

# Il linguaggio come modo di costruire il sapere matematico. Una riflessione originata dal progetto ArAl<sup>1</sup>

Chantal Tièche Crhristinat

*Institut de Recherche et de Documentation Pédagogique, Neuchâtel (CH)*

## 1. Introduzione

Il progetto ArAl cerca di *dare senso all'insegnamento della matematica*; più particolarmente ha per scopo di ripensare le relazioni fra aritmetica e algebra e, di conseguenza, di rendere visibile nell'istituzione scolastica questo lavoro sul sapere. Il mio contributo si focalizza su questi due aspetti del progetto: la costruzione del *rapporto al sapere* e la messa in pratica nelle classi della *conquista del senso*.

La collaborazione fra docenti e ricercatori che caratterizza il progetto ArAl costituisce una forza. Altri luoghi e altri progetti - come la scuola Jules Michelet a Talence (Bordeaux), guidata dal professor Brousseau - dichiarano questa collaborazione come un pilastro fondamentale. In particolare, MH Salin e D. Greslard (1998) insistono sull'efficacia del dialogo.

Le situazioni didattiche importanti dal punto di vista dell'ingegneria didattica vengono analizzate in modo approfondito allo scopo di favorire un approccio epistemologico che metta in luce i saperi e le conoscenze in gioco. D'altro canto, l'osservazione in classe permette di cogliere sia la pertinenza della situazione didattica proposta che gli effetti dovuti alla sua trasposizione didattica.

Altre esperienze, di natura un po' diversa, costituiscono il frutto della collaborazione fra docenti e ricercatori nella creazione di libri o di testi per l'insegnamento della matematica (Dimat, ...; Dellagana, 2002) - come i libri di testo della Svizzera Romanda (Tièche, 1998) - o nelle ricerche in didattica della matematica condotte a Ginevra (A. Flückiger; F. Leutenegger). In tutti questi casi la collaborazione ha differenti caratteristiche, ma le descrizioni insistono sulla loro produttività, sia per i protagonisti implicati nel processo che per il progresso della didattica come scienza dei fenomeni di trasmissione del sapere. Infatti, il sapere costruito in precedenza dai ricercatori sull'oggetto matematico e la sua trasposizione nell'insegnamento, legata alle presunte capacità degli alunni, sono introdotti e rielaborati in queste diverse sperimentazioni da parte sia dei ricercatori che degli insegnanti. Infatti, discutere e sperimentare nella classe varie e nuove situazioni didattiche, scegliere i diversi aspetti matematici da prendere in considerazione durante lo svolgimento dell'azione d'insegnamento, tenere conto delle conoscenze necessarie allo studente per *percepire* il problema e riuscire e catturarle, incide profondamente sul rapporto con il sapere dei docenti. Allo stesso tempo, questa riflessione ha un valore anche per il ricercatore, che a sua volta verrà condotto a pensare in un altro modo l'oggetto d'insegnamento.

Lo spazio dato al linguaggio come sistema fatto di regole (sintattiche e semantiche) è un altro punto che mi pare molto interessante e innovativo nel progetto ArAl. Se l'idea principale che attraversa tutto il progetto consiste nello sviluppo del linguaggio algebrico attraverso l'evoluzione del "balbettio algebrico", l'analogia fatta con lo sviluppo della lingua materna induce a porsi numerose questioni. L'ipotesi «che vi sia una analogia fra le modalità dell'apprendimento del linguaggio naturale e del linguaggio algebrico» (p.2) attualizza di fatto due principi della pedagogia, il *principio sociocostruttivista* e *l'importanza del linguaggio nella coppia imparare/insegnare*.

---

<sup>1</sup> Testo originale scritto dall'autore in italiano. Revisione di Giancarlo Navarra.

La posizione centrale data al linguaggio nelle teorie cognitive e, in particolare, in pedagogia, è abbastanza recente.

Per molti anni *il linguaggio* è stato considerato rivelatore di fenomeni del pensiero; benché non sottommesso ad esso, ma si è ritenuto che svolgesse un ruolo secondario nella costruzione dell'intelligenza, mentre *l'azione* è stata vista come estremamente potente, prefigurando la struttura delle classi e delle relazioni così come le proprietà degli oggetti (Piaget & Inhelder, 1966). Tuttavia, si è cominciato a comprendere come il linguaggio “strutturato con delle leggi generali di coordinazione che si manifestano nelle azioni sensorio-motrici prima di trovarsi sul piano delle funzioni semiotiche” (Piaget, 1967, p. 381) non soltanto serva ad accompagnare le azioni, ma permetta anche di fissare ed anticipare le condotte. (Réussir et Comprendre, Piaget, 1974). Questa considerazione essenziale ha portato a concludere che la conoscenza degli oggetti e delle loro proprietà procedono indirettamente dal linguaggio anche se il suo ruolo veniva considerato complementare all'azione essendo utile, ma non necessario, allo sviluppo cognitivo. Tale riconoscimento dell'importanza del linguaggio è il frutto delle tensioni epistemologiche fra il linguaggio e il pensiero. Successivamente, l'apporto del sociocostruttivismo sottolineerà, in particolare, il ruolo del linguaggio nella costruzione delle conoscenze e dei saperi culturali; considerato come mediatore fra conoscenza e sapere, il linguaggio diventa interfaccia che rivela i processi di pensiero degli attori e a sua volta processo di costruzione e vettore dello sviluppo cognitivo.

Le parole spiegano in una certa misura, o almeno lasciano intravedere, lo stato del sapere (Vergnaud, in Clot p. 25, 1999) così come il tipo di concettualizzazione che sta alla sua base.

Questa base teorica - costitutiva di numerosi libri di testo di matematica, ma anche di quelli relativi ai diversi campi delle scienze (ERMEL, Stegen et Sacré, *Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 5/8*, Bruxelles: Labor, 2000; VLASSIS, Joëlle et DEMONTY, Isabelle, *L'algèbre par des situations-problèmes au début du secondaire*, guide méthodologique et CD-ROM, Bruxelles: De Boeck, 2002; DE VECCHI, Gérard et CARMONA-MAGNALDI, Nicole, *Faire vivre de véritables situations-problèmes*, Paris: Hachette éducation, 2002), oltre che del progetto ArAl - fissa il contesto nel quale la didattica attuale opera, e determina in parte gli indirizzi della ricerca e delle osservazioni recenti a proposito dell'atto d'insegnamento. Insistendo sugli aspetti metalinguistici e metacognitivi, come strumenti per imparare, il progetto ArAl ha lo scopo di favorire la continuità tra il pensiero aritmetico e il pensiero algebrico, vedendo nel linguaggio<sup>2</sup> e nella semiotizzazione una chiave per sviluppare anche operativamente le relazioni fra questi due campi della matematica.

Il linguaggio diventa centrale, come viene sottolineato nei tre seguenti punti (Progetto ArAl p. 6):

1. “... l'introduzione di opportuni mediatori didattici come provvisori strumenti pedagogici al fine di stabilire dei collegamenti semantici fra conoscenze preesistenti e informazioni nuove”;
2. “... l'attivazione di situazioni di discussione in 'classi di matematica' che comportino la pratica costante della verbalizzazione, dell'argomentazione e del confronto con l'obiettivo di una costruzione socialmente condivisa delle conoscenze; queste situazioni favoriscono lo sviluppo di competenze metacognitive e metalinguistiche”;
3. “... una concezione che conduca, attraverso l'introduzione graduale dei simboli, ad una visione della matematica come linguaggio, dotato di una sua semantica di una sua sintassi, e quindi favorisca il passaggio dal linguaggio naturale a quello simbolico come processo di traduzione fra linguaggi diversi”.

<sup>2</sup>. «L'ipotesi forte del progetto ArAl è che vi sia una analogia fra le modalità dell'apprendimento del linguaggio naturale e del linguaggio algebrico» (p.2).

A volte il linguaggio è trattato come sistema linguistico con le sue regole di sintassi e di semantica e a volta è preso come parola per favorire la comunicazione interpersonale al fine di fare circolare il senso. In ogni caso è sottolineata l'idea di una lenta acquisizione, disseminata di errori e di successi come succede nello sviluppo del linguaggio naturale. La pedagogia attuale accorda al linguaggio un ruolo molto importante; diverse osservazioni e scritti mostrano che la sua gestione assuma dei contorni inattesi che influenzano la sequenza didattica (Tièche Christinat, 2004; Mottier-Lopez, 2003).

## 2. La modificazione del rapporto con il sapere

Il rapporto con il sapere si sviluppa tra un individuo e un oggetto all'interno di un quadro di intenzionalità. Si distingue dunque così il rapporto con il sapere dal rapporto con le conoscenze, il primo appartenendo all'ordine della costruzione culturale, e il secondo all'ordine delle acquisizioni del soggetto. Questo fenomeno non si sviluppa da solo, ma si coniuga nell'ambito del rapporto con il mondo, con l'altro e con se stessi. Per Chevallard, ogni opera prodotta è considerata come un oggetto col quale il soggetto ha un rapporto personale di sapere; poiché tutti gli oggetti d'insegnamento sono delle opere prodotte con intenzionalità, a maggior ragione si tessono dei rapporti di sapere ad ogni incontro con questi oggetti.

Il modo in cui si sviluppa la conoscenza di un oggetto definisce l'universo cognitivo che lega l'individuo a questo oggetto. Per esempio, il rapporto personale nei confronti dell'oggetto di sapere "albicocca" dipende delle esperienze cognitive e pratiche che se ne ha. L'universo cognitivo non è stabilito, ma evolve, cambia secondo la natura delle nuove esperienze che si acquisiscono su questo frutto e del contesto nel quale si trova. Per esempio, se il contesto è la scuola, e più precisamente una lezione di scienze naturali, il sapere scoperto non sarà lo stesso di quando si parla di dietetica, o mentre si fa uno stage di sport. Le conoscenze che si sviluppano e si costruiscono personalmente, occasionalmente e in diversi luoghi, per esempio nella propria casa, rinforzano o trasformano la natura del rapporto con il sapere, benché non possano essere loro sole all'origine del sapere come definito qui sopra.

Per qualsiasi oggetto di sapere, ognuno mantiene un rapporto personale pubblico - dipendente dai suoi incontri e dall'istituzione all'interno della quale li realizza - e un rapporto privato. Se l'universo cognitivo nasce da esperienze diverse, il rapporto pubblico consente la costruzione delle conoscenze *comuni* riguardo all'oggetto, mentre altre conoscenze specifiche dimorano nell'individuo, e sono del tutto personali.

L'istituzione scolastica s'interessa della costruzione del rapporto personale pubblico con l'oggetto e ne definisce le caratteristiche e le condizioni d'apprendimento. Tuttavia, mentre si costruisce il rapporto *pubblico* che l'alunno deve - o dovrebbe - costruire, questi sviluppa in parallelo un rapporto *privato* con l'oggetto (ad esempio: interesse o mancanza d'interesse verso la matematica o verso un argomento particolare della materia, la paura di non sapere, il piacere di cercare, anche se non sa ancora bene come fare, la facilità o la difficoltà di riuscire, ecc.)<sup>3</sup>.

Il ruolo del docente è di stabilire un contratto che renda compatibili i due rapporti – pubblico e privato - in modo da rendere possibile il suo compito. Il dinamismo del rapporto verso il sapere, sinonimo del rapporto verso l'imparare, secondo Charlot sarà funzione della qualità delle relazioni fra il rapporto privato e il rapporto pubblico con l'oggetto di sapere. La teoria di Chevallard sottolinea che, a meno che la persona non prenda una posizione da adulto (per esempio: attraverso la paura di cambiare ) che la porta a una posizione statica, il rapporto con il sapere è sempre diverso.

<sup>3</sup> In certi casi, il rapporto privato del docente condivide le medesime caratteristiche.

Col progetto ArAl e le condizioni della sua realizzazione, attraverso il dialogo e la collaborazione, grazie ai differenti esperimenti in classe, troviamo alcune piste da seguire nella classe di matematica per favorire il cambiamento. Ciò che i docenti hanno vissuto insieme nell'elaborazione dell'innovazione dovrebbe poter essere vissuto analogamente dagli allievi, nella costruzione comune di un nuovo sapere. Ora esamineremo più in particolare, senza la pretesa di essere esaustivi, gli aspetti legati alla collettività e alla diversità.

### **La collettività**

Nell'insegnamento classico, spesso, lo sforzo di cambiamento è individuale, mentre i didattici sottolineano che il processo di cambiamento è collettivo, o è facilitato, per l'individuo che appartiene a un tribù o ad un gruppo in movimento (Chevallard, 2003). L'integrazione fra errori e successi parziali non è una condizione sufficiente per assicurare il processo di cambiamento. *L'elaborazione collettiva* sembra essere centrale. Nel progetto ArAl, il docente elabora con i ricercatori un certo oggetto matematico; il dinamismo cognitivo che in questo modo ne emerge permette alle sue conoscenze di diversificarsi, attraverso un processo di cambiamento graduale collettivo. La conoscenza è qui una conoscenza co-costruita, e il docente impegnato in questa attività stabilisce un rapporto differente con l'oggetto.

### **La diversità**

Il sapere attraverso le numerose discussioni si modifica e si arricchisce di nuove forme e di nuove esperienze. Il dinamismo cognitivo che emerge da questo ribollimento cognitivo permette alle conoscenze di diversificarsi. Nel progetto ArAl l'aritmetica non è più concepita come la scienza dei numeri opposta all'algebra - vista come l'arte di risolvere dei problemi usando delle lettere per rappresentare delle misure - né l'aritmetica e l'algebra sono viste come due campi separati. Grazie ad un'ampia gamma di situazioni didattiche, a diverse modalità di risoluzione, alla presentazione di diversi tipi di problemi, e anche attraverso l'indispensabile gioco delle variabili da introdurre nelle situazioni problematiche, il docente può mettere la classe in condizioni simili a quelle che lui stesso ha vissuto e che permettono all'alunno, a sua volta, di scoprire la continuità o il parallelismo fra l'aritmetica e l'algebra ma, allo stesso tempo, le particolarità e le proprietà di ognuna di esse. In più, la varietà delle situazioni, e in particolare l'introduzione di variabili che modificano l'ambiente di apprendimento, devono permettere agli studenti di risolvere ogni problema secondo i loro propri ritmi e a partire dalle loro conoscenze rispettando il fatto che il rapporto con il sapere, anche se è il risultato dello stesso insegnamento, non è identico fra i diversi individui della medesima istituzione (per esempio, qui, la classe).

## **3. L'uso del linguaggio nella classe di matematica**

Nelle situazioni in classi di matematica la parola diventa centrale, e diverse ricerche in didattica si preoccupano del vero ruolo che essa svolge nell'atto dell'insegnare. Mentre diversi lavori confermano l'importanza della dialettica azione – formulazione, come sottolineata da Brousseau (1996), altri si concentrano sull'interazione sociale che si svolge necessariamente durante un atto di formazione.

Gilly, Roux et Trognon (1997) dimostrano che le interazioni sociali, al centro del processo didattico, sono inevitabilmente sottomesse al linguaggio, si fanno e si disfano in lui. La natura fortemente semiotizzata dell'atto d'insegnamento/apprendimento obbliga a considerare le condotte linguistiche e il contenuto semantico e sintattico dei differenti poli del triangolo pedagogico (alunno – docente – oggetto di insegnamento). In più, il linguaggio non fa soltanto parte della situazione didattica, ma costituisce in sé un contesto nel quale il processo d'insegnamento si svolge. Possiamo

dunque sottolineare con Greeno (1997) che, a questo titolo, *il linguaggio* contribuisce all'elaborazione delle conoscenze in un ruolo analogo a quello che ha *il contesto* nelle teorie del 'situated learning'.

Le didattiche attuali associate alla corrente pedagogica del sociocostruttivismo accordano al linguaggio un ruolo molto importante. Il progetto ArAl partecipa di questo movimento con un approccio molto strutturato che permette di concatenare, attraverso il linguaggio, aritmetica e algebra. L'ipotesi che

*"... vi sia una analogia fra le modalità dell'apprendimento del linguaggio naturale e del linguaggio algebrico» (p.2)*

permette di sottolineare che il significato non è a priori contenuto nel significante, ma che c'è bisogno d'una mediazione culturale che concretizzi (?) il legame fra di loro. Secondo Vygotsky, la parola assume una funzione di grandissima importanza fra i diversi protagonisti della situazione. La conoscenza condivisa del suo codice, della sue regole di strutturazione, dal punto di vista sia della sintassi che della semantica e dalla pragmatica, permette di co-costruire il senso di una situazione. Benché esista un ambito nel quale la parola è essenziale dal punto di vista della organizzazione delle lezioni, il linguaggio non è da considerare soltanto come intorno sociale, ma occupa una funzione maggiore per lo sviluppo delle conoscenze e del sapere.

Come sottolineano le teorie alle quali ci stiamo riferendo, e lo stesso progetto ArAl, bisogna attribuire, sia a livello metodologico che, poi, nella pratica didattica, un ruolo centrale alla parola. Una lezione di matematica è strutturata attraverso diverse fasi generali (consegna - azione – formulazione – validazione – istituzionalizzazione)<sup>4</sup> che non accordano alla parola lo stesso ruolo o la stessa importanza. La fase didattica della "formulazione" pare essere centrale per fare emergere l'argomentazione, le congetture e le prove. Il dibattito in classe che prende spesso la forma di una collettivizzazione delle procedure e delle strategie trovate dagli alunni è una forma possibile della fase della *formulazione*. Il suo ruolo è molto importante, come sottolinea Brousseau, poiché entra in gioco con l'azione e la validazione, ed è da lei che dipende la risoluzione. Inoltre la formulazione permette di esplicitare le conoscenze implicite, cioè le conoscenze in atto che hanno condotto alla risoluzione totale o parziale della situazione-problematica. Se sono importanti per il docente, permettendogli di capire il ragionamento dell'alunno, dovrebbero servire soprattutto agli allievi per costruire le conoscenze. Nel progetto ArAl si definisce anche la formulazione come una condizione didattica necessaria all'insegnamento/apprendimento.

*"L'attivazione di situazioni di discussione in 'classi di matematica' che comportino la pratica costante della verbalizzazione, dell'argomentazione e del confronto con l'obiettivo di una costruzione socialmente condivisa delle conoscenze; queste situazioni favoriscono lo sviluppo di competenze metacognitive e metalinguistiche; ... (p.6)*

Tuttavia nelle classi osservate che applicano una metodologia ispirata a questa corrente didattica, la pratica della formulazione, intesa come un momento fondamentale per dare senso all'oggetto studiato, pare incontrare difficoltà nella sua applicazione. I maggiori problemi osservati nelle lezioni di matematica sono di parecchi tipi. Alcuni di questi mettono in luce la difficoltà di porre gli alunni davanti alla situazione problematica facendo in modo che non si smarriscano e non si scoraggino di fronte a possibili ostacoli.

1. La formulazione non serve di base all'azione, ma è condotta come fase conclusiva, e non permette di ritornare all'attività. Questo succede spesso quando l'attività di risoluzione ha

<sup>4</sup> Secondo la teoria di Brousseau.

preso più tempo del previsto (problema di gestione del tempo didattico) o quando il modo di organizzazione delle attività in diversi luoghi, con diversi gruppi che non finiscono nello stesso tempo.

2. La formulazione è fatta troppo precocemente e il problema non è devoluto all'insieme degli alunni. L'insegnante ricorre all'esplicitazione verbale data o da un alunno o anche fatta da lui, inducendo le procedure da scegliere (= 'effetto Topaze'<sup>5</sup>).

3. L'alunno pensa che ciò che è detto non è giusto o non gli serve, quindi la formulazione entra in conflitto con la sua azione e le sue conoscenze. La formulazione non produce significati, cioè entra in crisi durante l'attività perché non permette all'alunno di riuscire come diceva o intendeva il suo compagno. L'alunno si fida della sua azione, perché l'azione supera il linguaggio al suo livello di sviluppo cognitivo.

4. L. Mottier-Lopez ha notato durante osservazioni che certi studenti adottavano un'attitudine simile a quella del professore. Spiegavano, riformulavano, argomentavano i loro modi finché il compagno accetta la soluzione proposta. Di fatto, un contratto didattico prendeva forma fra di loro. E la discussione non permette più all'alunno di incontrare una situazione che sia antagonista e che necessita di adattare le conoscenze.

## Conclusioni

Queste analisi indicano che la gestione della fase di *formulazione* è delicata. Fatta troppo presto dopo avere dato il problema da risolvere agli alunni, non c'è devoluzione del problema agli alunni. Al contrario, se fatta troppo tardi, il modello implicito dell'azione è troppo efficace e rende inutile la formulazione. Inoltre se la formulazione diventa troppo complessa, o troppo formale, la comunicazione del senso e l'uso del repertorio comune si perdono. La delicatezza della fase di formulazione, sia da parte degli alunni che cooperano, che da parte del professore che tenta di formulare o di riformulare, è reale. Ma la sua importanza è centrale, come nota N. Rouche in un breve articolo (2004), perché permette di prendere in carico il ragionamento, le congetture e le prove così come le diverse proprietà degli oggetti matematici. Inoltre fonda poco a poco le basi della struttura della matematica, dimostrando che l'oggetto può essere formalizzato attraverso un linguaggio che segue le sue regole e ha la sua propria sintassi. Nella classe, la dialettica dell'azione e della formulazione dunque assicura la costruzione degli concetti scientifici e gli insegnanti e la metodologia usata hanno la responsabilità di condurre gli alunni, attraverso l'azione e il dire, a questa elaborazione.

---

<sup>5</sup> L'effetto Topaze riconduce ad una commedia di Molière, in cui un giovane allievo dell'alta borghesia deve imparare a scrivere correttamente nella lingua francese. L'istitutore – per l'appunto il signor Topaze - sta insegnandogli che le parole scritte, al plurale, acquistano la -s, che però, nel parlare, non viene pronunciata. Sta dettando la parola 'moutons' (montoni) e vorrebbe che l'allievo capisse dal contesto della frase che si tratta di un plurale. Naturalmente non pronuncia la 's', e si accorge che lo studente sta scrivendo 'mouton'. Volendo fare bella figura con un genitore che assiste alla lezione, si mette a sibilar sempre più forte la 's' finché l'allievo si illumina e scrive correttamente 'moutons'. Naturalmente lo fa non perché abbia capito la regola, ma per pura imitazione di ciò che ha fatto l'istitutore.

## Bibliografia

- Brousseau, G. (1996). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, in J. Brun (sous la dir. de), Didactique des mathématiques. Lausanne: Delachaux et Niestlé
- Chevallard, (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques, in: Maury Sylvette. Dir.; Caillot Michel. (Dir.) Rapport au savoir et didactiques. Paris: Editions Fabert
- Carmona-Magnaldi, N.; & De Vecchi, G. (1996). Faire construire des savoirs. Paris: Hachette éducation
- Dellagana, I.; & Losa, F. (2002) DIMAT Differenziare in matematica. Bellinzona: Salvioni
- Charnay, R. & Douaire, J. (1991). Apprentissages numériques et résolution de problème au cycle élémentaire. Paris: Hatier
- Francia Leutenegger (2000). Contribution à la théorisation d'une clinique pour le didactique, Trois études de cas en didactique des mathématiques. Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Université de Genève
- Flückiger, A. (2000). Genèse expérimentale d'une notion mathématique: la notion de division comme modèle de connaissances numériques, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle. Université de Genève
- Gilly, M., Roux, J-P.; & Trognon, A. (1997). Apprendre dans l'interaction. Analyse des médiations sémiotiques. Nancy et Aix en Provence: Presses Universitaires de Nancy et Presses de l'Université de Provence Greeno
- Mottier Lopez, L. (2003). Les structures de participation de la microculture de classe dans une leçon de mathématiques. Revue Suisse des Sciences de l'Education, 1, 161-184
- Piaget, J. (1967). La psychologie de l'intelligence, Paris. Armand Colin
- Piaget, J. (1974). Réussir et Comprendre. Paris: PUF
- Piaget, J.; & Inhelder, B. (1966). La psychologie de l'enfant et de l'adolescent. Paris: PUF
- Progetto ArAl, Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero algebrico. <http://www.aralweb.it/>
- Rouche, N. (2004). Huit points de vue pour repenser son enseignement en mathématiques. APMEP- PLOT, 109, 2-5
- Salin, MH; & Greslard; D.(1998) la collaboration entre chercheurs et enseignants dans un dispositif original d'observation de classes: le Corem.. Actes de la CIEAEM.: Les liens entre la pratique de la classe et la recherche en didactique des mathématiques. Neuchâtel, 2-7 août 1998, Neuchâtel
- Stegen et Sacré; (2000). Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 5/8 / Bruxelles: Labor
- Tièche Christinat, C. (1998). Suivi scientifique du nouvel enseignement des mathématiques. Neuchâtel: IRDP (Recherches 98.1001)
- Tièche Christinat, C. (2004)
- Vergnaud, G. (1999). On n'a jamais fini de relire Vygotski et Piaget. IN: Yves Clot (dir.) Avec Vygotski. Paris. La Dispute. (pp. 55-68)
- Vlassis, J; & Demonty, I.(2002). L'algèbre par des situations-problèmes au début du secondaire: guide méthodologique et CD-ROM Bruxelles: De Boeck

Progetto ArAl, Quaderno n.4 est disponible en  
texte complet à l'adresse Internet suivante:  
<http://www.aralweb.it/Home/index.asp?IDCanale=6>