GUIGNARD, N. & ANTONIETTI, J.-Ph. (2005). Les résultats des élèves en mathématiques. In Ch. Nidegger (éd.), **PISA 2003 : compétences des jeunes romands : résultats de la seconde enquête PISA auprès des élèves de 9e année** (pp. 111-133). Neuchâtel : Institut de recherche et de documentation pédagogique (IRDP)

5. Les résultats des élèves en mathématiques

Ninon Guignard
Jean-Philippe Antonietti

Introduction

Sous-domaines mathématiques et mesure des compétences

Les compétences des élèves dans le domaine des mathématiques sont évaluées à travers quatre sous-domaines : *Espace et formes, Variations et relations, Quantité* et *Incertitude.*

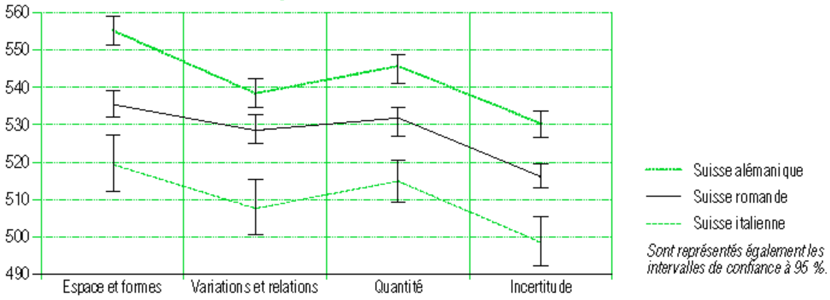
Ces compétences sont mesurées selon des échelles standardisées. Par convention et pour simplifier l'interprétation des résultats, les scores de chaque échelle ont été ajustés de telle sorte que la moyenne des élèves de 15 ans des pays de l'OCDE égale 500 points et que deux tiers de ces élèves obtiennent un score compris entre 400 et 600 points.

En complément aux échelles standardisées, six niveaux de compétences ont été définis (voir encadré ci-dessous). Aux niveaux les plus bas (1 et 2), les élèves sont capables de résoudre des problèmes simples dans lesquels toutes les informations pertinentes sont fournies explicitement; à ces niveaux, ils savent également exécuter des algorithmes et appliquer une formule. Aux niveaux intermédiaires (3 et 4), les élèves sont capables de résoudre des problèmes plus complexes qui nécessitent l'intégration de différentes représentations. Aux niveaux les plus élevés (5 et 6), les élèves sont capables de mener des raisonnements mathématiques raffinés et font preuve d'une grande imagination mathématique qui leur permet de résoudre de manière originale des problèmes nouveaux.

Profils des résultats

Généralement, en Suisse, dans les régions et dans les cantons, *Espace et formes* est le sous-domaine avec les meilleurs résultats, vient ensuite *Quantité*, puis *Variations et relations*, *Incertitude* étant nettement moins bien réussi (graphique 5.1).

Graphique **5.1** **Performances régionales dans les quatre sous-domaines des mathématiques**



Les élèves de Suisse romande obtiennent des résultats très similaires dans les trois premiers sous-domaines qui touchent à des champs notionnels très étudiés à l'école. *Incertitude*, quant à lui, comportant des tâches peu abordées par les différents plans d'études cantonaux, est situé un peu plus bas. C'est pour cette raison qu'il fait l'objet d'une analyse un peu plus développée que les trois autres.

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord la définition des niveaux de compétences en mathématiques et la répartition des élèves selon ces niveaux, en fonction des cantons. Ensuite, nous décrirons les résultats qu'obtiennent les élèves romands dans chacun des quatre sous-domaines des mathématiques. Pour chaque sous-domaine, nous procéderons toujours de la même manière. Après une brève définition, nous comparerons la distribution des performances des élèves selon les cantons, puis examinerons leur répartition dans les différents niveaux de compétences. Ensuite nous tenterons, à travers l'analyse de quelques problèmes, de rendre compte plus précisément de ce que les élèves sont capables de faire. Cette tâche n'est pas aisée car la proportion des problèmes rendus publics est faible.

Description des niveaux de compétences en mathématiques, PISA 2003

Niveau 6 (au-dessus de 668.7)

Conceptualiser, généraliser et utiliser des informations se référant à des problèmes complexes. Mettre en relation diverses sources d'informations et formes de représentation, puis combiner les divers éléments. Développer de nouvelles approches et stratégies permettant de gérer des situations inconnues.

Niveau 5 (entre 606.6 et 668.7)

Développer des modèles pour des situations complexes et les utiliser. Choisir, comparer et évaluer des stratégies de résolution de problèmes appropriées en vue de gérer des situations complexes. Appliquer, au moyen de formes de représentation adéquates, des connaissances adaptées à des situations données ; travailler selon une stratégie.

Niveau 4 (entre 544.4 et 606.6)

Utiliser avec succès des modèles explicites pour des situations complexes. Choisir et intégrer différentes formes de représentation, puis les relier directement à des situations réelles ; argumenter avec souplesse.

Niveau 3 (entre 482.4 et 544.4)

Exécuter des procédures clairement décrites, aussi celles qui requièrent des décisions successives. Utiliser et interpréter des représentations fondées sur plusieurs sources d'informations, puis en tirer directement des conclusions.

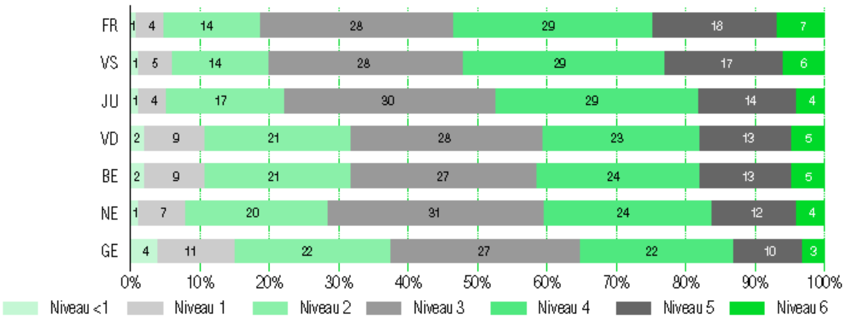
Niveau 2 (entre 420.4 et 482.4)

Extraire d'une seule source les informations pertinentes et comprendre une forme de représentation isolée. Appliquer des algorithmes, formules, procédures ou conventions élémentaires.

Niveau 1 (entre 358.3 et 420.4)

Répondre à des questions qui sont formulées de manière familière, contiennent toutes les informations nécessaires et sont clairement définies. Exécuter des procédures de routine sur instruction directe.

Graphique **5.2** **Répartition des élèves par niveaux de compétences en mathématiques**



Nous observons que, quel que soit le canton, les niveaux extrêmes représentent relativement peu d'élèves. Peu d'entre eux se situent au niveau égal ou inférieur à 1, mais peu d'élèves aussi atteignent les plus hautes performances. Toutefois, si l'on regroupe les niveaux 5 et 6, Fribourg et le Valais sont en tête. Puis viennent le Jura, Vaud, Berne et Neuchâtel. Genève, qui se situe en dernière position, a aussi le nombre le plus élevé d'élèves n'atteignant que les niveaux les plus bas.

Espace et formes

Notions et résultats généraux

PISA explore le champ de l'espace et de la géométrie à travers quinze problèmes et vingt questions relatives aux propriétés et aux transformations des figures géométriques, des solides et du plan, ainsi qu'à la mesure de distance, de périmètre et d'aire. La résolution de la plupart de ces problèmes permet également d'inférer les représentations que les élèves se font de l'espace, de leur capacité à imaginer des transformations et des déplacements ainsi que leur aptitude à changer de point de vue.

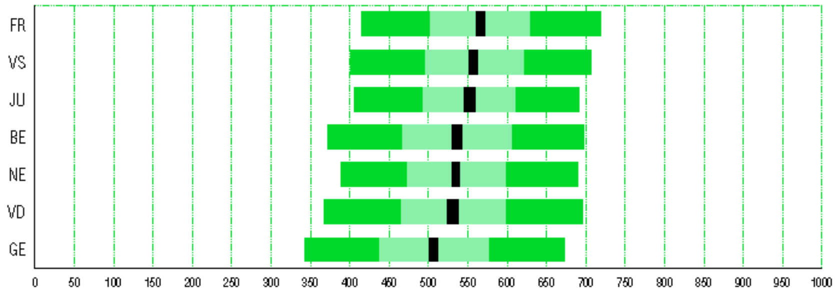
C'est dans ce sous-domaine *Espace et formes* que les élèves présentent le meilleur taux de réussite.

Les élèves se font en général une bonne représentation mentale des déplacements et des transformations de figures ou de solides. Ils imaginent presque sans difficulté le dépliement d'un dé à jouer, la rotation de figures complexes et savent apprécier ce qu'on voit d'une tour octogonale suivant la distance à laquelle se place l'observateur. En revanche, la mesure du cercle et la différenciation aire-périmètre n'est pas une connaissance encore à disposition chez de nombreux élèves.

Comparaisons intercantonales

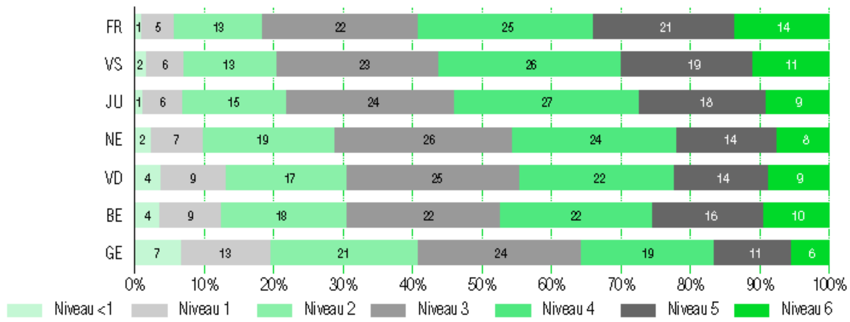
Le graphique 5.3 montre que les cantons se répartissent en trois groupes, d'abord Fribourg, Valais et Jura qui présentent les meilleures performances dans le sous-domaine *Espace et formes*, puis viennent les cantons de Berne, Neuchâtel et Vaud, et, enfin celui de Genève, dont le niveau est proche de la moyenne des élèves de 15 ans des pays de l'OCDE mais inférieur à la moyenne romande.

Graphique **5.3** Résultats moyens dans le sous-domaine *Espaces et formes*



Concernant les niveaux de compétences, on observe que Fribourg, Valais et Jura sont les trois cantons de tête avec une proportion d'élèves présentant un niveau moyen ou élevé (c'est-à-dire un niveau supérieur ou égal à 3) qui avoisine 80%. Pour trois autres cantons, Neuchâtel, Vaud et Berne, cette proportion se situe aux alentours de 70%; enfin, Genève est le canton qui comporte en géométrie la plus forte proportion d'élèves faibles et la plus faible proportion d'élèves forts (graphique 5.4).

Graphique **5.4** Répartition par niveaux de compétences dans le sous-domaine *Espace et formes*



Compétences et difficultés

L'approche précoce de l'espace semble porter ses fruits car les élèves réussissent bien les problèmes relatifs à la représentation mentale d'un déplacement, d'une rotation ou d'un dépliement de solide.

Examinons plus en détail les réponses fournies au problème *Dés à jouer*.

Dés à jouer

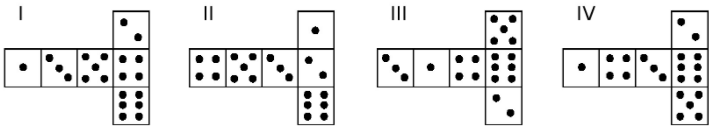
Le dessin à droite représente deux dés.

Les dés sont des cubes avec des faces numérotées selon la règle suivante :

La somme des points figurant sur deux faces opposées doit toujours être égale à 7.

Vous pouvez aisément réaliser un dé en découpant, pliant et collant du carton. Cela peut se faire de plusieurs manières. Ci-dessous, vous pouvez voir quatre découpages qui peuvent être utilisés pour faire des dés, avec des points sur les faces.

Parmi les découpages ci-dessous, lequel ou lesquels peu(ven)t être plié(s) de manière à former un dé qui obéit à la règle selon laquelle la somme des faces opposées est égale à 7 ? Pour chacun des découpages, entourez soit «Oui», soit «Non» dans le tableau ci-dessous.



86% des élèves romands ont réussi cette question de difficulté intermédiaire : ils ont choisi les bons dépliements et ont été capables de repérer les faces opposées du dé dont la somme des points vaut toujours 7.

Toutes les opérations mentales ne connaissent pas le même succès. Dans un autre problème, lorsqu'il s'agit de trouver le nombre de parallélépipèdes rectangles d'une construction vue de face et de dos, le pourcentage de réussite tombe presque de moitié. Dans ce cas, l'erreur principale consiste à donner le nombre de pièces visibles, ce qui signale l'incapacité de faire la synthèse entre deux représentations graphiques ou celle de faire converger deux points de vue différents d'un même objet.

En géométrie, les principales sources d'erreurs proviennent le plus souvent d'une insuffisance de construction des concepts, ce qui entraîne des confusions et des manques de différenciation, par exemple entre périmètre et aire d'une figure, entre hauteur et hypoténuse d'un triangle rectangle ou entre base et hauteur d'un trapèze.

L'analyse des résultats montre aussi que beaucoup d'élèves appliquent un savoir à mauvais escient. Il y a souvent un écart considérable entre l'acquisition d'une notion et la compétence à en faire un outil pour résoudre des problèmes.

Variations et relations

Notions et résultats généraux

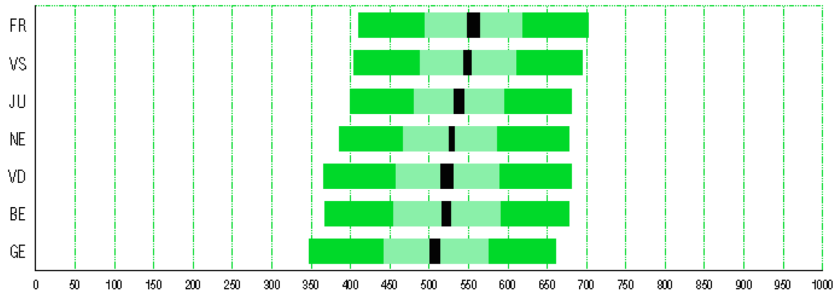
De solides acquisitions dans des champs notionnels aussi vastes que ceux des applications, des fonctions, des relations d'égalité ou d'inégalité sont nécessaires pour résoudre les problèmes de *Variations et relations* mais ne sont pas suffisantes. Encore s'agit-il de dominer les différentes représentations graphiques, et surtout d'être capable d'approcher des questions relatives à des univers aussi variés que la chimie, la mécanique ou la démographie. Même si la résolution des problèmes proposés nécessite des démarches relevant des mathématiques, une des difficultés principales consiste à comprendre le problème et à s'en faire une bonne représentation. Il s'agit ensuite de le décontextualiser afin d'opérer le traitement mathématique, puis à recontextualiser la réponse dans l'univers de la question. On peut imaginer que les élèves qui n'ont pas eu quelque habitude à résoudre des problèmes ne pouvaient que mal s'en sortir, voire refuser d'entrer en matière.

Pour ces raisons, *Variations et relations* est le sous-domaine le moins bien réussi parmi ceux très investis scolairement.

Comparaisons intercantonales

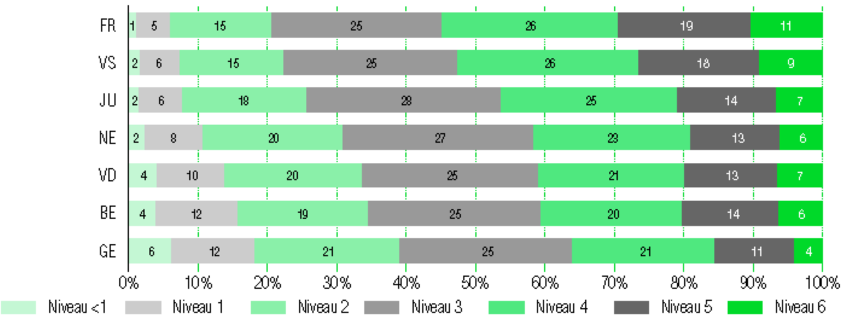
Dans le graphique 5.5, on observe la même répartition cantonale des résultats moyens que dans les autres sous-domaines: d'abord Fribourg, Valais et Jura qui présentent les meilleures performances, puis viennent les cantons de Neuchâtel, Vaud et Berne, et, enfin, celui de Genève.

Graphique **5.5** **Résultats moyens dans le sous-domaine *Variations et relations***



La répartition par niveaux de compétences est presque la même que celle que l'on obtient pour *Espace et formes* (graphique 5.6).

Graphique **5.6** **Répartition par niveaux de compétences dans le sous-domaine *Variations et relations***



Compétences et difficultés

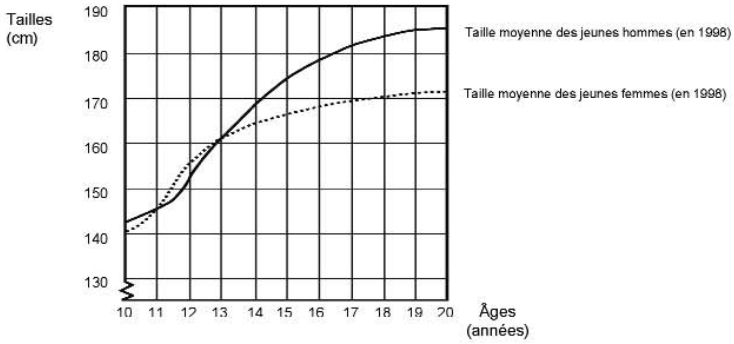
Les meilleurs résultats sont obtenus aux problèmes dont la résolution exige des compétences dans la lecture et l'interprétation de graphiques. Par exemple, deux questions relatives à l'interprétation d'un graphique représentant un tour en voiture, avec une courbe mettant en relation la vitesse de cette voiture en fonction du temps sont réussies par 97% et 88% des élèves. Toutefois, une troisième question n'obtient qu'une réussite moyenne de 30% parce qu'il s'agit de trouver et surtout de justifier une variation de la vitesse en se basant sur les données fournies par le graphique.

On obtient le même décalage à un problème présentant des diagrammes d'évolution. La plupart des élèves romands savent mettre en relation plusieurs diagrammes et utiliser les informations qu'ils contiennent pour calculer des valeurs. Mais seulement 8% des élèves sont capables de transformer certaines valeurs en pourcentages et de justifier leur démarche.

A ce point de vue, l'exemple de *Croissance* est explicite: la question 1 qui demande une interprétation et une comparaison des deux courbes est réussie par 64% des élèves, mais la question 2 qui requiert une explication n'est plus réussie que par 48% des élèves.

Croissance: Les jeunes deviennent plus grands

La taille moyenne des jeunes hommes et des jeunes femmes aux Pays-Bas en 1998 est représentée par le graphique ci-dessous.



Question 1

D'après ce graphique, pendant quelle période de leur vie les jeunes filles sont-elles, en moyenne, plus grandes que les jeunes hommes du même âge ?

Question 2

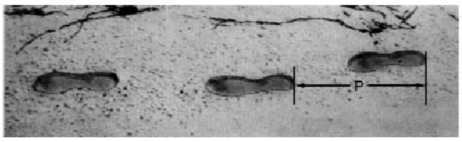
Expliquez en quoi le graphique montre qu'en moyenne, la croissance des filles est plus lente après 12 ans.

Examinons encore les réponses fournies par les élèves à un autre problème public de ce sous-domaine intitulé *Marche à pied*.

Alors que les questions de *Croissance* ne concernent que les premiers niveaux de difficulté, celles de *Marche à pied* vont du quatrième au sixième niveau.

Marche à pied

L'image montre les traces de pas d'un homme en train de marcher. La longueur de pas *P* est la distance entre l'arrière de deux traces de pas consécutives.



Pour les hommes, la formule $\frac{n}{P} = 140$ donne un rapport approximatif entre *n* et *P*, où :

n = nombre de pas par minute, *P* = longueur de pas en mètres.

Question 1

Si la formule s'applique à la façon de marcher d'Henri et qu'Henri fait 70 pas par minute, quelle est la longueur de pas d'Henri ? Montrez vos calculs.

Question 2

Bernard sait que la longueur de son pas est de 0,80 mètre. La formule s'applique à sa façon de marcher.

Calculez la vitesse à laquelle marche Bernard en mètres par minute et en kilomètres par heure. Montrez vos calculs.

La question 1 de *Marche à pied* nécessite, outre la compréhension du contexte et de la consigne, la capacité d'utiliser la formule n/P = 140 qui donne un rapport approximatif entre le nombre de pas par minute et la longueur des pas en mètres. Il s'agit ensuite de résoudre l'équation P = 70/140. Moins de la moitié des élèves (41%) sait résoudre cette équation. Si on leur ajoute les 16% qui substituent correctement les nombres dans la formule, mais se trompent dans les calculs, on peut dire que presque deux tiers des élèves sont capables de reconnaître et d'utiliser une formule à bon escient.

La question 2 est plus complexe et requiert plusieurs étapes. La formule n/P = 140 doit être transformée et l'équation résolue pour trouver la valeur du nombre de pas par minute. Il s'agit ensuite de se référer à une autre formule, non donnée dans la consigne, celle de la vitesse de marche exprimée en mètres par minute ($v = n \cdot P = (140 \cdot P) \cdot P = 140 \cdot P^2$ [m/min]). Il faut ensuite opérer la conversion afin de trouver la vitesse en kilomètres par heure. 12% des élèves seulement sont parvenus à la réponse attendue, 10% ont à peu près trouvé la démarche mais se sont égarés dans les transformations ou conversions, et encore 19% ont résolu la première équation puis n'ont plus su comment continuer.

Environ un élève sur deux a des connaissances concernant les fonctions, et sait résoudre des problèmes simples, proches de ceux qu'on trouve dans la plupart des manuels pour exercer le recours à une formule et la résolution de l'équation en question. Mais un nombre encore plus faible d'élèves possède les compétences nécessaires pour résoudre des situations plus complexes dans le champ des fonctions.

De façon générale, les résultats montrent bien que peu d'élèves parmi ceux qui ont acquis les notions mathématiques sont capables d'en faire des instruments de réflexion et d'argumentation, ou d'utiliser leurs connaissances pour en construire de nouvelles. L'analyse des résultats fait ressortir qu'ils savent comprendre une formule et l'utiliser, mais qu'ils éprouvent de la difficulté, voire de l'incapacité à la transformer ou, plus encore, à en produire une nouvelle.

Quantité

Notions et résultats généraux

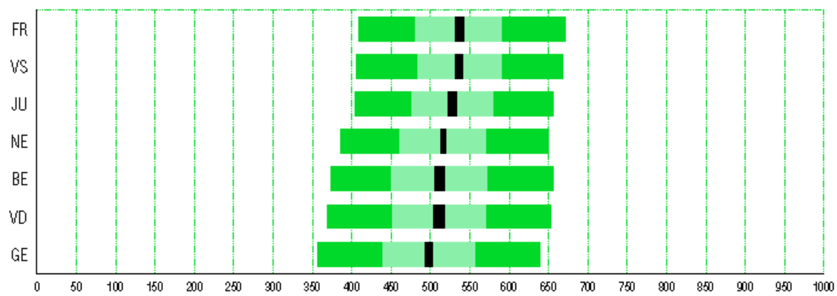
Par *Quantité*, PISA entend tout ce qui touche à l'arithmétique, avec un accent sur la numération, la quantification, la mesure et au sens que donnent les élèves au nombre et aux opérations. Plusieurs problèmes concernent aussi la proportionnalité.

Les questions de ce sous-domaine supposent des connaissances proches de celles qui sont attendues par les plans d'études cantonaux et qui font déjà, pour certaines d'entre elles, l'objet d'activités à l'école primaire.

Comparaisons intercantonales

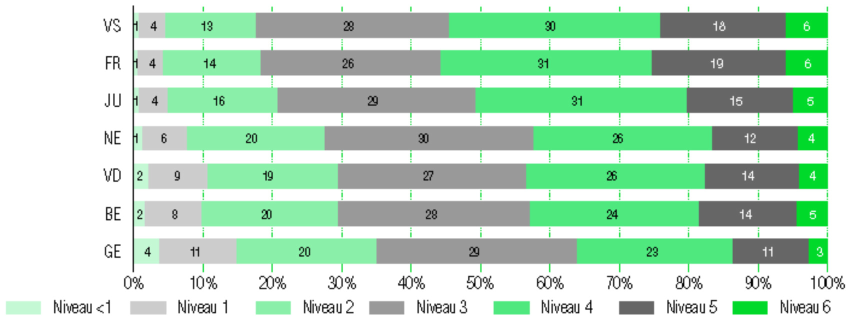
Le graphique 5.7 permet de regrouper les cantons en trois groupes (FR-VS-JU, NE-BE-VD, GE) comme pour les autres sous-domaines.

Graphique **5.7** **Résultats moyens dans le sous-domaine *Quantité***



Pour les niveaux, il n'y a pas de surprise non plus, le classement des cantons reste le même (graphique 5.8).

Graphique **5.8** **Répartition par niveaux de compétences dans le sous-domaine *Quantité***



Compétences et difficultés

Examinons les compétences des élèves dans le sous-domaine *Quantité*. Ces compétences relèvent principalement de savoirs arithmétiques.

Numération

D'une façon générale, les problèmes relatifs à la numération sont assez bien réussis. Il faut néanmoins signaler qu'en fin de 9ᵉ, quelque 20% des élèves ne savent pas décomposer additivement ou multiplicativement des nombres de l'ordre de quelques centaines et ce pourcentage augmente encore lorsque les nombres atteignent les milliers. Mais c'est déjà le nombre lui-même avec son écriture que les élèves maîtrisent mal. Ils savent utiliser le nombre comme « outil » ou « ingrédient » de calcul mais n'en ont pas une connaissance suffisante en tant qu'« objet ». Par exemple, seuls 27% des élèves sont capables de trouver le nombre exact de fois qu'apparaît un des dix chiffres dans la suite numérique de 1 à 100.

Malgré l'effort considérable mis sur la construction du nombre et du système décimal à travers tous les degrés de l'école primaire, il reste une proportion considérable d'élèves qui ne maîtrise pas ces notions même lorsqu'il s'agit de nombres relativement petits.

Opérations arithmétiques

Les problèmes additifs et ceux qui nécessitent une multiplication simple (ou son inverse) atteignent un bon taux de réussite. Entre 70% et 90% des élèves, suivant les questions, savent choisir les opérations arithmétiques qui conviennent, sont capables de les combiner et de les résoudre.

Toutefois, lorsqu'il s'agit de la notion de produit cartésien et de combinatoire, on observe une chute considérable du taux de réussite.

Par exemple, lorsqu'on peut ajouter deux ingrédients supplémentaires à une pizza de base, et que le choix est possible entre quatre ingrédients, trouver le nombre de compositions différentes n'est réussi que par 59% des élèves. Ou bien, quand on dispose de trois types de planches différents, de deux jeux de roulettes différents, de deux jeux d'accessoires différents et d'un seul choix possible pour le jeu d'axes, seuls 53% des élèves de 9^{e} savent trouver qu'il est possible de monter 12 planches à roulettes différentes.

Proportionnalité

En ce qui concerne la proportionnalité, les problèmes sont bien réussis quand ils ressemblent à ceux dont les élèves sont coutumiers. Le taux de réussite est moins élevé quand il s'agit de raisonner à propos de cette notion. Voici l'exemple du *Taux de change*:

Taux de change

Mademoiselle Mei-Ling, de Singapour, prépare un séjour de 3 mois en Afrique du Sud dans le cadre d'un échange d'étudiants. Elle doit changer des dollars de Singapour (SGD) en rands sud-africains (ZAR).

Question 1

Mei-Ling a appris que le taux de change entre le dollar de Singapour et le rand sud-africain est de : 1 SGD = 4,2 ZAR.

Mei-Ling a changé 3 000 dollars de Singapour en rands sud-africains à ce taux de change.

Combien Mei-Ling a-t-elle reçu de rands sud-africains ?

Question 2

Lorsque Mei-Ling rentre à Singapour après 3 mois, il lui reste 3 900 ZAR. Elle les reconvertit en dollars de Singapour, constatant que le taux de change a évolué et est à présent de : 1 SGD = 4,0 ZAR.

Combien Mei-Ling reçoit-elle de dollars de Singapour ?

Question 3

Au cours de ces trois mois, le taux de change a évolué et est passé de 4,2 à 4,0 ZAR pour un SGD.

Est-il plus avantageux pour Mei-Ling que le taux de change soit de 4,0 ZAR au lieu de 4,2 ZAR lorsqu'elle reconvertit ses rands sud-africains en dollars de Singapour ? Donnez une explication à l'appui de votre réponse.

La première question est réussie par 89% des élèves, la seconde par 87%. La troisième n'a plus qu'un taux de réussite de 56%. Cette chute s'explique par le fait que la réponse doit être expliquée. Dans *Quantité* comme dans les quatre autres sous-domaines, expliquer ou justifier sa réponse n'est pas à la portée d'un grand nombre d'élèves. Ceux d'entre eux qui trouvent la réponse correcte au problème *Taux de change*, mais ne parviennent pas – ou incomplètement – à l'expliquer sont 33%, ils ont bénéficié d'un crédit partiel.

En résumé, la proportionnalité est acquise par la plupart des élèves mais, pour la majorité d'entre eux, elle ne constitue pas un savoir disponible pour résoudre des problèmes nouveaux.

Problèmes arithmétiques

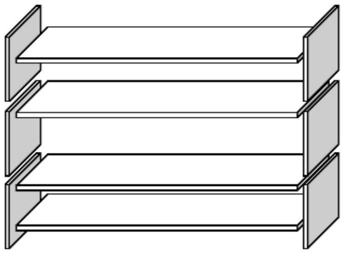
La meilleure façon de savoir si les notions sont acquises et disponibles, c'est-à-dire si les savoirs constituent des compétences, est d'évaluer la capacité des élèves à résoudre un problème. L'observation des élèves dans leur approche du problème, leurs démarches et leurs erreurs permet de se faire une idée de leurs principales difficultés. Les résultats obtenus aux épreuves PISA et leur analyse permettent de mettre en évidence que, contrairement à l'idée qu'on se fait généralement, ce sont moins les algorithmes qui sont cause de difficulté que l'absence de sens donné aux opérations, la construction insuffisante du nombre et du système décimal (numération de position) et l'incapacité à se faire une représentation des problèmes.

Dès les premiers degrés de l'école primaire jusqu'en 9^{e}, les élèves en difficulté, 20% à 30% de la population scolaire, sont ceux qui, face à un problème, cherchent dans l'énoncé quelques repères, le plus souvent des nombres, puis leur appliquent systématiquement une opération arithmétique.

Le problème *Etagères* illustre bien ce propos :

Etagères

Pour construire une étagère complète,
un menuisier a besoin du matériel suivant :



4 planches longues ;
6 planches courtes ;
12 petites équerres ;
2 grandes équerres ;
14 vis.

Le menuisier dispose d'un stock de 26 planches longues, 33 planches courtes, 200 petites équerres, 20 grandes équerres et 510 vis.

Combien d'étagères complètes le menuisier peut-il construire ?

30% des élèves ne réussissent pas ce problème arithmétique. Parmi ceux-ci, 9% ont une démarche correcte mais répondent que le menuisier peut fabriquer 6 étagères au lieu de 5.

Beaucoup d'autres additionnent en vrac tous les matériaux du stock puis divisent le résultat obtenu par le nombre de matériaux nécessaire pour construire une étagère. Seuls les nombres apparaissant dans le problème sont pris en compte indépendamment du problème lui-même.

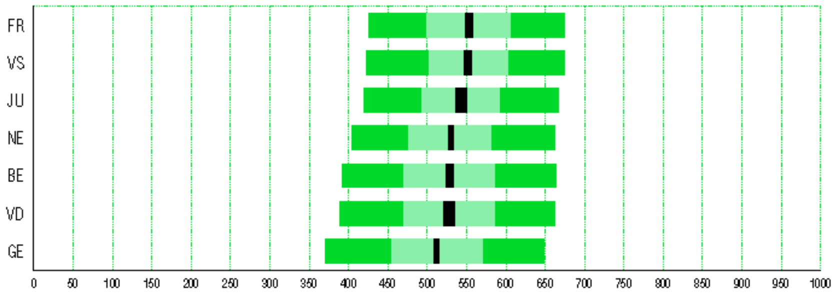
Incertitude

Comparaisons intercantonales

C'est dans le sous-domaine *Incertitude* que les élèves suisses romands sont les moins performants. Leurs connaissances en probabilités et en statistique sont donc moins étendues qu'elles ne le sont en arithmétique ou en géométrie. Vu le peu d'importance qu'accordent les plans d'études romands à ce champ des mathématiques, ce résultat n'est pas très étonnant.

D'un canton à l'autre, les performances moyennes diffèrent. Le classement des cantons est le même qu'à l'échelle mathématique combinée (graphique 5.9).

Graphique **5.9** Résultats moyens dans le sous-domaine *Incertitude*

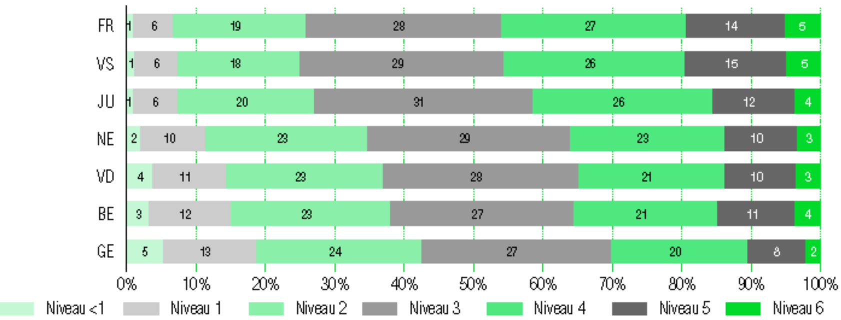


A la lumière des performances obtenues dans le sous-domaine *Incertitude*, les cantons peuvent se répartir en trois groupes de force décroissante. Dans le groupe de tête se trouvent les cantons de Fribourg, du Valais et du Jura ; dans le groupe intermédiaire se trouvent ceux de Neuchâtel, de Berne et de Vaud ; et finalement, seul, dans le groupe de queue, se trouve Genève.

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, six niveaux de compétences ont été définis pour les mathématiques et chacun de leurs quatre sous-domaines.

Le graphique 5.10 présente la distribution des élèves des différents cantons romands selon les six niveaux de compétences de l'échelle *Incertitude*.

Graphique **5.10** Répartition par niveaux de compétences dans le sous-domaine *Incertitude*



Dans les cantons les plus forts (VS, FR et JU), la proportion des élèves ayant un niveau supérieur ou égal à 3 dépasse 70%. Dans les cantons du groupe intermédiaire (NE, VD et BE), cette proportion est comprise entre 60% et 70%. A Genève, seul canton du groupe de queue, cette proportion est inférieure à 60%.

Description fine des compétences

Malgré la description détaillée que nous avons proposée des niveaux de compétences (voir p.113), il est difficile de se faire une idée très claire de ce que savent véritablement faire les élèves à chaque niveau de compétences de l'échelle du sous-domaine *Incertitude*. Nous aimerions combler ce manque. Pour ce faire nous décrirons brièvement les problèmes que savent résoudre les élèves de chaque niveau.

Rappelons que dans le cadre de l'enquête PISA les échelles de compétences sont construites selon la théorie de la réponse à l'item. Le modèle mathématique utilisé permet de positionner sur une même échelle continue la difficulté des items et l'aptitude des élèves. Selon ce modèle, tout élève a une probabilité supérieure à une demie de répondre correctement aux items dont la difficulté est inférieure à son aptitude. Les élèves peuvent naturellement être regroupés par niveaux en fonction de leurs compétences. Ce modèle est hiérarchique. Ainsi les élèves du niveau 2 sont capables de résoudre correctement tous les problèmes que savent résoudre les élèves du niveau 1 mais aussi un certain nombre de problèmes un peu plus difficiles; les élèves du niveau 3 à leur tour sont capables de résoudre correctement tous les problèmes que savent résoudre les élèves du niveau 2 ainsi que d'autres problèmes plus difficiles, et ainsi de suite jusqu'au niveau le plus élevé.

L'échelle *Incertitude* a été construite à partir des réponses des élèves à une trentaine d'items. Ces items recouvrent principalement quatre champs notionnels. Les deux premiers relèvent de la statistique descriptive. Il s'agit, d'une part, de représentation graphique et, d'autre part, de résumés ou d'indicateurs numériques. Le troisième se réfère explicitement à la théorie des probabilités. Le quatrième, finalement, relève de la statistique inférentielle. Examinons plus en détail ces quatre champs.

Lecture et interprétation d'un graphique

Pour chaque champ, nous procéderons de la même manière. Dans un premier temps, nous définirons les compétences évaluées puis, dans un second temps, nous leur associerons une difficulté par l'entremise d'un niveau.

Dans le premier champ *Lecture et interprétation d'un graphique*, nous avons identifié quatre types de compétences. La première consiste à lire les informations contenues dans un graphique. La deuxième consiste à tirer des informations de graphiques et être capable de combiner ces dernières. La troisième consiste à choisir une représentation adéquate. La quatrième, quant à elle, consiste à savoir utiliser correctement les informations présentées dans un graphique malgré son allure trompeuse.

Pour établir l'ordre d'émergence des compétences, nous allons simplement voir quels sont les groupes d'élèves capables de résoudre les problèmes impliquant leur maîtrise. Nous allons donc estimer la probabilité de réussite de chaque groupe d'élèves à chaque problème. Cette probabilité peut être significativement inférieure à une demie, elle peut ne pas être significativement différente d'une demie ou elle peut être significativement supérieure à une demie.

Dans le premier cas, nous conclurons que la compétence nécessaire à la résolution du problème n'est pas acquise ; dans le deuxième cas, nous conclurons que la compétence est sur le point d'être acquise et dans le troisième, nous conclurons que la compétence est acquise.

L'habillage d'un problème peut avoir un impact sur sa difficulté. Il est donc possible que deux problèmes nécessitant pour être résolus les mêmes compétences ne soient pas réussis par les mêmes groupes d'élèves. Dans une telle situation, nous déclarerons qu'un groupe d'élèves possède une certaine compétence, s'ils résolvent la majorité des problèmes qui nécessitent la maîtrise de cette compétence.

Le tableau 5.1 présente les résultats de nos analyses.

Tableau **5.1** **Lecture et interprétation d'un graphique: compétences et difficulté**

	Niveau des élèves						
Compétence	**<1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Lire un graphique	–	+	+	+	+	+	+
Lire un graphique et combiner des informations	–	–	–	+	+	+	+
Choisir un mode de représentation adéquat	–	–	–	0	+	+	+
Ne pas se faire leurrer par un graphique	–	–	–	–	–	–	+

– *signifie que la compétence n'est pas acquise,*
0 *signifie que la compétence est sur le point d'être acquise,*
+ *signifie que la compétence est acquise.*

Nous définirons la difficulté d'une compétence par le niveau le plus bas auquel elle est acquise. *Lire un graphique* est ainsi une compétence de difficulté 1, *Lire un graphique et combiner des informations* est une compétence de difficulté 3, *Choisir un mode de représentation adéquat* est une compétence de difficulté 4 et *Ne pas se faire leurrer par un graphique* une compétence de difficulté 6.

Description numérique d'une variable statistique

Le deuxième champ notionnel investigué est celui des indicateurs de position et, de façon plus anecdotique, de dispersion. Dans ce champ, nous avons répertorié quatre compétences majeures.

La première consiste à savoir donner une définition précise de la moyenne.

Les élèves qui possèdent la deuxième compétence savent qu'il existe d'autres indicateurs de tendance centrale et connaissent les caractéristiques spécifiques de la moyenne. Ils savent par exemple que la moyenne n'est pas la médiane et qu'il n'y a pas forcément le même nombre d'observations de part et d'autre de la moyenne. Ils savent aussi que la moyenne d'une distribution n'est pas nécessairement son mode, c'est-à-dire que la moyenne n'est pas toujours la valeur la plus fréquente. Ils savent aussi que les observations ne se distribuent pas forcément de manière symétrique autour de la moyenne.

La troisième compétence est plus opératoire. Les élèves qui possèdent cette compétence sont capables de recourir à la définition de la moyenne et de l'adapter à une nouvelle situation. Ils sont par exemple capables de résoudre le problème intitulé *Contrôles de sciences*. Ils savent également calculer une moyenne pondérée.

Contrôle de sciences

A l'école de Mei-Lin, son professeur de sciences fait passer des contrôles qui sont notés sur 100. Mei-Lin a obtenu une moyenne de 60 points pour ses quatre premiers contrôles de sciences. Pour son cinquième contrôle, elle a une note de 80 points.

Quelle sera la moyenne des notes de Mei-Lin en sciences après les cinq contrôles ?

Les élèves qui possèdent la quatrième compétence comprennent comment la position de la moyenne peut être influencée par des observations extrêmes, ils savent aussi comment s'articulent et se complètent les notions de tendance centrale et de dispersion.

Voyons quels sont les groupes d'élèves qui détiennent chacune de ces compétences (tableau 5.2).

Tableau **5.2** **Description numérique d'une variable statistique: compétences et difficulté**

	Niveau des élèves						
Compétence	<1	1	2	3	4	5	6
Connaître les propriétés de la moyenne	–	–	+	+	+	+	+
Définir la moyenne	–	–	0	+	+	+	+
Manipuler la notion de moyenne	–	–	–	–	+	+	+
Articuler les notions de tendance centrale et de dispersion	–	–	–	–	0	+	+

– *signifie que la compétence n'est pas acquise,*
0 *signifie que la compétence est sur le point d'être acquise,*
+ *signifie que la compétence est acquise.*

Ainsi *Connaître les propriétés de la moyenne* est une compétence de difficulté 2, *Définir la moyenne* est une compétence de difficulté 3, *Manipuler la notion de moyenne* une compétence de difficulté 4 et finalement *Articuler les notions de tendance centrale et de dispersion* une compétence de difficulté 5.

Rudiments de probabilités

Dans ce champ, les questions posées aux élèves pour évaluer leurs compétences relèvent essentiellement de savoirs déclaratifs. Nous avons repéré quatre types de connaissances déclaratives.

La première est l'acceptation du *principe de raison insuffisante*. Ce principe, appelé aussi *principe d'indifférence*, stipule que faute d'indice en faveur de l'une ou l'autre des issues mutuellement exclusives et conjointement exhaustives d'un tirage aléatoire, il faut attribuer à chacune la même probabilité.

La deuxième porte sur la compréhension de la notion d'indépendance. Les élèves qui maîtrisent cette connaissance savent que lorsque deux événements sont indépendants, la connaissance de l'un ne change pas les «chances» de réalisation de l'autre.

La troisième porte sur l'interprétation à donner à la notion de probabilité. Les élèves qui savent interpréter un énoncé probabiliste sont capables de résoudre correctement le problème intitulé *Tremblement de terre.*

La quatrième et dernière est la connaissance de la définition classique de la probabilité, héritée des jeux de hasard. Cette définition stipule que la probabilité d'un événement se calcule en divisant le nombre de cas favorables à sa réalisation par le nombre de cas possibles.

Tremblement de terre

On a diffusé un documentaire sur les tremblements de terre et la fréquence à laquelle ils se produisent. Ce reportage comprenait un débat sur la prévisibilité des tremblements de terre.

Un géologue a affirmé : « Au cours des vingt prochaines années, la probabilité qu'un tremblement de terre se produise à Zedville est de deux sur trois. »

Parmi les propositions suivantes, laquelle exprime le mieux *ce que veut dire ce géologue*?

A Puisque $\frac{2}{3} \cdot 20 = 13.3$, il y aura donc un tremblement de terre à Zedville dans 13 à 14 ans à partir de maintenant.

B $\frac{2}{3}$ est supérieur à $\frac{1}{2}$, on peut donc être certain qu'il y aura un tremblement de terre à Zedville au cours des 20 prochaines années.

C La probabilité d'avoir un tremblement de terre à Zedville dans les vingt prochaines années est plus forte que la probabilité de ne pas en avoir.

D On ne peut pas dire ce qui se passera, car personne ne peut être certain du moment où un tremblement de terre se produit.

Le tableau 5.3 indique quels sont les élèves qui possèdent les connaissances que nous venons d'énumérer.

Tableau **5.3** Notions de probabilités: compétences et difficulté

Compétence	Niveau des élèves <1	1	2	3	4	5	6
Accepter le principe d'indifférence	+	+	+	+	+	+	+
Maîtriser la notion d'indépendance	–	+	+	+	+	+	+
Interpréter la probabilité	–	–	–	–	+	+	+
Connaître et savoir utiliser la définition classique de la probabilité	–	–	–	–	+	+	+

– *signifie que la compétence n'est pas acquise,*
0 *signifie que la compétence est sur le point d'être acquise,*
+ *signifie que la compétence est acquise.*

Inférence inductive

Le dernier champ notionnel abordé très succinctement est celui de l'inférence statistique.

Les questions posées aux élèves permettent de savoir s'ils sont capables, d'une part, d'estimer la moyenne d'une population à partir de l'observation d'un échantillon et, d'autre part, s'ils connaissent les paramètres qui influencent la qualité d'un sondage.

Ces deux compétences sont de difficulté 5 et 4 respectivement (tableau 5.4).

Tableau **5.4** Estimation statistique: compétences et difficulté

Compétence	Niveau des élèves <1	1	2	3	4	5	6
Estimer une espérance à partir d'un échantillon	–	–	–	–	–	+	+
Savoir quels sont les paramètres qui influencent la précision d'une estimation	–	–	–	–	+	+	+

– *signifie que la compétence n'est pas acquise,*
+ *signifie que la compétence est acquise.*

Bilan

Le tableau 5.5 rassemble les résultats partiels que nous venons de présenter concernant les compétences que possèdent les élèves dans le sous-domaine *Incertitude*.

Tableau **5.5** **Compétences évaluées dans le sous-domaine *Incertitude* classées selon leur difficulté**

Difficulté des compétences	Compétence	Niveau des élèves
6	Ne pas se faire leurrer par un graphique	6
5	Articuler les notions de tendance centrale et de dispersion	5
	Estimer une espérance à partir d'un échantillon	
4	Choisir un mode de représentation graphique	4
	Manipuler la notion de moyenne	
	Interpréter la probabilité	
	Connaître et savoir utiliser la définition classique de la probabilité	
	Savoir quels sont les paramètres qui influencent la précision d'une estimation	
3	Lire un graphique et combiner des informations	3
	Définir la moyenne	
2	Connaître les propriétés de la moyenne	2
1	Lire un graphique	1
	Maîtriser la notion d'indépendance	
0	Accepter le principe d'indifférence	<1

Comme le montrent nos analyses, les compétences évaluées dans le sous-domaine *Incertitude* sont très liées à des savoirs institués et ne peuvent être acquises que très difficilement sans avoir été enseignées. Etant donné la place relativement restreinte qu'occupe l'analyse des données et les probabilités dans l'enseignement des mathématiques en Suisse romande, il aurait été surprenant que les élèves fassent beaucoup mieux. Il est déjà remarquable que plus d'un tiers d'entre eux se situe au moins au niveau 4 et possède ainsi la quasi totalité des compétences évaluées dans le domaine.

Comparativement à la Suisse romande, les pays anglo-saxons accordent, déjà à l'école obligatoire, beaucoup plus d'importance à la statistique et aux probabilités mais, comme l'expliquait récemment Goodall (2004) dans l'éditorial du journal *Teaching Statistics*, cela se fait au détriment d'autres branches des mathématiques et certains le déplorent !