématique, il est indispensable de connaître la langue. Et même si nous avons demandé aux enseignants de lire tous les problèmes à haute voix, cela n'a pas forcément suffi aux élèves non-francophones à compenser leur désavantage.

7.2.5 Redoublement

Les capacités mathématiques des élèves ayant suivi jusqu'ici un parcours scolaire sans accroc sont significativement meilleures que celles des élèves ayant redoublé ou bénéficiant d'autres mesures particulières ($F = 22.39$, $ddl_1 = 3$, $ddl_2 = 1898$, $p < 0.05$) (voir Tableau 7.8 et Figure 7.6).

Redoublement	Effectif	Moyenne	Écart-type
Aucun	1766	505	99
En 1P	56	419	95
En 2P	60	458	88
Autres mesures	20	422	79

TABLEAU 7.8 – *Capacités mathématiques selon la variable Redoublement.*

Parmi les élèves ayant redoublé leur première année d'école primaire, 15% seulement obtiennent un score supérieur à la moyenne des élèves n'ayant pas redoublé. Parmi ceux qui ont redoublé leur deuxième année primaire 32% obtiennent un score meilleur que la moyenne des élèves n'ayant pas redoublé. Et parmi ceux jouissant de mesures particulières, il y en a 25%. Les recouvrements sont faibles. Une autre manière de voir consiste à déterminer la proportion des élèves n'ayant pas redoublé qui obtiennent un score inférieur à la moyenne de chacun des groupes d'élèves ayant subi un échec scolaire (voir Tableau 7.9).

Redoublement	Recouvrement [%]
En 1P	19
En 2P	30
Autres mesures	20

TABLEAU 7.9 – *Proportion des élèves n'ayant pas redoublé moins bons que la moyenne des élèves ayant subi un échec scolaire.*

Certes le fait de revoir un programme peut permettre à certains élèves de consolider un acquis vacillant et poursuivre la scolarité avec une confiance en soi accrue. Mais, à la lumière de nos résultats, nous ne pouvons que nous interroger – comme bien d'autres (Hutmacher, 1993; Paul, 1997; Perrenoud,

1996) – sur l’effet remédiateur du redoublement, du moins en mathématiques avec les nouveaux moyens.

7.2.6 Canton

Les capacités mathématiques moyennes ne sont pas les mêmes dans tous les cantons ($F = 5.96$, $ddl_1 = 6$, $ddl_2 = 1905$, $p < 0.05$) (voir Tableau 7.10 et Figure 7.7).

	Effectif	Moyenne	Écart-type
BE	260	503	100
FR	297	521	93
GE	299	485	107
JU	222	518	93
NE	271	484	103
VS	281	498	96
VD	282	494	101

TABEAU 7.10 – *Capacités mathématiques selon les cantons.*

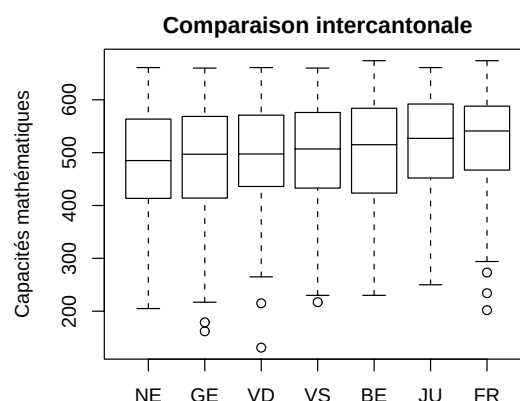


FIGURE 7.7 – *Distributions des capacités mathématiques selon les cantons. Les cantons sont ordonnés en fonction des médianes.*

Les différences significatives entre moyennes cantonales sont répertoriées dans le Tableau 7.11. Rappelons que la proportion d’élèves étrangers dans notre échantillon est plus grande dans le canton de Genève et plus petite dans les cantons de Berne, de Fribourg et du Jura (voir § 1.2.3). Or les élèves étrangers ont en moyenne des capacités mathématiques plus faibles que les élèves suisses. Il n’est donc pas étonnant que globalement les résultats des élèves genevois soient moins bons que ceux des élèves des autres cantons. Nous avons donc aussi comparé les cantons en tenant compte de cet effet de

structure. Même avec cette correction, les différences subsistent, nos résultats ne seraient donc pas un artefact !

		485	494	498	503	518	521
		GE	VD	VS	BE	JU	FR
484	NE					×	×
485	GE					×	×
494	VD						×
498	VS						×
503	BE						
518	JU						

TABLEAU 7.11 – *Comparaisons post hoc des moyennes cantonales (test unilatéral au seuil de 5%). Les différences significatives sont indiquées par des croix.*

Comme dans l'évaluation sommaire des compétences mathématiques de l'enquête PISA 2000 (Nidegger, 2001), le canton de Fribourg est en tête, les cantons de Neuchâtel et de Genève sont en queue. Le changement mineur dans le classement général est dû au canton du Valais : celui-ci était deuxième dans l'enquête PISA et se retrouve dans notre étude dans le gros du peloton (voir Tableau 7.12). Rappelons que les élèves interrogés dans l'enquête PISA 2000 étaient en fin de scolarité obligatoire alors que les élèves que nous avons interrogés sont en début de cursus. Les différences observées entre les cantons au début du primaire ne subissent donc pas de modifications majeures et se maintiennent jusqu'à la fin du secondaire inférieur (le coefficient de corrélation de rangs de Spearman vaut 0.89). Ceci reflète la forte inertie des systèmes éducatifs !

	NE	GE	VD	VS	BE	JU	FR
Début du primaire	7	6	5	4	3	2	1
Fin du secondaire I	5	6	4	2	–	3	1

TABLEAU 7.12 – *Classement des cantons selon leur «compétence mathématique» moyenne au début du primaire (MATHÉVAL) et à la fin du secondaire inférieur (PISA 2000).*

En résumé, nous constatons que les capacités mathématiques développées par les élèves peuvent être très diverses. Si une majorité des élèves sont capables de mobiliser leurs capacités pour résoudre les problèmes que nous leur avons soumis et font preuve de réelles compétences mathématiques, une minorité non négligeable d'élèves manifestent de vraies difficultés. Certains groupes d'élèves, comme les élèves non-francophones ou les redoublants, semblent être particulièrement plus faibles que leurs camarades. La question que nous nous posons est de savoir si la méthodologie proposée par les nou-

veaux moyens est en train de diminuer ou, au contraire, ne fait qu'accroître les différences. Cette question fait écho à une préoccupation exprimée très justement par Hutmacher (1993) dans un autre contexte :

En voulant moderniser les contenus, en voulant «activer» les apprentissages par la manipulation et par l'activité exploratoire propre de l'élève, a-t-on pris garde qu'on modifiait en même temps et/ou qu'on élevait le niveau des dispositions et des compétences implicites exigées pour l'apprentissage, mais rarement enseignées en tant que telles? (p. 133).

Notre dispositif de recherche ne nous permet malheureusement pas de répondre à cette question.

Nous venons d'examiner les différences entre les élèves de notre échantillon (niveau micro). Regardons maintenant quels sont les facteurs qui influencent la performance moyenne des classes (niveau macro).

7.3 Comparaison des classes

Dans un premier temps nous nous intéresserons aux effets-maître, dans un second temps aux effets-classe.

7.3.1 Effets-maître

Parmi toutes les informations concernant les enseignants en notre possession (voir Chapitre 6) seules quelques-unes sont en lien avec la performance moyenne de leur classe. Nous allons brièvement les passer en revue.

Années d'expérience

Définissons la performance moyenne d'une classe par la moyenne des capacités mathématiques de ses élèves et représentons la performance moyenne des classes en fonction du nombre d'années d'expérience des enseignants (voir Figure 7.8).

Nous voyons se dégager une légère tendance positive. Le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson vaut 0.238 et est significatif ($t = 2.86$, $ddl = 136$, $p < 0.05$). Les enseignants les plus expérimentés ont donc de meilleures classes. Mais ce lien est ténu et l'on trouve dans notre échantillon des enseignants expérimentés qui ont de faibles classes, comme des enseignants novices qui en ont d'excellentes.

Familiarité avec les nouveaux moyens

Les nouveaux moyens ont été introduits en Suisse romande systématiquement à partir de 1997 mais ont été mis à l'épreuve dans un nombre limité de

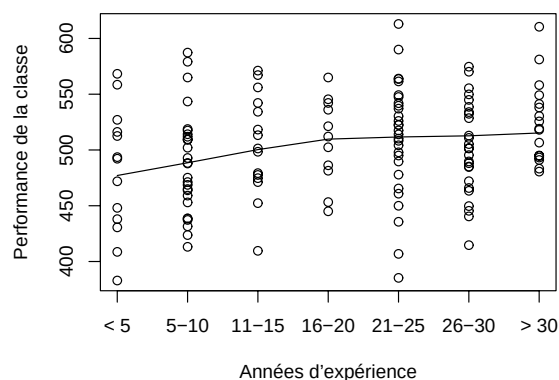


FIGURE 7.8 – *Performance de la classe selon le nombre d'années d'expérience de l'enseignant. Chaque point représente une classe et son enseignant. La courbe est un lissage des observations effectué par régression localement pondérée robuste (Cleveland, 1981).*

classes dès 1994. Si l'on représente les performances moyennes des classes en fonction de l'année civile à partir de laquelle les enseignants utilisent les nouveaux moyens, l'on observe une légère tendance à la baisse (voir Figure 7.9). Le coefficient de corrélation linéaire vaut -0.222 et est statistiquement significatif ($t = 2.66$, $ddl = 136$, $p < 0.05$). Les enseignants qui ont travaillé le plus longtemps avec les nouveaux moyens, qui les connaissent le mieux, ont les classes les plus performantes.

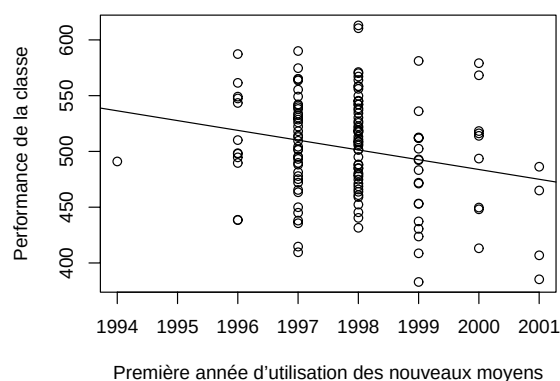


FIGURE 7.9 – *Performance de la classe selon la date du début d'utilisation des nouveaux moyens par l'enseignant. Nous avons superposé au diagramme de dispersion la droite de régression.*

Appréciation globale des nouveaux moyens

Représentons les performances moyennes des classes en fonction de l'appréciation globale des nouveaux moyens exprimée par les enseignants. Nous constatons que plus l'appréciation est positive, plus la performance de la classe est bonne (voir Figure 7.10). Ce lien est statistiquement significatif ($t = 2.184$, $ddl = 136$, $p < 0.05$).

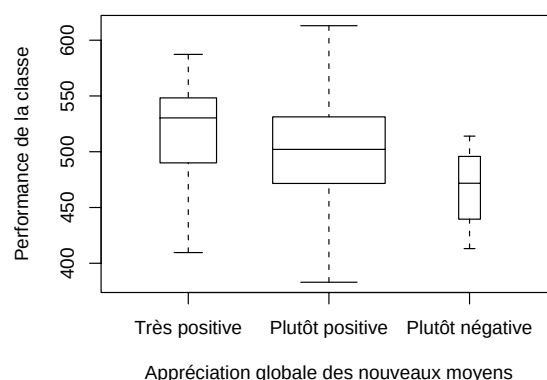


FIGURE 7.10 – *Performance de la classe selon l'appréciation globale des nouveaux moyens exprimée par l'enseignant. La largeur des boîtes à moustaches est proportionnelle à la taille des groupes.*

Temps consacré à l'enseignement des mathématiques

Le temps moyen que consacre chaque enseignant aux mathématiques par semaine influence positivement la performance moyenne de sa classe (voir Figure 7.11). Plus une classe fait de mathématiques, meilleure est sa performance ! La corrélation vaut 0.167 et est significative ($t = 1.98$, $ddl = 136$, $p < 0.05$).

Voici des résultats qui ne heurtent pas le bon sens ! Plus les élèves font de mathématiques, plus ils progressent et meilleurs ils sont. Leur enseignant joue un rôle dans leur évolution. Son expérience est cruciale, le métier s'acquiert en plusieurs années. Mais l'expérience pédagogique ne suffit pas, il faut aussi que l'enseignant s'approprie des moyens mis à sa disposition, en l'occurrence les nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques et qu'il les apprécie⁵.

Mais ces résultats peuvent aussi suggérer que les nouveaux moyens ne suffisent pas à eux seuls et que leur utilisation la plus efficace ne peut se faire que si l'enseignant connaît d'autres moyens et est capable ainsi de choi-

5. Ce constat concorde avec une observation faite par Mingat (1996). Cet auteur souligne, travaux expérimentaux à l'appui, le rôle important que joue la motivation des enseignants et l'énergie qu'ils déploient dans l'acte éducatif sur la mobilisation des élèves.

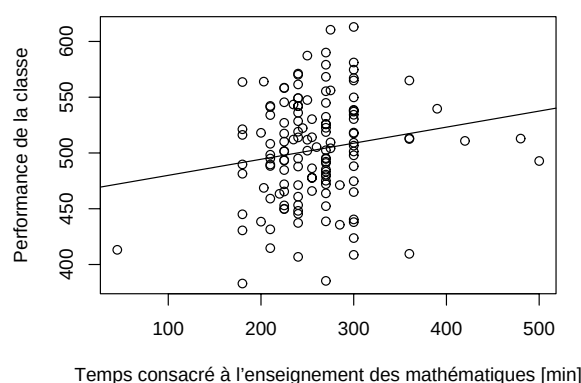


FIGURE 7.11 – *Performance de la classe selon le temps moyen consacré à l'enseignement des mathématiques par semaine. La droite de régression a une pente positive.*

sir et d'agencer judicieusement les tâches qui permettent aux élèves de se construire de nouvelles connaissances et de se forger, parfois dans l'interaction, de nouvelles compétences, de la façon la plus profitable.

Mis à part les points que nous venons de relever, ces résultats frappent surtout par leur pauvreté ! Il est en effet surprenant de constater qu'aucune autre information récoltée à l'aide du questionnaire aux enseignants ne peut expliquer les résultats des élèves. Aucune différence, ni au niveau de la pratique et de la gestion de la classe, ni au niveau de l'évaluation du travail des élèves, n'a d'impact notable sur leurs capacités mathématique telles que nous les avons mesurées ! Est-ce un résultat en soi ou faut-il incriminer la médiocrité de notre instrument ainsi que la difficulté pour un enseignant de rendre compte précisément de ce qu'il fait vraiment en classe ? La question reste en suspens.

7.3.2 Effets-classe

Nous ne procéderons pas tout à fait comme précédemment. Au lieu de passer en revue les variables significatives les unes après les autres, nous recourrons à une méthode plus globale, la régression multiple pas-à-pas. Nous définirons dans un premier temps l'ensemble des variables potentiellement explicatives des différences observées entre les performances moyennes des classes, puis dans un deuxième temps, après avoir mis en application la procédure, nous décrirons les variables véritablement source d'information.

La régression multiple pas-à-pas permet de construire un modèle statistique parcimonieux. À partir de l'ensemble des variables potentiellement explicatives, on examine s'il est possible d'en supprimer une sans affecter la qualité de la description. Si c'est le cas, cette variable est supprimée. Puis on

recommence jusqu'à ne plus pouvoir en éliminer sans altérer la précision de la description. A chaque étape on vérifie qu'aucune variable déjà supprimée n'améliore pas, si elle était à nouveau prise en considération, la qualité du modèle.

Listons les variables potentiellement explicatives. Nous les répartirons selon trois catégories. La première rassemblera les variables qui définissent la structure de la classe; la deuxième regroupera les variables qui caractérisent l'enseignant et ont un impact sur la performance de la classe (voir § 7.3.1); la troisième et dernière catégorie ne contiendra qu'une variable supra-environnementale : le canton.

Variables *classe* :

- Nombre d'élèves
- Nombre d'élèves de 2P
- Âge moyen des élèves
- Proportion de filles
- Proportion d'élèves suisses
- Proportion d'élèves francophones
- Proportion de redoublants

Variables *maître* :

- Nombre d'années d'expérience
- Nombre d'années d'utilisation des nouveaux moyens
- Appréciation globale des nouveaux moyens
- Temps consacré à l'enseignement des mathématiques

Variable *environnementale* :

- Canton

A l'issue de l'analyse les variables restantes sont les suivantes :

Variables *classe* :

- Âge moyen des élèves
- Proportion d'élèves francophones
- Proportion de redoublants

Variables *maître* :

- Nombre d'années d'expérience (avec comme modalités : 1 – moins de 5 ans; 2 – entre 5 et 10 ans; 3 – entre 11 et 15 ans; 4 – entre 16 et 20 ans; 5 – entre 21 et 25 ans; 6 – entre 26 et 30 ans; 7 – plus de 30 ans)
- Appréciation globale des nouveaux moyens (avec comme modalités : 1 – Plutôt négative; 2 – Plutôt positive; 3 – Très positive)

Le coefficient de régression multiple vaut $R^2 = 0.28$, il est statistiquement significatif ($F = 10.44$, $ddl_1 = 5$, $ddl_2 = 132$, $p < 0.05$). Les coefficients de régression sont donnés dans le Tableau 7.13.

	Erreur			
	Coefficient	standard	Valeur t	Valeur p
Ordonnée à l'origine	6.63	120.06	0.06	0.956
Âge moyen	3.88	1.19	3.26	0.001
Proportion de francophones	55.51	16.45	3.38	0.001
Proportion de redoublants	-98.59	37.02	2.66	0.009
Années d'expérience	4.92	1.78	2.76	0.007
Appréciation globale	19.70	7.79	2.53	0.013

TABLEAU 7.13 – *Coefficients de régression de notre modèle le plus parcimonieux expliquant la performance des classes.*

Globalement, nous voyons que deux variables *maître* seulement sont maintenues dans le modèle : le nombre d'années d'expérience d'enseignement et l'appréciation globale des nouveaux moyens. Au niveau des variables *classe*, trois variables structurelles sont importantes : l'âge moyen des élèves, la proportion des élèves francophones et la proportion des redoublants. Ce résultat nous permet d'affiner les résultats déjà exposés dans le paragraphe 7.2. On s'aperçoit ici que l'âge des élèves a un effet positif sur leur performance pour autant que l'on tienne compte des redoublants qui sont des élèves souvent plus faibles et forcément plus âgés.

Nous tenons également à souligner que la variable *canton* a été éliminée de notre modèle. Cela signifie que les différences observées entre les classes sont entièrement dues à des facteurs structuraux ! En corrigeant les résultats obtenus en fonction des paramètres pertinents de notre modèle, nous voyons alors qu'il n'y a plus de différences significatives entre les cantons ($F = 1.38$, $ddl_1 = 6$, $ddl_2 = 131$, $p > 0.05$). Pour s'en convaincre, calculons pour chaque canton l'intervalle de confiance pour la performance moyenne de ses classes. Tous les intervalles contiennent la valeur 500 (voir Figure 7.12).

Ces analyses suggèrent que les résultats d'un élève en mathématiques sont influencés non seulement par le fait qu'il maîtrise ou non le français mais aussi par son environnement scolaire, par la concentration d'élèves non-francophones dans sa classe. S'il côtoie en classe de nombreux camarades non-francophones, il y a plus de risque qu'il progresse moins. Il est notoire que la gestion d'une classe, dans laquelle la diversité culturelle est grande, est plus difficile; la communication y est naturellement entravée et rend moins probable un niveau satisfaisant d'efficacité (Duru-Bellat, 2002, 2003). Un élève sera donc doublement pénalisé si, en plus d'être non-francophone, il est entouré de beaucoup d'élèves ne parlant pas le français à la maison. Mais ce résultat ne devrait en aucun cas encourager la création de systèmes éducatifs élitistes et discriminants car, rappelons-le, la solution des classes hétérogènes,

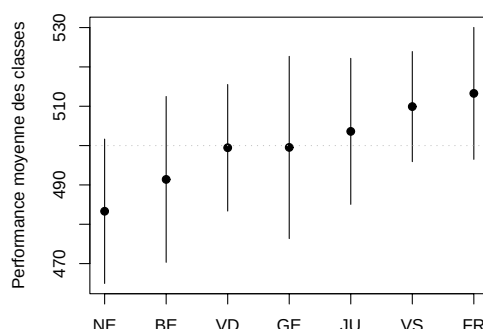


FIGURE 7.12 – *Intervalle de confiance à 95% pour la performance moyenne des classes sans biais structurels selon les cantons. Les moyennes cantonales ne peuvent pas être considérées comme étant différentes.*

qui fonctionne au plus grand bénéfice des plus défavorisés, est une solution collectivement optimale! (Raudenbush & Willms, 1991).

Ce phénomène permet de rendre compte dans une large mesure des différences observées entre les cantons. En Romandie, nous voyons que les cantons les moins bien classés sont ceux dans lesquels les classes sont les plus hétérogènes et contiennent les plus fortes proportions d'élèves étrangers, alors que les cantons qui se retrouvent en tête du palmarès ont des classes qui sont principalement composées d'élèves autochtones. Les cantons prototypes sont les cantons de Genève à une extrémité et de Fribourg à l'autre extrémité (voir Figures 7.7 et 7.13).

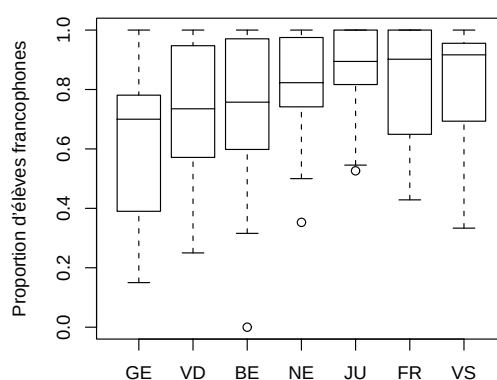


FIGURE 7.13 – *Proportion d'élèves francophones dans les classes selon le canton. Les distributions cantonales sont ordonnées en fonction de leur médiane.*

Conclusion

Les moyens d'enseignement des mathématiques ont changé. Après deux années d'école primaire, durant lesquelles nos jeunes écoliers romands ont pratiqué les mathématiques en réalisant les nombreuses activités proposées par ces nouveaux moyens, qu'ont-ils appris? Cette question était au coeur de notre recherche. Et nous espérons avoir montré au cours de ce travail que l'évolution des compétences des élèves se déroule normalement et que les objectifs fixés par le plan d'étude romand sont visiblement atteints. Les écoliers savent à la fin de leur premier cycle dénombrer une collection, comparer des nombres entiers, compléter une séquence de la suite numérique, décomposer des nombres en centaines, dizaines et unités, reconnaître la valeur positionnelle des chiffres ou encore résoudre des problèmes simples en utilisant des écritures additives et soustractives... Dans le domaine arithmétique, les écoliers ont dépassé le temps de la sensibilisation et manifestent déjà de bonnes compétences.

Dans le domaine géométrique, leurs acquis sont moins homogènes. Si certains semblent très à l'aise lorsqu'il s'agit de découvrir des invariants, de se représenter des transformations, de construire un pavage ou de comparer des mesures, d'autres semblent éprouver d'assez grandes difficultés dans des situations qui requièrent ces compétences. Ce domaine des mathématiques est donc pour un certain nombre d'écoliers encore en friche. L'investissement des enseignants en géométrie est probablement inégal et les différences que nous avons pu observer entre les élèves reflètent vraisemblablement souvent des décalages dans le développement spontané de notions spatiales élémentaires.

La méthodologie proposée par les nouveaux moyens promeut les activités de recherche par l'entremise des situations-problèmes qui, rappelons-le, se caractérisent ainsi (Gagnebin *et al.*, 1997, p. 48) :

- L'élève doit pouvoir démarrer seul.
- La situation doit susciter une démarche de recherche avec répétition d'essais, de conjectures et de vérification.
- La situation doit être autocorrective.
- De nouvelles connaissances doivent être construites.
- La situation-problème doit faire apparaître les connaissances prévues, qui ne prennent du sens que si elles se révèlent nécessaires et efficaces.

Il est très vraisemblable que la diversité et la richesse des réponses fournies par les élèves à nos problèmes (voir Chapitres 4 et 5) soit l'effet de la nouvelle manière d'enseigner les mathématiques.

Les enseignants, quant à eux, apprécient ces nouveaux moyens et relèvent quasiment tous le plaisir que les élèves ont à faire des mathématiques. Ils se plaignent néanmoins de la plus grande difficulté à gérer la classe ainsi qu'à évaluer les élèves. Concernant plus directement les moyens, plusieurs reprochent à la nouvelle méthodologie un manque de structure et de précision et regrettent qu'une progression explicite ou qu'un ordre chronologique des activités ne soient pas offerts. Ils sont aussi nombreux à déplorer le manque d'exercices de consolidation et d'entraînement au calcul mental par exemple. Rappelons que plus de 90% utilisent régulièrement des moyens complémentaires! (voir Chapitre 6).

Globalement, donc, les élèves progressent à un bon rythme et les enseignants malgré les quelques défauts des nouveaux moyens – qu'ils savent pallier par ailleurs – sont satisfaits. Une seule crainte, provoquée par les grandes différences de niveau observées entre les élèves francophones et non-francophones d'une part et entre les non redoublants et les redoublants d'autre part, nous préoccupe. En effet, nous suspectons que ces différences, attendues certes, ne soient accentuées par l'emploi de la nouvelle méthodologie. Nos doutes sont en résonance avec d'autres résultats de recherche.

Bianka Zazzo (1982) étudia comment le milieu social et le niveau mental influencent les conduites d'apprentissage et les comportements manifestés pendant les activités en classe.

Zazzo définit trois types de situations : des situations *cadrees par la tâche*, des situations *cadrees par l'enseignant* et des situations *faiblement cadrees*. Dans une situation *cadree par la tâche*, il s'agit le plus souvent d'un exercice écrit, réalisé avec l'aide de matériel scolaire (fiche, livre, dictionnaire, modèle au tableau); l'activité est limitée dans le temps, l'intervention de l'enseignant est rare. Dans une situation *cadree par l'enseignant*, le maître interroge ou explique, les élèves répondent ou écoutent. Et dans une situation *faiblement cadree*, les interrogations sont collectives et une large marge d'initiative est laissée aux enfants qui peuvent prendre la parole sans être interrogés; dans une telle situation, le rôle de l'enseignant est de stimuler les échanges et relancer la réflexion.

Concernant le milieu social, Zazzo relève que les comportements de *participation active* caractérisent de préférence les écoliers d'origine sociale plus favorisée. Ces comportements sont les plus rares chez les élèves d'origine étrangère qui appartiennent au milieu le plus défavorisé. Cette différence s'observe dans les trois types de situations mais est maximum dans les situations *faiblement cadrees*. Les comportements de *dissipation avec les autres* (bavardages, échanges d'objets, etc.) sont aussi, observe-t-elle, plus fréquents

chez les écoliers socialement plus favorisés. Elles souligne que :

Si, en moyenne, les élèves d'origine plus modeste apparaissent relativement plus «sages», ce qui les caractérise surtout ce sont leur réactions de *passivité* que l'on pourrait considérer comme l'expression d'une certaine inhibition. Ils prennent rarement la parole de leur plein gré, et quand ils sont directement sollicités, leurs réactions sont lentes à se manifester, leurs réponses sont hésitantes. Lorsque d'évidence ils regardent le maître mais n'entendent guère ce qu'il énonce, leurs comportements se caractérisent par ce que nous avons désigné comme «dissipation solitaire» [...]. Ces attitudes de *retrait social* semblent exprimer un sentiment d'incompréhension et d'infériorité par rapport à leurs camarades. (pp. 132-133).

En ce qui concerne le niveau d'intelligence, Zazzo rapporte que les différences en fonction du niveau mental n'ont aucune incidence sur les comportements observés en situation *cadree par la tâche*. Par contre, les modalités de participation en situation *cadree par l'enseignant* ou *faiblement cadree* présentent des relations significatives avec l'âge mental : la participation active caractérise en général les enfants les plus «intelligents», la dissipation solitaire ceux qui le sont le moins.

La plupart des activités des nouveaux moyens demandent aux élèves de faire preuve d'initiative; on s'attend à ce qu'ils s'engagent dans les activités de manière autonome, qu'activement ils fassent des essais, qu'ils émettent des conjectures, qu'ils les vérifient et qu'ils les révisent s'il le faut. Ce genre d'activités correspond à ce que Zazzo nomme des situations *faiblement cadrées*. Il y a donc fort à parier que les écoliers étrangers, non-francophones, d'origine souvent plus modeste que les écoliers suisses, éprouvent plus de difficultés, participent moins et manifestent plus de réactions de passivité. Leur progrès en mathématiques ne peut qu'en pâtir. Pour des raisons similaires les élèves en difficultés sont certainement aussi désavantagés.

Les nouveaux moyens impliquent souvent une très bonne maîtrise de la langue française et valorisent les comportements et les attitudes plus fréquemment rencontrés parmi les écoliers d'origine sociale plus favorisée, ils nuisent ainsi peut-être à l'établissement d'une plus grande équité à l'école. Ces discriminations, pour autant qu'elles soient réelles, devraient être atténuées.

Les enseignants les plus efficaces (Bressoux, 1994) sont ceux qui accordent le plus de temps et d'attention aux élèves en difficultés, ce sont ceux qui savent différencier leur enseignement et adapter leur méthode en fonction des spécificités de chacun de leurs élèves. Les nouveaux moyens n'ont donc pas besoin d'être modifiés ou complétés, mais il faudrait peut-être inciter les enseignants à approfondir leurs connaissances de ces moyens et les encourager à jouer plus fréquemment et plus systématiquement sur les variables didactiques des situations proposées. Par ce jeu, les enseignants s'approprieraient

les nouveaux moyens et pourraient ensuite enseigner les mathématiques plus librement, sans rigidité méthodologique. Il y a en effet de nombreuses façons d'apprendre les mathématiques avec plus ou moins de bonheur... Et ces moyens sont une mine !

Bibliographie

- ANGOFF, W. H. (1971). Scales, norms and equivalent scores. In R. L. Thorndike (Ed.), *Educational measurement* (pp. 508-600). Washington : American Council on Education.
- BECKER, D. F., & FORSYTH, R. A. (1994). Gender differences in mathematics problem solving and science : A longitudinal analysis. *International Journal of Educational Research*, 21(4), 407-416.
- BRESSOUX, P. (1994). Les recherches sur les effets-écoles et les effets-maîtres. *Revue Française de Pédagogie*, 108, 91-137.
- BROUSSEAU, G. (1988). Représentations et didactique du sens de la division. In G. Vergnaud, G. Brousseau & M. Hulin (Eds.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques (Actes du Colloque de Sèvres, mai 1987)* (pp. 47-64). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU, G. (1996). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BRUN, J., CONNE, F., CORDEY, P. A., FLORIS, R., LEMOYNE, G., LEUTENEGGER, F., & PORTUGAIS, J. (1994). Erreurs systématiques et schèmes-algorithmes. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (pp. 203-209). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BRYK, A., & RAUDENBUSH, S. W. (1992). *Hierarchical linear models : Applications and data analysis methods*. Newbury Park : Sage.
- CLAPARÈDE, E. (1933). La genèse de l'hypothèse. *Archives de Psychologie*, 24, 1-155.
- CLEVELAND, W. S. (1981). LOWESS : A program for smoothing scatter-plots by robust locally weighted regression. *The American Statistician*, 35, 54.
- CONNE, F. (1986). *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire*. Lausanne : Couturier-Noverraz.
- DESCAVES, A. (1992). *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes*. Paris : Hachette.

- DURU-BELLAT, M. (2002). *Les inégalités sociales à l'école : Genèse et mythes*. Paris : Presses Universitaires de France.
- DURU-BELLAT, M. (2003). L'école pourrait-elle réduire les inégalités ? *Sciences Humaines*, 136, 36-69.
- FRIEDMAN, L. (1994). Meta-analytic contributions to the study of gender differences in mathematics : The relationship of mathematical and spatial skills. *Journal of Educational Research*, 21(4), 361-371.
- GAGNEBIN, A., GUIGNARD, N., & JAQUET, F. (1997). *Apprentissage et enseignement des mathématiques : Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*. Neuchâtel : Commission romande des moyens d'enseignement (COROME).
- GING, E., SAUTHIER, M.-H., & STIERLI, E. (1996). *Mathématiques 1-2P*. Neuchâtel : Commission romande des moyens d'enseignement.
- GOLDSTEIN, H. (1995). *Multilevel statistical models*. London : Arnold.
- HUTMACHER, W. (1993). *Quand la réalité résiste à la lutte contre l'échec scolaire : Analyse du redoublement dans l'enseignement primaire genevois*. Genève : Service de la Recherche Sociologique.
- JONNAERT, P. (2002). *Compétences et socioconstructivisme : Un cadre théorique*. Bruxelles : De Boeck.
- LORD, F. M. (1955). Equating test scores : A maximum likelihood solution. *Psychometrika*, 20(3), 193-200.
- LUQUET, G. H. (1927). *Le dessin enfantin*. Paris : Alcan.
- MEQ. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise*. Québec : Gouvernement du Québec, Ministère de l'Éducation.
- MINGAT, A. (1996). Qu'est-ce que l'«effet maître» ? *Sciences Humaines (Hors-série)*, 12, 81.
- MOTTIER LOPEZ, L., & TIÈCHE CHRISTINAT, C. (2001). *Les enseignantes de 1P/2P donnent leur avis sur l'enseignement des mathématiques : Analyse des questionnaires dans le cadre du suivi scientifique du nouvel enseignement des mathématiques*. Neuchâtel : IRDP.
- NIDEGGER, C. (Ed.). (2001). *Compétences des jeunes romands : Résultats de l'enquête PISA 2000 auprès des élèves de 9e année*. Neuchâtel : IRDP.
- O'CONNOR, B. P. (2000). SPSS and SAS programs for determining the number of components using parallel analysis and Velicer's MAP test. *Behavioral Research Methods, Instruments, and Computers*, 32(2), 396-402.
- PAPERT, S. (1981). *Jaillissement de l'esprit : Ordinateurs et apprentissage*. Paris : Flammarion.
- PAUL, J.-J. (1997). Le redoublement à l'école : Une maladie universelle ? *Revue Internationale de l'Éducation*, 43, 612-627.

- PERRENOUD, P. (1996). Lorsque le sage montre la lune, l'imbécile regarde le doigt : De la critique du redoublement à la lutte contre l'échec scolaire. *Eduquer et Former, Théories et Pratiques*, 5-6, 3-30.
- PERRET, J.-F. (1985). *Comprendre l'écriture des nombres*. Berne : Lang.
- PERRET, J.-F. (1988). *Connaissances mathématiques à l'école primaire : Présentation et synthèse d'une évaluation romande*. Fascicule introductif. Berne : Lang.
- PIAGET, J., & INHELDER, B. (1948). La mise en relation des perspectives. In J. Piaget & B. Inhelder (Eds.), *La représentation de l'espace chez l'enfant* (pp. 248-291). Paris : Presses Universitaires de France.
- RAUDENBUSH, S.W., & WILLMS, J.D. (Eds.). (1991). *Schools, Classrooms and Pupils : International Studies of Schooling from a Multi-level Perspective*. New York : Academic Press.
- REUCLIN, M. (1985). *La psychologie différentielle*. Paris : Presses Universitaires de France.
- REUCLIN, M. (1991). *Les différences individuelles à l'école*. Paris : Presses Universitaires de France.
- SCHEUER, N., SINCLAIR, A., MERLO DE RIVAS, S., & TIÈCHE CHRISTINAT, C. (2000). Cuando ciento y setenta uno escribe 10071 : niño de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y Aprendizaje*, 90, 31-51.
- SERON, X., DELOCHE, G., & NOËL, M. P. (1991). Un transcodage des nombres chez l'enfant : La production des chiffres sous dictée. In J. Bideaud, C. Meljac & J.-P. Fischer (Eds.), *Les chemins du nombre* (pp. 303-327). Lille : Presses Universitaire de Lille.
- SILVERSTEIN, A. B. (1987). Note on the parallel analysis criterion for determining the number of common factors or principal components. *Psychological Reports*, 61(2), 351-354.
- SNIJDERS, T., & BOSKER, R. (1999). *Multilevel analysis : An introduction to basic and advanced multilevel modeling*. London : Sage.
- TIÈCHE CHRISTINAT, C., & KNUPFER, C. (1999). *Suivi scientifique du nouvel enseignement des mathématiques : Deuxième rapport intermédiaire*. Neuchâtel : IRDP.
- TIÈCHE CHRISTINAT, C. (2000). *Suivi scientifique du nouvel enseignement des mathématiques : Troisième rapport intermédiaire*. Neuchâtel : IRDP.
- TUKEY, J. W. (1977). *Exploring data analysis*. Reading Massachusetts : Addison-Wesley.
- VERGNAUD, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Grand N*, 38, 21-40.
- VERGNAUD, G. (1991a). L'appropriation du concept de nombre : Un processus de longue haleine. In J. Bideaud, C. Meljac & J.-P. Fischer

(Eds.), *Les chemins du nombre* (pp. 271-282). Lille : Presses Universitaires de Lille.

VERGNAUD, G. (1991b). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10, 133-170.

ZAZZO, B. (1982). *Les 10-13 ans : Garçons et filles en CM2 et en sixième*. Paris : Presses Universitaires de France.