00.7
NOVEMBRE 2000

«Le marchand de soie»

Analyse d'un problème de mathématiques et présentation des stratégies de résolution des élèves

Joëlle Cretton

irdp
Institut de recherche et de documentation pédagogique

«Le marchand de soie»

Analyse d'un problème de mathématiques et présentation des stratégies de résolution des élèves

Joëlle Cretton
Travail de stage effectué à l'IRDP sous la direction de François Jaquet

IRDP
Faubourg de l'Hôpital 43
Case postale 54
CH-2007 Neuchâtel 7

Tél. (41) (0) 32 889 86 14
Fax (41) (0) 32 889 69 71

E-mail: christiane.antoniazza@irdp.unine.ch
http://www.irdp.ch

Fiche bibliographique

CRETTON, Joëlle. - "Le marchand de soie" : analyse d'un problème de mathématiques et présentation des stratégies de résolution des élèves / Joëlle Cretton. - Neuchâtel : Institut de recherche et de documentation pédagogique (IRDP), 2000. - 48 p. ; 30 cm. - (00.7)
CHF 6.50

Mots-clés: *Mathématique, Résolution de problème, Résultat de recherche, Enseignement primaire, Suisse romande, Analyse comparative*

Remerciements

Nous adressons tous nos remerciements aux enseignantes qui nous ont permis très volontiers de mener les entretiens avec leurs élèves : Mme Pierrette Rochat, classe de 4ème primaire à Neuchâtel; Mme Francine Ferranti, classe de 5ème primaire à Neuchâtel; Mme Emmanuelle Darbellay, classe de 6ème primaire à Val d'Illiez.

Nous tenons également à remercier Elisabeth Egger pour l'appui du secrétariat, ainsi que tous les collaborateurs de l'IRDP pour leurs questionnements, suggestions et soutien.

Photo de couverture : Maurice Bettex - IRDP

Table des matières

Résumé

Ce travail présente une analyse approfondie d'un problème mathématique, "Le marchand de soie", proposé aux classes de 4ème, 5ème et 6ème degrés lors de la première épreuve du 8ème Rallye Mathématique Transalpin (janvier 2000). Il s'agit d'un problème qui met en jeu la capacité à se représenter simultanément deux déplacements qui ne se font pas à la même vitesse.

Cette analyse comprend cinq parties. La première partie traite de la donnée, de l'analyse a priori et des résultats.
Au-delà de ces résultats, des analyses plus détaillées font apparaître plusieurs types de stratégies utilisées par les élèves. Celles-ci sont présentées dans la deuxième partie, avec quelques extraits caractéristiques d'explication des groupes d'élèves. Ces analyses posent un certain nombre de questions, entre autres celles de savoir pourquoi un élève de 6ème réussit mieux que les élèves de 4ème et 5ème.
La troisième partie présente les différents types de justification : réponses avec textes, schémas ou combinaison des deux, réponses avec tableau, combinaison texte-tableau ou encore combinaison texte-schéma-tableau en fonction du degré scolaire.
Afin de répondre aux questions posées suite à l'analyse des stratégies et afin de comprendre l'histoire de l'élaboration des réponses, nous sommes allés dans les classes interroger les élèves (quatrième partie).
Pour terminer, la cinquième partie fait une comparaison des résultats et des stratégies des élèves avec ceux des pays qui ont participé au Rallye (Siena et Parma).
Ce problème s'est avéré être d'une grande richesse de par la diversité des stratégies utilisées par les élèves. Cette richesse des stratégies se retrouve à Siena et à Parma, ainsi que dans chacun des trois niveaux scolaires.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit bietet eine genaue Analyse einer Mathematik-Aufgabe, genannt "Der Seidenhändler" (le marchand de soie), die anlässlich des 8. transalpinen Mathematik-Rallyes vom Januar 2000 in den Klassen 4, 5 und 6 vorgelegt wurde. Es handelt sich dabei um eine Aufgabe, bei der es um die Fähigkeit geht, sich zwei gleichzeitig stattfindende, jedoch nicht gleich schnell verlaufende Bewegungen vorzustellen.

Die Untersuchung umfasst fünf Teile. Der erste behandelt die Aufgabenstellung, die theoretisch möglichen Lösungswege und die Lösungen. Über die blossen Lösungen hinaus werden detaillierte Analysen vorgestellt, welche verschiedene durch die Schüler gewählte Lösungsstrategien illustrieren. Diese werden dann im zweiten Teil vorgestellt, zusammen mit einigen typischen Erklärungen der Schülergruppen. Es werden hier bestimmte Fragen aufgeworfen, zum Beispiel jene, warum ein Schüler der sechsten Klasse besser abschneidet als einer der vierten oder fünften.
Der dritte Teil stellt die verschiedenen Typen von Erklärungsversuchen vor: Antworten in Form von Texten, von Schemata oder Kombination von beiden; Antworten mit einer Tabelle; Kombination von Text und Tabelle; und schliesslich Kombination von Text, Schema und Tabelle, immer getrennt nach dem Schulniveau.
Um auf die Fragen antworten zu können, welche sich nach der Analyse der Lösungsstrategien stellten, und um die Entstehung der Lösungen zu verstehen, mussten die Schüler in ihren Klassen befragt werden. Dies ist der Gegenstand des vierten Teils.
Im fünften Teil schliesslich wurden die Lösungen und Strategien der Schüler verglichen mit jenen der Städte, die ebenfalls am Rallye teilgenommen haben (Siena und Parma). Die vorliegende mathematische Aufgabe erwies sich als sehr ergiebig, was die Vielfalt der von den Schülern angewandten Strategien betrifft. Diese Ergiebigkeit bezüglich der Lösungen war auch in Siena und Parma zu beobachten, und zwar ebenfalls auf allen Schulstufen.

Riassunto

Questo lavoro presenta un'analisi approfondita di un problema matematico, "Il mercante di seta", proposto alle classi di quarta, quinta e sesta elementare in occasione della prima prova dell'ottavo "Rallye Transalpino di Matematica" (gennaio 2000). Si tratta di un problema che richiede la capacità di rappresentarsi simultaneamente due spostamenti effettuati a velocità diverse.

Questa analisi si compone di cinque parti. La prima parte concerne i dati, l'analisi a priori e i risultati.
Oltre a questi risultati, analisi più dettagliate mettono in evidenza strategie diverse utilizzate dagli allievi. Queste sono esposte nella seconda parte, con alcuni estratti caratteristici di spiegazione dei gruppi di allievi. Queste analisi pongono un certo numero di domande, come quella di sapere perché un allievo di sesta riesce meglio di quelli di quarta e di quinta.
La terza parte presenta i diversi modi di spiegazione: risposte con testi, schemi o una combinazione dei due, risposte con tabelle, combinazione testo-tabella o anche combinazione testo-schema-tabella in funzione del grado scolastico.
Al fine di rispondere alle domande poste a seguito dell'analisi delle strategie e allo scopo di capire la storia dell'elaborazione delle risposte, è stato necessario recarsi nelle classi e interrogare gli allievi (quarta parte).
Da ultimo, la quinta parte paragona i risultati e le strategie degli allievi con quelli dei paesi che hanno partecipato al Rallye (Siena e Parma). Questo problema è risultato essere di grande interesse per le diverse strategie adottate dagli allievi. Questa pluralità di strategie si ritrova a Siena e a Parma, così come in ognuno dei tre livelli scolastici.

INTRODUCTION

Durant ces trente dernières années, les recherches en didactiques ont mis en évidence le rôle essentiel de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques et de nombreuses innovations pédagogiques cherchent à en tenir compte dans leurs propositions pratiques.
Simultanément, les concours et autres confrontations mathématiques entre classes suscitent un intérêt croissant, tant chez les élèves appelés à résoudre des problèmes collectivement, que chez les enseignants et les chercheurs en didactique qui peuvent ainsi observer les procédures de résolution mises en oeuvre. Dans ces concours par classes, la confrontation fait intervenir des équipes et se rapproche du travail de groupe préconisé par de nombreuses réformes pédagogiques. On ne s'intéresse plus seulement au résultat, mais aussi à la manière dont on l'a obtenu et dont on le justifie. Les interactions entre les membres d'un groupe et l'organisation du travail au sein de la classe deviennent les facteurs principaux de la réussite.

La présentation et l'analyse qui vont suivre concernent un problème de la première épreuve du 8ème Rallye Mathématique Transalpin[1], "le marchand de soie". Ce problème a été proposé aux classes de 4ème, 5ème et 6ème primaires.

La première épreuve du 8ème RMT s'est déroulée en janvier 2000 dans 260 classes de Suisse Romande et 3 de France voisine, de l'école primaire et de l'école secondaire, degrés 3 à 8 (35 classes de catégorie 3, 59 de catégorie 4, 60 de catégorie 5, 46 de catégorie 6, 38 de catégorie 7 et 24 de catégorie 8). Chaque classe avait 6 ou 7 problèmes à résoudre, en 50 minutes, sous le contrôle d'une personne "neutre", autre que le titulaire de la classe.

Dans la première partie, on s'intéresse à la donnée, l'analyse a priori et les résultats de ce problème. Ce sont les éléments de base de tous les problèmes du Rallye sur lesquels s'articulent la confrontation entre classes et les coopérations entre régions.

Au-delà de ces résultats, des analyses plus détaillées font apparaître plusieurs types de stratégies utilisées par les élèves. Nous les présentons dans la deuxième partie, avec quelques extraits caractéristiques d'explication des groupes d'élèves. Cette présentation ne tient plus compte du nombre de points attribués pour les besoins de la compétition. Elle constitue le début de l'analyse a posteriori, qui contrôle l'analyse a priori.

Suite à ces analyses, nous avons formulé un certain nombre de questionnements : qu'est-ce qui permet aux élèves de 6ème de mieux réussir ce problème que les enfants plus jeunes, comment se fait-il que les élèves utilisent certaines stratégies particulières.
Face à des réponses écrites et "figées" dont nous n'avons pas l'histoire de leur élaboration et de leur construction, nous ne pouvons que faire des hypothèses.

La troisième partie examine plus en détail les différents types de justification que les élèves ont utilisés : réponses avec textes, schémas ou combinaison des deux, réponses avec tableau, combinaison texte-tableau ou encore combinaison texte-schéma-tableau, en fonction du degré scolaire. Il s'agit ici de comprendre s'il y a une corrélation entre la manière de répondre et la réponse donnée.

---

[1] S'inscrivant dans le sillage des concours par classes, le Rallye Mathématique Romand est né en 1992 pour des classes de niveaux 3 à 5 de l'école primaire. Il s'est rapidement étendu au-delà de ses frontières d'origine, au Tessin, en Italie, en France, au Luxembourg, en République Tchèque, et même au Neguev (Israël) pour devenir le Rallye Mathématique Transalpin (RMT). Outre son développement géographique, le Rallye s'est également étendu aux degrés 6 à 8 de l'école secondaire.
Dans sa huitième édition, au premier semestre de l'an 2000, plus de 1200 classes y ont participé, dont 260 en Suisse Romande et 60 au Tessin.
Le Rallye se déroule en quatre étapes : une épreuve d'entraînement (en décembre), une première (en janvier) et une deuxième épreuves (en mars), ainsi qu'une finale (en mai).
Les finalités du Rallye sont les suivantes : résolution de problèmes, interactions entre élèves, dévolution de la tâche au groupe classe, explication des procédures de résolution, justification des solutions.
Mais le Rallye n'est pas qu'une compétition. C'est aussi l'occasion d'un intense travail d'analyse didactique.

Afin de répondre aux questions que nous nous sommes posées suite à l'analyse des stratégies et vérifier nos hypothèses, nous sommes allés dans les classes interroger les élèves. C'est ce que présente la quatrième partie.

Pour terminer, la cinquième partie compare les résultats et les stratégies des élèves de Suisse romande avec ceux d'autres régions (Siena et Parma) qui participent au Rallye.

PARTIE I : Donnée - analyse a priori - résultats

Donnée du problème

Un marchand de soie descend de son navire. Il doit parcourir 120 lieues pour se rendre au château du roi.
Il commence le voyage à pied et le termine dans un carrosse que le roi a envoyé à sa rencontre.
Le marchand et le carrosse partent au même moment.
A pied, le marchand parcourt 10 lieues par jour. Le carrosse parcourt 20 lieues par jour.
Au bout de combien de jours le marchand arrivera-t-il au château ?
Expliquer comment vous avez trouvé la réponse.

Analyse a priori

Ce problème fait appel à des connaissances en arithmétique (addition, soustraction, division, multiplication) et met en jeu des notions de vitesse et de mesure (distance).

Il s'agit de comprendre dans un premier temps que le marchand et le carrosse vont à la rencontre l'un de l'autre, que l'un va moins vite que l'autre et que par conséquent, la rencontre ne se fait pas au milieu du chemin. Dans un deuxième temps, il faut prendre en compte le retour du carrosse au château après la rencontre.

Les élèves peuvent calculer les positions jour après jour, en utilisant éventuellement un schéma, ou additionner les chemins parcourus chaque jour dans la première partie du parcours (10+20) et diviser la distance totale à parcourir par cette somme (120 : (20+10) = 4), pour trouver le nombre de jours nécessaires jusqu'à la rencontre, puis doubler ce nombre en tenant compte du retour (4 x 2 = 8).

Types de réponses prévus et barèmes correspondant

Réponse complète et correcte : 8 jours avec explications claires (qui peut aussi être un schéma)	4 pts
Réponse correcte avec explications incomplètes ou non claires, ou erreur de calcul avec raisonnement correct explicité	3 pts
Erreur de calcul avec explications non claires ou seulement la réponse intermédiaire, 4 jours, avec explications	2 pts
Début de raisonnement correct	1 pt
Incompréhension du problème	0 pt

Résultats

Pour la Suisse Romande, 157 copies ont été examinées.
Le tableau ci-dessous présente pour chaque niveau le nombre de classes ayant obtenu 4, 3, 2, 1 ou 0 points.
Ces résultats sont les premiers à apparaître, en raison des contraintes de classement qui existent dans toute activité de concours.

Tableau 1 - Résultats du problème 8

points	niveau 4		niveau 5		niveau 6		total	
	N	%	N	%	N	%	N	%
4	4	7.0	13	23.6	18	40.0	**35**	**22.3**
3	9	15.8	9	16.4	11	24.4	**29**	**18.5**
2	9	15.8	10	18.2	4	8.9	**23**	**14.6**
1	17	29.8	13	23.6	10	22.2	**40**	**25.5**
0	18	31.6	10	18.2	2	4.5	**30**	**19.1**
total	**57**	**100.0**	**55**	**100.0**	**45**	**100.0**	**157**	**100.0**
moyenne des points	**1.37**		**2.04**		**2.73**		**2**	

Le nombre de classes de chaque niveau est du même ordre de grandeur. On remarque également un assez bon équilibre de la répartition totale des classes selon le nombre de points obtenus.

Il y a pour ce problème une augmentation significative de réussite (4 points) en fonction du degré scolaire. Peu de classes de 4ème primaire réussissent ce problème, alors que 40% des classes de 6ème y parviennent en justifiant correctement leur réponse[2]. On remarque également une augmentation du nombre de réponses à *3 points* avec le changement de degré scolaire.
Avec le passage d'un niveau scolaire à l'autre, le nombre de *0 point* diminue, avec une chute au niveau 6. Le nombre de réponses à *1 point* diminue également, mais de façon moins spectaculaire.

L'analyse selon le nombre de points n'est pas prioritaire du point de vue de la didactique, mais est essentielle pour les classes participantes. Lors de l'élaboration des problèmes et du choix des degrés à qui on les proposera, les auteurs de l'épreuve s'efforcent d'éviter les problèmes trop difficiles ou trop faciles. Ce tableau des résultats du "marchand de soie" montre que ce problème est bien équilibré, voire un peu trop difficile en 4ème.

[2] En 6ème année, on arrive à un taux de réussite de 64.4 % si on ne tient compte que de la réponse correcte indépendamment des explications.

PARTIE II : Analyse des stratégies

Contrairement à ce que laissait supposer l'analyse a priori, les réponses ont été très diversifiées. Les correcteurs ont donc passé un certain temps à discuter des critères d'évaluation pour déterminer le nombre de points à attribuer aux divers types de réponses.

La liste des différents types de réponses, en nombre de jours, est présentée ci-dessous, en commençant par la réponse correcte (8 jours). Cette présentation ne tient pas compte du nombre de points obtenus. Ces différentes catégories de réponses sont regroupées à la fin de ce chapitre dans un tableau et un graphique récapitulatifs[3].

Ces réponses donnent de précieux indices sur les stratégies développées, bien que deux mêmes réponses peuvent être dans certains cas l'aboutissement de représentations différentes.

La réponse "8 jours" et ses différentes stratégies

63 classes (40 %) ont donné cette réponse, dont 12 classes de niveau 4, 22 classes de niveau 5 et 29 classes de niveau 6.
Parmi ces réponses, nous pouvons distinguer les copies reçues en fonction des justifications complètes ou incomplètes que les élèves ont données.

1. Réponse 8 jours avec justification :

Les élèves expliquent dans un premier temps quand a lieu la rencontre entre le marchand et le carrosse. Dans un deuxième temps, les élèves parlent du retour au château avec le carrosse, en précisant qu'il faut encore quatre jours pour y arriver.

605

Sur les 63 classes ayant donné la réponse correcte, 36 fournissent ce type d'explications, dont 5 classes de 4ème, 13 classes de 5ème et 18 classes de 6ème.

[3] cf. p. 18.

2. Réponse 8 jours sans justification :

Parmi les 63 classes, 27 ont donné des explications incomplètes, dont 7 classes de 4ème, 9 de 5ème et 11 de 6ème.

Nous trouvons dans la majorité des cas l'explication suivante :

> *80 + 40 = 120, nombre de lieues parcourues en tout*
> *80 = 4 x 20 et 40 = 4 x 10* [4]

Pour certaines réponses, dans lesquelles aucune indication n'est donnée sur le retour, on peut se demander comment les élèves sont arrivés à la réponse de 8 jours :
- ont-ils additionné les quatre jours que met à pied le marchand jusqu'à la rencontre et les quatre jours que met le carrosse jusqu'à la rencontre ?
- ou ont-ils additionné les quatre jours que mettent le marchand et le carrosse jusqu'à la rencontre et les quatre jours pour retourner en carrosse jusqu'au château ?

Dans certaines réponses, il est évident que les élèves ont utilisé la première stratégie (636[5]). Dans d'autres, ce l'est moins (523).
Il se peut également que les élèves aient compté à haute voix le nombre de jours qui restaient de la rencontre jusqu'au château.
Il est légitime d'estimer que dans ces procédures, la simultanéité des deux déplacements a été reconnue jusqu'au moment de la rencontre (les élèves écrivent deux fois "premier jour", "deuxième jour"...), mais qu'ils confondent ensuite ces durées avec des segments de leur représentation graphique et qu'ils terminent leur résolution en additionnant ces segments ou "longueurs" (523).

Enfin, dans une copie, une classe a utilisé une stratégie (utilisation de parenthèses) qui n'est apparue nulle part ailleurs :

542

La réponse "4 jours" (réponse intermédiaire)

Les élèves se rendent compte que le carrosse et le marchand n'avancent pas à la même vitesse et donc que la rencontre n'a pas lieu à mi-parcours. Mais ils s'arrêtent là, comme s'ils avaient oublié la deuxième partie de l'énoncé du problème :

> *Le marchand fait en quatre jours 40 lieues et le carrosse fait en quatre jours 80 lieues.*
> *Donc ils se rencontrent au bout de quatre jours.*

8 classes (5 %) ont donné cette réponse, dont 3 classes de 4ème, 4 classes de 5ème et 1 classe de 6ème.

---

4 L'orthographe a été corrigée.
5 Les nombres entre parenthèses renvoient aux exemples répertoriés en annexes.

La réponse "6 jours"

Les élèves ne tiennent compte que du marchand et du nombre de jours qu'il doit faire pour parcourir les 120 lieues en carrosse. Ils n'ont pas compris que le marchand et le carrosse, qui partent bien au même moment, ne partent pas du même endroit.

> *Le marchand fait en carrosse 20 lieues par jour et doit parcourir 120 lieues.*
> *20 lieues x 6 jours = 120.*
> *Réponse : le marchand doit faire 6 jours pour faire 120 lieues.*

2 classes (1 %) ont donné cette réponse, dont une de 4ème et une de 6ème.

La réponse "6 et 12 jours"

Calcul du nombre de jours que met le marchand pour parcourir les 120 lieues à pied et pour parcourir les 120 lieues en carrosse, sans tenir compte du fait que le carrosse vient à la rencontre du marchand et que le marchand finit le trajet dans le carrosse :

> *Nous avons fait 120 : 20 = 6 donc, s'il fait tout en carrosse, il fera 6 jours.*
> *Nous avons aussi fait 120 : 10 = 12 donc, s'il fait tout à pied, ça fera 12 jours.*

Comme dans la réponse précédente, il n'y a aucune simultanéité des déplacements.
Cinq classes (3 %) ont donné cette réponse, dont deux de 4ème, deux de 5ème et une de 6ème.

La réponse "9 jours" et ses différentes stratégies

15 classes (10 %) ont donné cette réponse, dont 5 classes de 4ème, 6 de 5ème et 4 de 6ème.

1. <u>Première stratégie menant à cette réponse</u> :

Les élèves partent du principe que la rencontre entre le marchand et le carrosse a lieu à mi-parcours. Ils divisent donc la distance totale (120 lieues) par deux et cherchent combien de jours le marchand et le carrosse doivent mettre chacun pour parcourir les 60 lieues en tenant compte du fait qu'ils n'avancent pas à la même vitesse (442). Pour ce faire, les élèves ont utilisé diverses stratégies :

- la division (une classe de 5ème) : *60 : 10 = 6 et 60 : 20 = 3, 6 + 3 = 9 jours*
- la multiplication (trois classes de 4ème) : *6 x 10 = 60 et 3 x 20 = 60, alors 6 + 3 = 9 jours*
- utilisation des jours de la semaine (une classe de 5ème) :
  le carrosse : le lundi 20 lieues, mardi 20 lieues, mercredi 20 lieues = 60 lieues
  le marchand à pied : le lundi 10 lieues, le mardi 10 lieues, mercredi 10 lieues, jeudi 10 lieues, vendredi 10 lieues, samedi 10 lieues = 60 lieues.
  Il arrive au bout de 9 jours.
- autres (trois classes, dont deux de 4ème et une de 6ème) :
  Il va faire 6 jours à pied et 3 jours en carrosse. En tout, il va faire 9 jours.
  Calculs : moitié de 120 = 60
  A pied, pour parcourir 60 lieues, il va faire 6 jours. En carrosse, pour faire 60 lieues, il va faire 3 jours. En tout, il va faire 9 jours.

Sur les 15 classes ayant donné pour réponse *9 jours*, 8 classes ont utilisé cette stratégie, dont 5 classes de 4ème, 2 classes de 5ème et 1 classe de 6ème.

Comme justification de la rencontre à mi-parcours, on trouve l'argument suivant (une classe de 4ème) :

> *On a d'abord fait la moitié de 120 parce que le marchand et le carrosse partent au même moment.*

Il y a ici confusion entre le moment du départ et le moment de la rencontre.

Dans les autres copies, on ne trouve pas d'explication sur la raison pour laquelle ils se rencontrent à mi-chemin.
Nous pouvons cependant imaginer que les élèves se sont représentés un trajet entre le navire et le château et qu'ils ont pensé que la rencontre avait lieu entre les deux. Nous pouvons alors faire l'hypothèse que c'est leur conception trop étroite de "entre" qui leur fait effectuer un partage équitable de l'espace et placer la rencontre à mi-parcours. Il y a ainsi confusion entre les termes "au milieu" et "entre"[6].

2. <u>Deuxième stratégie menant à 9 jours</u> :

Les élèves partent du principe que la rencontre a lieu à la moitié du parcours sans indiquer de manière explicite la division de 120 par deux :

> *Le marchand de soie arrivera au château au bout de 9 jours.*
> *Le carrosse = 3 jours 60 lieues*
> *Le marchand = 6 jours 60 lieues*

Sur les 15 classes ayant donné *9 jours* comme réponse, 5 classes ont utilisé cette deuxième stratégie, dont 3 classes de 5ème et 2 classes de 6ème.

3. <u>Troisième stratégie conduisant à 9 jours</u> :

Les élèves calculent le nombre de jours pour parcourir les 120 lieues à pied et en carrosse, puis divisent les réponses par deux, puisque le marchand et le carrosse se rencontrent à la moitié du parcours (une classe de 5ème):

> *1) il faut 12 jours pour aller à pied = (120 : 10 = 12)*
> *2) il faut 6 jours pour aller en carrosse = (120 : 20 = 6)*
> *Après il faut diviser 12 par 2 et 6 par 2 parce qu'il fait la moitié du trajet en carrosse et l'autre à pied.*
> *Réponse : il lui faut 9 jours pour arriver au château.*

Avec l'utilisation de ces trois types de stratégies, on peut se demander comment les élèves sont arrivés à cette réponse de neuf jours. Il est en effet parfois difficile de savoir si les neuf jours sont obtenus en additionnant les six et les trois jours que mettent le marchand et le carrosse jusqu'à la rencontre à mi-parcours, ou s'ils sont obtenus en additionnant les six jours que le marchand met jusqu'à la rencontre à mi-parcours et les 3 jours qu'il met en carrosse depuis la rencontre jusqu'au château :

[6] On peut également observer cela lorsqu'on demande aux élèves de donner un chiffre par exemple entre 10 et 20 : ils répondront souvent 15.

Exemple de réponse ambiguë :

430

Exemple de réponse non ambiguë :

631

4. <u>Quatrième type de stratégie conduisant à 9 jours</u> :

Les élèves comprennent que la rencontre n’a pas lieu à mi-chemin. Mais ils imaginent que le marchand et le carrosse se rencontrent à midi, soit après quatre jours et demi. Ils leur restent encore 80 lieues à parcourir ensemble, et ce pendant quatre jours et demi :

> *Le carrosse et le marchand se rencontrent 4 jours à midi après leur départ, il leur reste 80 lieues pour atteindre le château, alors ils font le reste du chemin en 4 1/2 et ils arrivent au château. Ils font 9 jours en tout.*

Une classe de 6ème a répondu de cette manière.

La réponse "11 jours"

Les élèves partent du principe que la rencontre a lieu quand le marchand a parcouru 100 lieues à pied. Il lui reste ensuite 20 lieues à parcourir avec le carrosse. Le marchand arrivera ainsi au bout de 11 jours au château :

> *Le marchand fait 100 lieues = 10 jours*
> *en carrosse il parcourt 20 lieues =1 [jour]*
> *10 + 1 = 11*
> *100 + 20 = 120*

7 classes (4 %) ont donné cette réponse, dont 4 classes de 4ème et 3 classes de 5ème.

La réponse "7 jours" et ses différentes stratégies

5 classes (3 %) arrivent à cette réponse, dont 1 classe de 4ème et 4 classes de 5ème.

1. <u>Première stratégie</u> :

Les élèves semblent partir du principe que la rencontre a lieu quand le marchand a parcouru 20 lieues. Ils tiennent compte, pour le retour au château, du fait que le carrosse va plus vite que le marchand :

> *10 + 10 = 20 lieues et 20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 100 lieues*
> *1 jour 1 jour 1 jour 1 jour 1 jour 1 jour 1 jour*
> *Le marchand a fait 2 jours à pied, ce qui fait 10 lieues et 10 lieues = 20 lieues.*
> *Après, il a pris le carrosse. Pour arriver à 100, il doit faire 5 jours parce que 20 x 5 = 100*
> *5 + 2 jours = 7 jours*

Parmi les 5 classes, 4 utilisent ce raisonnement, dont 1 de 4ème et 3 de 5ème.

2. <u>Deuxième stratégie</u> :

Les élèves commencent par calculer combien de jours le marchand met pour atteindre le château en carrosse. Puis ils tiennent compte du fait que le marchand fait un bout de chemin à pied (une classe de 5ème) :

> *20 x 6 = 120. Donc en carrosse il faudrait 6 jours, mais comme il doit aller à pied, on rajoute 20 jours [lieues] à pied, ce qui fait 7 jours.*

La réponse "12 jours" et ses différentes stratégies

25 classes (16 %) sont arrivées à cette réponse : 14 classes de 4ème, 8 de 5ème et 3 de 6ème.

1. <u>Premier type de stratégie utilisée</u> :

Les élèves ne tiennent compte que du marchand et calculent par conséquent le nombre de jours qu'il met pour parcourir les 120 lieues à pied.

Pour arriver à cette réponse de 12 jours, on constate plusieurs manières de procéder :

- multiplication (9 classes, dont 5 de 4ème, 3 de 5ème et 1 de 6ème) :
  10 x 12 = 120
- division (7 classes, dont 3 de 4ème, 3 de 5ème et 1 de 6ème) :

120 : 10 = 12

- multiplication et division (2 classes, dont une de 4ème et une de 5ème) :

  Le marchand de soie arrivera dans 12 jours au château parce que 10 x 12 = 120 ou 120 : 12 = 10.

  Ou *on a fait 120 : 10 car il fait dix lieues par jour et 10 x 12 = 120.*
- addition en colonne (une classe de 4ème).
- tableau avec deux colonnes : le nombre de jours et le nombre de lieues correspondant (une classe de 4ème).
- calcul en deux étapes : calcul du nombre de jours que le marchand met pour parcourir 100 lieues, puis calcul du nombre de jours pour parcourir les 20 dernières lieues (une classe de 4ème) :

  On a fait 10 x 10 jours = 100 lieues + 2 x 10 = 20 lieues

  100 lieues + 20 lieues = 120 lieues.

Parmi les 25 classes ayant trouvé *12 jours*, 21 ont utilisé cette première stratégie : 12 classes de 4ème, 7 classes de 5ème et 2 classes de 6ème.

2. <u>Deuxième type de stratégie utilisée</u> :

Les élèves tiennent compte du marchand et du carrosse dans leur raisonnement. Dans un premier temps, ils calculent le nombre de jours que mettent le marchand et le carrosse pour parcourir les 120 lieues. Puis partant du principe que le marchand et le carrosse se rencontrent à mi-parcours, ils divisent les nombres de jours parcourus par le marchand et par le carrosse par deux. Comme le carrosse a mis, selon leurs calculs, trois jours jusqu'à la rencontre, ils rajoutent encore trois jours pour le retour du carrosse au château (une classe de 5ème):

Le marchand   120 lieues : 10 lieues par jour = 12 jours
le carrosse   120 lieues : 20 lieues par jour = 6 jours
mais comme ils se rencontrent à la moitié, les jours se divisent par deux 12 : 2 = 6,
6 : 2 = 3
3 + 6 = 9
+ le retour = 12 jours.

3. <u>Troisième type de stratégie utilisée</u> :

Les élèves font le même raisonnement que celui qui conduit à la réponse de 9 jours, mais ils rajoutent à la fin les trois jours du retour au château (une classe de 6ème) :

120 : 2 = 60
nombre de jours à pied 60 : 10 = 6 jours
nombre de jours en carrosse 60 : 20 = 3 jours
total de jours : 6 jours + 3 jours = 9 jours + 3 jours de retour = 12 jours.

Ce dernier rajout de trois jours ne tient pas compte de la simultanéité.

4. <u>Quatrième type de stratégie utilisée</u> :

Les élèves commencent par le même raisonnement que celui qui conduit à la réponse de 9 jours, c'est-à-dire qu'ils partent du principe que la rencontre a lieu à mi-parcours et qu'ils calculent le nombre de jours que le carrosse et le marchand mettent jusqu'à la rencontre. Mais ils font ensuite une erreur d'interprétation de leur schéma, additionnant 2 + 2 + 2 = 6 jours pour le carrosse, au lieu de déduire que ces 3 x 2 (2 pour 20 lieues) correspondent aux trois jours que le carrosse met jusqu'à la rencontre (une classe de 4ème) :

456

5. Autre :

La réponse de 12 jours sans explication (une classe de 4ème).

La réponse "18 jours"

Les élèves calculent le nombre de jours que met le marchand pour parcourir les 120 lieues à pied et en carrosse. Puis ils additionnent les nombres de jours, puisqu'ils comprennent qu'il y a à la fois le marchand et le carrosse qui parcourent les 120 lieues :

12 à pied et 6 en carrosse = 18 jours.

Deux classes (1 %) sont arrivées à cette réponse, dont une de 4ème et une de 5ème.

Les réponses "autres"

1. Feuille blanche : 3 classes de 4ème année.

2. Les élèves donnent deux réponses : 2 classes de 4ème.

3. Erreur de calcul : les élèves arrivent à 7 jours au lieu de 8 jours (une classe de 4ème).

4. Réponses erronées difficiles pour nous à interpréter ou sans explication, qui dénotent une incompréhension du problème (19 classes, dont 8 de 4ème, 5 de 5ème et 6 de 6ème) :

630

La stratégie prévue dans l'analyse a priori consistant à additionner les chemins parcourus chaque jour dans la première partie du parcours (10 + 20) et à diviser la distance totale à parcourir par cette somme (120 : (20 + 10) = 4), stratégie généralement utilisée par l'adulte, n'a été que rarement rencontrée.
Certains élèves ont en partie utilisé cette stratégie, cela de plusieurs manières :

- Une classe de 4ème a suivi la stratégie décrite ci-dessus pour trouver la réponse de 4 jours :

    Il peut parcourir 120 lieues en 4 jours.
    On a fait 20 + 10 = 30 et ensuite on a fait 120 : 30 = 4 alors ça fait 4 jours.

- Utilisation de la multiplication sans préciser d'où provient le nombre 30 (une classe de 4ème) :

    On a fait 4 x 30 = 120

- Addition puis multiplication ou division (deux classes de 5ème) :

    10 + 20 = 30, 30 x 4 = 120 et 120 : 30 = 4
    et (521)

- Une classe de 5ème a multiplié, au lieu de diviser, le nombre de lieues par 4 :

    Réponse 16 jours.
    On a fait 120 x 4 = 480
    480 : 30 —> (20 + 10) = 16 jours

Le tableau et le graphique suivants résument les différentes stratégies décrites dans cette deuxième partie.

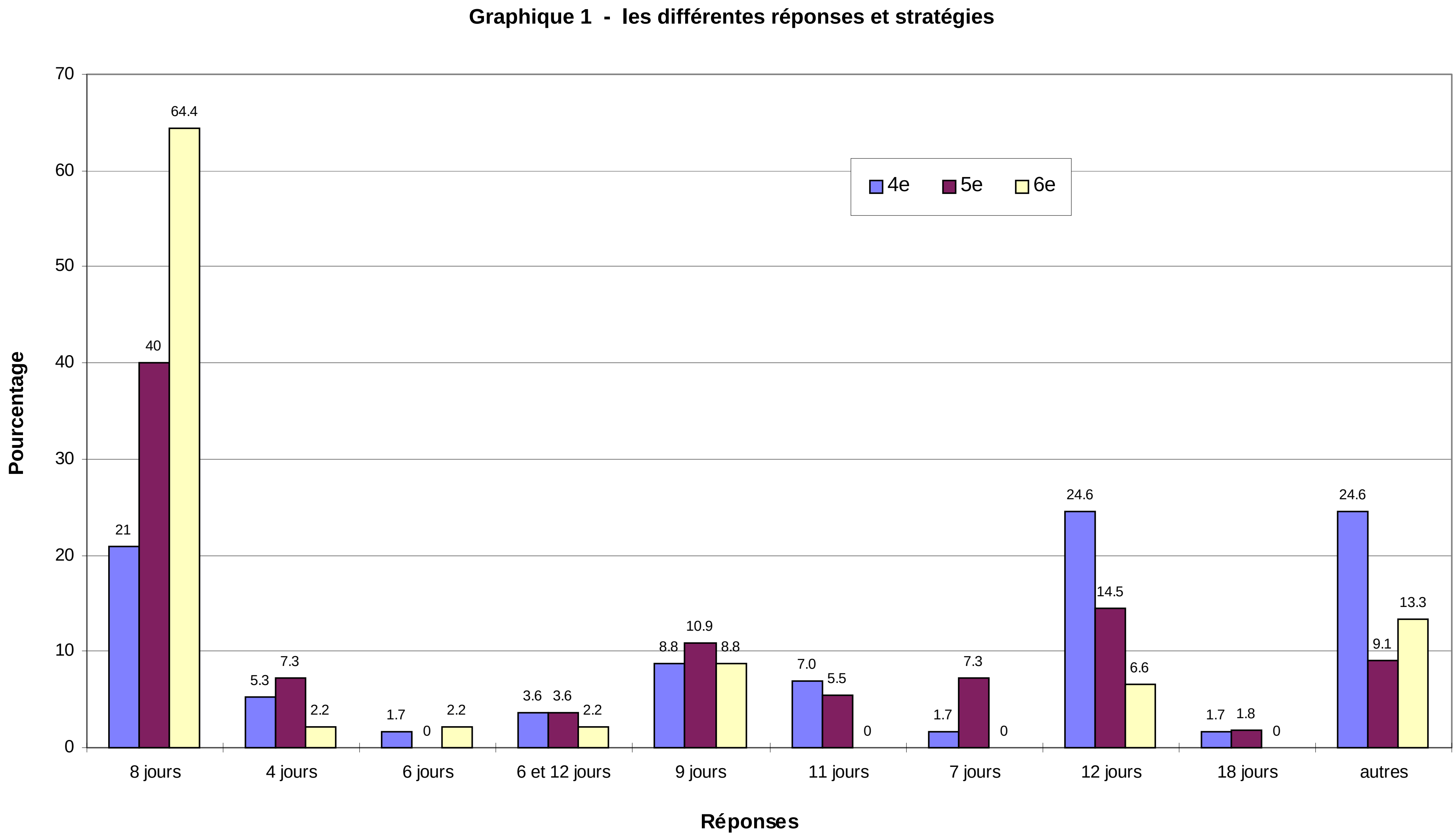
Tableau 2 - Les différentes réponses et stratégies

réponses	niveau 4	niveau 5	niveau 6	total

	N	%	N	%	N	%	N	%
8 jours	**12**	**21.0**	**22**	**40.0**	**29**	**64.4**	**63**	**40.1**
R. complète[7]	5	8.8	13	23.6	18	40.0	36	22.9
R. incomplète[8]	7	12.3	9	16.4	11	24.4	27	17.2
4 jours	**3**	**5.3**	**4**	**7.3**	**1**	**2.2**	**8**	**5.1**
6 jours	**1**	**1.7**	**0**	**0.0**	**1**	**2.2**	**2**	**1.3**
6 et 12 jours	**2**	**3.6**	**2**	**3.6**	**1**	**2.2**	**5**	**3.2**
9 jours	**5**	**8.8**	**6**	**10.9**	**4**	**8.8**	**15**	**9.6**
1	5	8.8	2	3.6	1	2.2	8	5.1
2	0	0.0	3	5.5	2	4.4	5	3.2
3	0	0.0	1	1.8	0	0.0	1	0.6
4	0	0.0	0	0.0	1	2.2	1	0.6
11 jours	**4**	**7.0**	**3**	**5.5**	**0**	**0.0**	**7**	**4.5**
7 jours	**1**	**1.7**	**4**	**7.3**	**0**	**0.0**	**5**	**3.2**
1	1	1.7	3	5.5	0	0.0	4	2.5
2	0	0.0	1	1.8	0	0.0	1	0.6
12 jours	**14**	**24.6**	**8**	**14.5**	**3**	**6.6**	**25**	**15.9**
1	12	21.0	7	12.7	2	4.4	21	13.4
2	0	0.0	1	1.8	0	0.0	1	0.6
3	0	0.0	0	0.0	1	2.2	1	0.6
4	1	1.7	0	0.0	0	0.0	1	0.6
5	1	1.7	0	0.0	0	0.0	1	0.6
18 jours	**1**	**1.7**	**1**	**1.8**	**0**	**0.0**	**2**	**1.3**
autres	**14**	**24.6**	**5**	**9.1**	**6**	**13.3**	**25**	**15.9**
1	3	5.3	0	0.0	0	0.0	3	1.9
2	2	3.6	0	0.0	0	0.0	2	1.3
3	1	1.7	0	0.0	0	0.0	1	0.6
4	8	14.0	5	9.1	6	13.3	19	12.1
total	**57**	**100.0**	**55**	**100.0**	**45**	**100.0**	**157**	**100.0**

[7] Par *réponse complète*, on entend les réponses correctes (8 jours) avec justification.

[8] Par *réponse incomplète*, on entend les réponses correctes (8 jours) sans justification ou avec justification incomplète (notées ci-après *8 jours sans justification*).


Graphique 1 - les différentes réponses et stratégies
Pourcentage
Réponses
4e
5e
6e
70
60
50
40
30
20
10
0
8 jours
4 jours
6 jours
6 et 12 jours
9 jours
11 jours
7 jours
12 jours
18 jours
autres
21 40 64.4
5.3 7.3 2.2
1.7 0 2.2
3.6 3.6 2.2
8.8 10.9 8.8
7.0 5.5 0
1.7 7.3 0
24.6 14.5 6.6
1.7 1.8 0
24.6 9.1 13.3

Commentaires du tableau

En 4ème primaire, nous trouvons autant de réponses *8 jours avec justification* que de *9 jours* (8.8 %). Avec le passage dans les degrés supérieurs, le pourcentage de ce dernier type de réponse reste plus ou moins le même, tandis que le nombre de réponses *8 jours avec justification* va en augmentant. Imaginer que la rencontre entre le marchand et le carrosse a lieu à mi-parcours est donc une stratégie utilisée autant en 4ème qu'en 6ème, alors qu'on s'attend à la voir diminuer avec la progression d'un niveau scolaire à l'autre. En 4ème primaire également, les réponses *autres* et *12 jours* sont plus nombreuses (24.6 %) que les réponses *8 jours avec justification* (8.8 %). Le nombre de réponses *autres* et *12 jours* diminuent par la suite.
En ce qui concerne les réponses *autres*, on ne trouve plus, en 5ème et en 6ème primaire, de feuilles blanches, d'erreur de calcul ou de doubles réponses. Il ne reste que quelques réponses erronées avec explications peu claires ou sans explication.

Avec le passage d'un niveau scolaire à l'autre, il y a une augmentation du nombre de réponses *8 jours avec justification*. Il s'agit donc globalement d'un problème bien adapté, puisque les élèves progressent d'une année à l'autre.
Le nombre de réponses *8 jours sans justification* augmente également, mais dans des proportions plus restreintes. Cette augmentation pose question, puisque l'on s'attendrait plutôt à voir diminuer ce type de réponse avec le changement de niveau scolaire.

On peut se demander ce qui permet aux élèves de 6ème année de mieux réussir ce problème que les enfants plus jeunes.

L'hypothèse d'une difficulté à calculer chez les plus jeunes est à écarter, puisque les calculs de ce problème sont relativement simples à effectuer une fois qu'on les a posés et qu'il n'y a quasiment pas d'erreurs de calculs par rapport au nombre des copies examinées. La division, bien qu'introduite en 5ème année seulement, ne semble pas poser de difficultés particulières, puisque les élèves qui l'utilisent le font correctement, y compris les élèves de 4ème, et qu'il est possible de résoudre ce problème par d'autres moyens que la division.

Cet emploi de la division par certains élèves de 4ème année nous montre qu'en situations de problèmes, les enfants sont tout à fait capables d'utiliser des outils indépendamment du programme scolaire.

La difficulté semble résider dans la capacité à se représenter deux déplacements simultanément, difficulté accentuée par le fait qu'ils ne se font pas à la même vitesse.

Cette difficulté à concevoir deux déplacements de vitesses différentes (10 lieues par jour pour le marchand et 20 lieues par jour pour le carrosse) se reflète dans les stratégies des élèves qui imaginent que la rencontre a lieu à mi-parcours (réponse *9 jours*) ou à divers endroits autres qu'à mi-chemin (réponses *7 jours*, *11 jours*).

Outre la difficulté de se représenter mentalement le scénario, une autre difficulté résiderait dans la longueur de l'énoncé, puisqu'un certain nombre d'élèves semblent en oublier une partie au cours de la résolution du problème (oubli du retour au château, oubli du carrosse...).

PARTIE III : Les différents types de justification

Nous nous sommes posé la question de savoir s'il y a une corrélation entre la manière de répondre et la réponse donnée. Le dessin par exemple permet-il de mieux comprendre le problème, et donc de le résoudre correctement ?

Les différents types de justification utilisés par les classes sont les suivants :

- texte
- schéma
- combinaison texte-schéma
- tableau
- combinaison texte-tableau
- combinaison texte-schéma-tableau

Ces différents modes de justification sont regroupés en annexes dans des tableaux récapitulatifs (tableaux 3 et 4).

Texte

Les justifications sous forme de texte constituent de loin la majorité, puisque sur les 154[9] copies examinées, 92 ont utilisé ce moyen.
Par *texte*, on entend non seulement les phrases manuscrites, mais également les calculs.

Parmi les classes de 4ème (40 classes) qui ont utilisé ce type de justification, différentes réponses ont été données :

- 8 jours sans justification[10] (deux classes).
- 4 jours (trois classes)
- 6 jours (deux classes)
- 6 et 12 jours (deux classes)
- 9 jours première stratégie[11] (quatre classes)
- 9 jours deuxième stratégie[12] (une classe)
- 11 jours (quatre classes)
- 7 jours première stratégie[13] (deux classes)
- 12 jours première stratégie[14] (onze classes)
- 12 jours quatrième stratégie[15] (une classe)
- réponses erronées avec explications peu claires (sept classes)
- réponses doubles (une classe)

9 Trois classes n'entrent pas dans cette analyse, puisqu'elles ont rendu des feuilles blanches.
10 Par *8 jours sans justification*, on entend les réponses dans lesquelles les élèves ne parlent pas du retour au château de manière explicite.
11 *9 jours première stratégie* : 120 : 2 = 60, puis 6 + 3 = 9 jours.
12 *9 jours deuxième stratégie* : La rencontre a lieu à mi-parcours, sans indiquer de manière explicite la division de 120 par deux.
13 *7 jours première stratégie* : La rencontre a lieu quand le marchand a parcouru 20 lieues à pied : 2 + 5 pour le retour = 7 jours.
14 *12 jours première stratégie* : Les élèves ne tiennent compte que du marchand et calculent le nombre de jours qu'il met pour parcourir les 120 lieues à pied.
15 *12 jours quatrième stratégie* : Même raisonnement que celui qui conduit à la réponse 9 jours première stratégie, mais erreur d'interprétation des calculs.

Les classes de 5ème qui ont utilisé le texte comme justification (40 classes) ont donné les réponses suivantes :

- 8 jours avec justification (six classes)
- 8 jours sans justification (cinq classes)
- 4 jours (quatre classes)
- 6 et 12 jours (deux classes)
- 9 jours première stratégie (deux classes)
- 9 jours deuxième stratégie (une classe)
- 9 jours troisième stratégie[16] (une classe)
- 11 jours (trois classes)
- 7 jours première stratégie (une classe)
- 7 jours deuxième stratégie[17] (une classe)
- 12 jours première stratégie (sept classes)
- 12 jours deuxième stratégie[18] (une classe)
- 18 jours (une classe)
- réponses erronées avec explications peu claires (cinq classes)

Parmi les classes de 6ème (12 classes), diverses réponses ont été données :

- 8 jours avec justification (deux classes)
- 8 jours sans justification (deux classes)
- 4 jours (deux classes)
- 6 et 12 jours (une classe)
- 12 jours première stratégie (deux classes)
- 12 jours troisième stratégie[19] (une classe)
- réponses erronées avec explications peu claires (deux classes)

Dans chaque degré scolaire, les réponses sont très variées.
Avec ce type de justification, il y a, sur l'ensemble, peu de réponses *8 jours avec justification*, et aucune en 4ème année. Peu de classes également donnent la réponse *8 jours sans justification*.
De même, sur l'ensemble, les réponses *autres* (réponses erronées avec explications peu claires et les réponses doubles) sont peu nombreuses. Nous en trouvons cependant plus que dans les autres types de justifications. Mais la raison est peut-être à chercher dans le nombre important des copies qui ont justifié leur réponse par du texte.

Schéma

La plupart des schémas sont constitués d'une ligne horizontale qui représente la distance à parcourir, entrecoupée de douze espaces. Nous trouvons également quelques schémas dessinés à la verticale. Chaque espace correspond à 10 lieues ou à un jour. Le dessin peut être à l'échelle et la distance à parcourir de 12 cm ou de 12 carrés sur une feuille quadrillée. Deux classes (une de 5ème et une de 6ème) ont séparé la distance à parcourir en 120 espaces. Le marchand a dû par conséquent emprunter un chemin non rectiligne pour rejoindre le château. D'autres schémas ne sont pas précis, mais ils respectent les proportions. D'autres encore ne respectent pas les proportions mais permettent quand même d'arriver à la réponse correcte.
Le navire est généralement dessiné sur la gauche du schéma et le château sur la droite.
Pour distinguer le marchand et le carrosse, certaines classes utilisent des couleurs différentes, des espaces deux fois plus grands pour le carrosse que les espaces parcourus à pied, ou encore les lettres *M* et *C* (pour Marchand et Carrosse).

[16] *9 jours troisième stratégie* : 12 jours à pied et 6 jours en carrosse, puis (12 : 2) + (6 : 2) = 9 jours.
[17] *7 jours deuxième stratégie* : 6 jours en carrosse. Mais le marchand fait 20 lieues à pied, donc deux jours. 5 + 2 = 7 jours.
[18] *12 jours deuxième stratégie* : (12 : 2) + (6 : 2) = 9, plus les 3 jours du retour = 12 jours.
[19] *12 jours troisième stratégie* : 120 : 2 = 60, donc 6 jours à pied + 3 jours en carrosse jusqu'à la rencontre, puis encore 3 jours pour le retour.

Nous trouvons également d'autres schémas, comme le diagramme en arbre (une classe de 6ème, réponse *79 jours*) ou le dessin fantaisiste[20] (une classe de 4ème, réponse *12 jours sans justification*).

Sur l'ensemble des classes, onze seulement utilisent ce moyen de justification. Seule la réponse est manuscrite.

Ce n'est cependant pas parce que le dessin n'apparaît pas sur les feuilles de réponses que les élèves ne l'auraient pas utilisé sur une feuille de brouillon. Afin de pousser plus profondément l'analyse, il aurait fallu récolter non seulement les feuilles de réponses, mais également toutes les feuilles utilisées lors de la résolution de ce problème (brouillons).

Parmi les classes de 4ème (quatre classes) qui ont utilisé ce mode de justification, les réponses suivantes ont été données :

- 8 jours avec justification (une classe)
- 8 jours sans justification (deux classes)
- 12 jours (une classe). Il ne semble cependant pas que ce soit le dessin qui ait conduit ici les élèves à cette réponse :

419

Trois classes de 5ème ont utilisé le dessin :

- 8 jours avec justification (deux classes)
- 8 jours sans justification (une classe)

Parmi les classes de 6ème, quatre ont justifié leur réponse par un schéma :

- 8 jours avec justification (une classe)
- 8 jours sans justification (deux classes)
- diagramme en arbre conduisant à la réponse de 79 jours (une classe).

Il n'y a pas de réponses où la rencontre a lieu à mi-parcours (réponse *9 jours*).
A l'exception des deux schémas inappropriés menant à des réponses erronées, le dessin conduit à la réponse correcte, même si le retour au château n'est pas explicité. Ce n'est cependant pas un outil utilisé fréquemment par les classes du Rallye. Lors des entretiens avec les élèves, certains

[20] voir le dessin ci-dessous.

enseignants nous ont dit avoir également constaté cette difficulté à utiliser de manière spontanée le dessin comme aide dans la recherche de solutions.

Dans les entretiens individuels, tous les élèves de 4ème font spontanément un dessin. En 5ème, aucun ne dessine de manière spontanée et en 6ème, trois sur les sept interrogés le font spontanément.

Combinaison texte-schéma

Concernant le schéma, nous retrouvons les mêmes caractéristiques que pour les classes qui n'utilisent que le dessin comme justification à leur réponse.
Ce sont des textes qui contiennent plus que la réponse manuscrite. Les calculs sont considérés comme du texte.
Les élèves expliquent par l'intermédiaire du texte l'échelle qu'ils ont utilisée dans leur schéma :

> *Nous avons compté 1 cm pour 10 lieues pour le marchand et 2 cm pour 20 lieues pour le carrosse.*

et/ou la méthode employée pour arriver au moment de la rencontre ou à la réponse :

> *Nous avons fait avancer une fois le carrosse et une fois le marchand jusqu'à ce qu'ils se rencontrent.*

Cinq classes de 4ème ont utilisé ce moyen de justification et ont trouvé les réponses suivantes :

- 8 jours avec justification (une classe)
- 8 jours sans justification (trois classes)
- 18 jours (une classe)

Cette dernière réponse semble avoir été induite par le schéma utilisé. Celui-ci représente dans une première partie le nombre de jours que le marchand met à pied pour parcourir les 120 lieues. La deuxième partie représente le nombre de jours que met le carrosse pour parcourir la même distance. Il ne reste plus qu'à ces élèves à additionner 6 et 12 pour obtenir la réponse de 18 jours :

Parmi les classes de 5ème (dix classes), nous trouvons les réponses suivantes :

- 8 jours avec justification (cinq classes)
- 8 jours sans justification (deux classes)
- 9 jours deuxième stratégie (une classe) : dans ce schéma, les élèves n'ont fait qu'une ligne horizontale sans l'entrecouper par des jours ou par des lieues.
- 7 jours première stratégie (une classe) : la distance entre le navire et le château n'est ni dessinée à l'échelle, ni constituée du nombre correct de lieues.
- 4 jours avec explications peu claires (une classe) : il s'agit d'une des deux classes qui ont séparé la distance à parcourir en 120 espaces. Elle aurait pu arriver avec ce schéma à la réponse correcte si elle ne s'était pas arrêtée au moment de la rencontre.

Les classes de 6ème qui ont combiné leur schéma avec un texte (22 classes) ont donné les réponses suivantes :

- 8 jours avec justification (douze classes)
- 8 jours sans justification (quatre classes)
- 9 jours première stratégie (une classe)
- 9 jours deuxième stratégie (deux classes)
- 9 jours quatrième stratégie[21] (une classe)
- réponses erronées (deux classes) dues à une mauvaise représentation graphique ou à une erreur de lecture sur le dessin.

L'utilisation d'un schéma n'empêche pas les élèves d'imaginer que la rencontre a lieu à mi-parcours. Les schémas qui justifient la réponse de *9 jours* ne sont pas précis, si ce n'est la rencontre au milieu du dessin. D'autres respectent les proportions. Dans ces deux cas, la rencontre au milieu ne semble cependant pas être induite par le dessin, mais plutôt par un a priori de départ qui aurait conduit les élèves à dessiner la rencontre au milieu du schéma.

Pour les justifications sous forme de schéma et celles combinant texte et schéma, les réponses erronées sont induites par une mauvaise représentation graphique du problème. Le dessin peut donc avoir une influence réelle sur la réponse.

Tableau

Il s'agit d'une répartition sur deux colonnes, avec d'un côté le nombre de jours et de l'autre le nombre de lieues.
Nous trouvons également des tableaux à trois colonnes, une pour le nombre de jours, une pour le nombre de lieues que parcourt le marchand, une pour le nombre de lieues que parcourt le carrosse :

[21] La rencontre a lieu au 4ème jour à midi. Donc 4 1/2 + 4 1/2 = 9 jours.

Deux classes de 4ème ont utilisé ce moyen de justification. Une classe est arrivée à la réponse *12 jours*avec le premier type de tableau, l'autre à la réponse *8 jours sans justification* avec le deuxième type de tableau

Au vu de ce petit nombre de classes, aucune conclusion ne peut en être tirée.

La même remarque que celle qui a été faite pour les justifications avec schémas peut s'appliquer ici. Ce n'est pas parce que le tableau n'apparaît pas sur les feuilles de réponses que les élèves ne l'auraient pas utilisé sur une feuille de brouillon.

Combinaison texte-tableau

Il s'agit de textes qui contiennent plus que la réponse manuscrite. Les calculs sont considérés comme du texte.
En plus des deux types de tableaux décrits ci-dessus, nous trouvons également des tableaux représentant le nombre de lieues parcourues avec deux colonnes, une pour le marchand et une pour le carrosse. D'autres construisent de véritables tableaux avec deux lignes, une pour le carrosse et une pour le marchand, et quatre colonnes pour le nombre de jours :

604

Un autre type de tableau, utilisé par une classe de 6ème, comporte six colonnes, qui correspondent à 6 jours, et 20 lignes :

650

Le texte est utilisé pour expliquer le moment de la rencontre et/ou le retour au château.

Une seule classe de 4ème a combiné texte et tableau pour arriver à la réponse de *8 jours avec justification.*

Les deux classes de 5ème sont arrivées aux réponses suivantes :

- 8 jours sans justification
- 9 jours deuxième stratégie

Huit classes de 6ème ont utilisé ce moyen de réponse :

- 8 jours avec justification (trois classes)
- 8 jours sans justification (quatre classes)
- 6 jours (une classe) : cf. exemple ci-dessus

Combinaison texte-schéma-tableau

Une seule classe de 4ème s'est justifiée de cette manière. Elle arrive à la réponse de *8 jours avec justification.*

Le texte parle du retour au château et comprend des calculs. Le schéma est assez succinct, puisqu'il se résume à trois flèches, indépendamment du dessin du marchand et du carrosse. Ces flèches indiquent le sens du trajet du marchand et celui du carrosse (flèche aller-retour). Quant au tableau, il comprend trois colonnes, une pour le nombre de jours, une pour le nombre de lieues parcourues par le marchand et une pour le nombre de lieues parcourues par le carrosse :

Conclusion

Quelque soit le type de justification utilisé, nous trouvons des réponses *8 jours avec* et *sans justification.*

Les justifications avec texte fournissent les réponses les plus variées. Il est cependant difficile de déterminer dans quelle mesure cette diversité est due au moyen en tant que tel, ou si elle résulte du grand nombre de classes ayant utilisé le texte.
Le texte semble néanmoins être considéré par les élèves comme la meilleure méthode de justification de leur réponse, au détriment du schéma et du tableau.

De même dans les entretiens individuels, aucun élève de 4ème et de 6ème n'a utilisé le tableau. Un élève de 5ème a construit un tableau avec trois colonnes, une pour le nombre de jours, une pour le nombre de lieues parcourues par le marchand et une pour le nombre de lieues parcourues par le carrosse.

PARTIE IV : Entretiens avec les élèves

Suite aux interrogations que nous nous sommes posées précédemment[22], nous avons effectué des entretiens principalement individuels dans une classe de 4ème (six élèves seuls et un groupe de trois élèves), une classe de 5ème (six élèves) et une classe de 6ème primaire (sept élèves), ayant toutes trois participé à cette 8ème édition du RMT. Vingt-deux élèves ont ainsi été interrogés.
La durée de chaque entretien s'échelonnant de 20 à 45 minutes, il n'a pas été possible de voir plus d'élèves, non seulement par manque de temps, mais aussi pour éviter de trop perturber les programmes scolaires, chaque élève interrogé manquant inévitablement une partie de l'après-midi. Les observations qui suivent doivent donc être considérées avec prudence et ne permettent en aucun cas d'établir des conclusions générales.

Ce chapitre traite de la question du vocabulaire, de la vitesse, du moment et du lieu de la rencontre, des différentes réponses et stratégies, ainsi que des modes d'explication utilisés par les élèves.

Il y a plus de stratégies décrites que d'élèves interrogés, puisque les élèves ont changé souvent de stratégies en cours de résolution de problème.
Tous les élèves, que ce soit en 4ème, en 5ème ou en 6ème, ont besoin de temps pour lire l'énoncé et l'intégrer.

Lorsqu'on demande aux élèves d'expliquer avec leurs propres mots ce qu'ils ont compris du problème, ils le font dans l'ensemble correctement, ceci dans les trois niveaux. Ils comprennent que le carrosse et le marchand partent au même moment mais pas du même endroit, qu'ils vont à la rencontre l'un de l'autre, que le carrosse va plus vite que le marchand, qu'après la rencontre le carrosse et le marchand retournent ensemble au château.
Les difficultés surviennent au moment de la résolution du problème. Beaucoup se perdent en cours de route, oublient une partie de l'énoncé ou changent plusieurs fois de stratégies.

Lorsqu'on demande aux élèves si le marchand et le carrosse partent du même endroit, plusieurs pensent que oui. D'autres répondent qu'on ne peut pas savoir.
Pour un élève de 5ème, ils partent d'endroits différents, "car ce n'est pas logique qu'ils partent du même endroit et que le marchand ne monte pas tout de suite dans le carrosse".

Vocabulaire

Alors que la compréhension du vocabulaire est essentielle à l'appropriation des problèmes, certains termes utilisés dans la donnée ne sont pas familiers aux élèves. La plupart ne savent en effet pas ce que le terme *lieues* signifie. Ils déduisent généralement qu'il s'agit d'une distance, de kilomètres, de mètres, d'endroits, d'une mesure de la distance ou de centimètres sur un dessin.
De même pour le terme *carrosse*, certains élèves ne voient pas précisément de quoi il s'agit, si ce n'est d'un moyen de transport.
Ces difficultés de vocabulaire ne semblent cependant pas constituer une barrière à la résolution du problème : même si les élèves ne comprennent pas les mots, ils s'en créent une représentation grâce au contexte.

Vitesse

Les élèves comprennent en général que <u>le carrosse va plus vite que le marchand</u> parce que "le carrosse parcourt 20 lieues par jour et le marchand 10 lieues par jour" (intégration correcte de la

[22] Cf. fin du chapitre 2, p. 20.

donnée), ou parce que "10 et 20 ça fait plus qu'à pied", ou encore parce que "le marchand est à pied et le carrosse a un moteur" (interprétation pratique).

Pour un élève[23] de 4ème, on ne peut pas savoir si le carrosse va toujours à la même vitesse, car "il se peut que parfois les chevaux soient fatigués et que de ce fait ils ralentissent, ou qu'ils s'arrêtent pour la nuit".
De même, "on ne peut pas savoir si le marchand va toujours à la même vitesse, car il peut s'arrêter pour pique-niquer ou s'il a soif".

Pour un autre élève de 4ème, le marchand avance toujours à la même vitesse "sinon il n'y aurait pas écrit seulement 10 lieues par jour [dans la donnée du problème]".

Pour tous les élèves interrogés, la notion de vitesse est difficile. Cette difficulté est cependant tout à fait compréhensible, puisqu'il s'agit d'une notion du niveau de l'école secondaire.
Pour beaucoup, *10 lieues par jour* représente une distance, puisqu'en deux jours, le marchand parcourt 20 lieues et en trois jours il parcourt 30 lieues, et que 20 et 30 lieues sont des distances. Ce problème de représentation de la vitesse ne semble cependant par être un obstacle à la résolution correcte du problème. Les élèves de 4ème à 6ème en ont en effet une conception suffisante pour résoudre ce problème.

La notion de vitesse est très délicate pour les élèves comme pour les adultes car il s'agit d'un rapport de deux grandeurs : une distance divisée par une durée. Or dans un rapport ou une fraction, les variations des deux grandeurs constituantes n'ont pas le même effet. Si on augmente la distance, la vitesse augmente, alors que si on augmente la durée, la vitesse diminue. Ce sont des raisons du même ordre qui font que les calculs sur les fractions sont rarement maîtrisées mêmes par les adultes, mais seulement effectuées par des algorithmes mémorisés[24].

Moment et lieu de la rencontre

Le moment de la rencontre est l'élément clé à déterminer dans ce problème. Pour les élèves interrogés, il y a différentes façons de se représenter ce moment.

1. La rencontre a lieu après quatre jours :

Pour un élève de 6ème, "le marchand fait les 3/4 en carrosse car le carrosse va deux fois plus vite, 12 : 3 [il s'agit du 3 des 3/4] = 4 jours".
"120 : 3 = 40 km, donc 4 jours : on enlève le zéro de 40, car 10 lieues par jour" [40 : 10 = 4]. Cet élève finit par s'embrouiller avec tous ces chiffres et la longueur de l'énoncé.

D'autres élèves utilisent le dessin et leurs deux index pour obtenir la réponse correcte. Pendant qu'un doigt avance de 10, l'autre avance de 20 : "je fais un des deux côtés [j'avance d'un trait de chaque extrémité du parcours], mais j'utilise deux 10 pour le carrosse car il fait 20 lieues par jour" (élève de 4ème).

2. La rencontre a lieu après quatre jours et demi :

Cette réponse est due non pas au fait que le marchand et le carrosse se rencontrent le quatrième jour à midi, comme c'est le cas dans le quatrième type de stratégie décrit plus haut et conduisant à *9 jours*[25], mais à une erreur dans le dessin, l'élève ayant séparé la route menant au château en treize espaces au lieu de douze (un élève de 4ème).

[23] Dans ce chapitre, aucune distinction n'est faite entre les filles et les garçons. Pour des raisons pratiques, c'est le masculin qui est utilisé.
[24] 1/3 + 1/5 ne font pas 1/8.
[25] Cf. p. 13.

3. <u>La rencontre a lieu au milieu du parcours</u> :

"Il faut diviser 120 par 2 car le château est deux fois plus loin, donc le carrosse doit parcourir deux fois plus de lieues" (élève de 6ème).
Il y a confusion ici entre les notions de vitesse et de distance, *deux fois plus loin* pour *deux fois plus vite*.

Un élève de 4ème divise 120 par 2 car le marchand va au château de deux manières différentes, à pied et en carrosse.

Pour un autre élève de 4ème, le marchand et le carrosse ne peuvent pas se rencontrer avant la moitié du chemin à parcourir, car "ils ne vont pas assez vite".

Un autre élève de 4ème dit se souvenir de la correction en classe : le meilleur élève en mathématiques avait dit que la rencontre avait lieu à mi-parcours. Cet élève n'a pas d'autre argument. Nous voyons ici l'influence que peut avoir la réputation de certains élèves sur d'autres qui prennent ainsi pour acquis ce qu'on leur dit.

D'autres n'arrivent pas à expliquer pourquoi ils divisent la distance à parcourir par deux.

4. <u>Et encore</u> :

"Le roi va à la rencontre du marchand. Au moment de la rencontre, il donne son carrosse et il continue à pied jusqu'au navire" (un élève de 6ème).

"Au moment de la rencontre, le marchand et le carrosse ne se sont pas vus et ils vont au point de départ de l'autre" [le carrosse continue jusqu'au navire et le marchand continue jusqu'au château] (un élève de 4ème).

Les différentes réponses et stratégies rencontrées

1. <u>Réponse 8 jours</u> :

Sur l'ensemble des élèves interrogés, la réponse *8 jours* n'est que rarement apparue (un élève de 4ème, deux élèves de 5ème après quelques essais infructueux, deux élèves de 6ème).
Il semblerait ainsi que les élèves fournissent de meilleures réponses lorsqu'ils travaillent en groupe qu'en individuel, même si le chercheur peut dans une certaine mesure dynamiser, par ses questions, la recherche de solutions. Cette observation va dans le sens des nouvelles conceptions préconisées par les réformes pédagogiques actuelles.

2. <u>Réponse 12 jours</u> :

Un élève de 6ème fait le calcul en deux étapes, en ne tenant compte que du marchand. Il va d'abord jusqu'à 100 (10 x 10 = 100) "pour faire un chiffre rond", puis il reste 10 x 2 = 20 à faire pour obtenir les 120 lieues. Ce choix de 100 serait donc dicté par une "raison esthétique" du chiffre.
Dans le Rallye, une classe de 4ème seulement avait utilisé cette démarche. Ce n'est donc pas parce qu'aucune classe d'un certain niveau n'utilise une stratégie dans le concours que celle-ci doit être définitivement exclue du niveau en question.

3. <u>Réponse 18 jours</u> :

Bien qu'une classe de 4ème et une classe de 5ème soient arrivées à cette réponse dans le Rallye, on trouve, en entretien individuel, également en 6ème ce type de réponse, mais avec une stratégie différente que celle utilisée dans le Rallye. L'élève additionne ici 12 et 6, nombres de jours que le marchand et le carrosse mettent chacun pour le parcours entier, parce qu'il tient compte du retour au château après la rencontre : il y a addition du 12 et du 6 parce qu'il y a retour.

4. Stratégie adulte[26] :

C'est seulement dans le groupe de la classe de 4ème que les élèves commencent par additionner 10 et 20 = 30. Il reste ainsi 90 pour arriver à 120. Puis ils divisent 120 par 30, ce qui fait 4. Mais ils ne vont pas plus loin. Ils finissent par utiliser la première stratégie conduisant à la réponse de *9 jours*[27]. Ils rajoutent un zéro pour retrouver le 90 qui restait ci-dessus.

Les différents types de justification

Beaucoup dessinent un trait rectiligne représentant le chemin à parcourir qu'ils entrecoupent d'un certain nombre de traits.

En plus des dessins, des tableaux ou du texte, le tableau de correspondance a été utilisé par un élève de 6ème. Il s'agit cependant plutôt d'une manière particulière de poser les calculs que d'un véritable tableau de correspondance. On remarque ici la transposition d'outils utilisés en classe à la résolution de problèmes qui sortent du contexte de la classe.

tableau de correspondance (élève 2 classe 620)

Conclusion

Dans les entretiens effectués individuellement, on remarque une dysharmonie entre les élèves, non seulement d'un degré à l'autre, mais aussi entre les élèves de même niveau.

Il serait intéressant non seulement de poursuivre les entretiens individuels afin d'explorer plus avant s'il y a d'autres manières de comprendre ce problème, mais également de donner ce problème à des élèves de niveaux supérieurs afin de mieux comprendre les outils nécessaires à la résolution de ce problème.

[26] La stratégie adulte consiste à additionner les chemins parcourus chaque jour dans la première partie du parcours (10 + 20) et à diviser la distance totale à parcourir par cette somme (120 : (20 +10) = 4), pour trouver le nombre de jours nécessaires jusqu'à la rencontre, puis doubler ce nombre en tenant compte du retour (4 x 2 = 8).

[27] Cf. p. 11.

PARTIE V : Comparaison avec les stratégies de Siena et de Parma

Outre la Suisse romande et le Tessin, plusieurs pays ont participé à cette 8ème édition du Rallye Mathématique Transalpin : l'Italie (Parma, Siena et Aosta), le Luxembourg, la France, la République Tchèque et Israël. Cette année, le nombre de classes participantes s'est ainsi monté à plus de 1200 classes.

Ce chapitre présente les stratégies utilisées par les élèves de Siena et de Parma. Nous nous sommes en effet posé la question de savoir si les classes italiennes, bénéficiant d'un système scolaire quelque peu différent du nôtre, obtenaient cette diversité de réponses et si elles utilisaient d'autres stratégies. Cette présentation ne tient pas compte du nombre de points obtenus.

A Siena, 36 classes ont effectué ce problème, dont six classes de 4ème, neuf de 5ème et vingt-et-une de 6ème. Malgré ce petit nombre de classes, les réponses ont été très diversifiées.
A Parma, 52 classes ont résolu ce problème, dont seize de 4ème, quatorze de 5ème et vingt-deux de 6ème.
Cette présentation regroupe ainsi 88 classes, dont vingt-deux de 4ème, vingt-trois de 5ème et quarante-trois de 6ème. Ce regroupement se justifie par le fait que ces deux régions bénéficient du même système scolaire.

Nous retrouvons un certain nombre de réponses identiques avec les mêmes types de stratégies que pour la Suisse romande :

- <u>8 jours</u> (trente-trois classes, dont cinq de 4ème, douze de 5ème et seize de 6ème).
  Le nombre de réponses correctes augmente avec le passage d'un degré scolaire à l'autre.
  De même que pour la Suisse romande, nous pouvons faire une distinction entre les classes en fonction des justifications qu'elles ont données :

  - <u>8 jours avec justification</u> (quatorze classes, dont une de 4ème, cinq de 5ème et huit de 6ème) : les élèves parlent de manière explicite du retour au château.

  - <u>8 jours sans justification</u> (dix-neuf classes, dont quatre de 4ème, sept de 5ème et huit de 6ème).

- <u>4 jours</u> (réponse intermédiaire) (trois classes de 4ème, une classe de 5ème et deux classes de 6ème).

- <u>6 jours</u> (une classe de 4ème).

- <u>12 jours</u> (trois classes de 4ème, une de 5ème et cinq de 6ème).
  Les classes de 5ème et de 6ème ont utilisé la division (120 : 10 = 12), ainsi qu'une classe de 4ème.
  Une classe de 4ème a justifié sa réponse par un tableau et du texte.

- <u>6 et 12 jours</u> (une classe de 5ème et une classe de 6ème).

- <u>9 jours</u> (deux classes de 4ème, deux de 5ème et quatre de 6ème).
  Ces classes sont parties du principe que la rencontre avait lieu à mi-parcours.

- <u>11 jours</u> (une classe de 4ème et une classe de 6ème).

- <u>18 jours</u> (deux classes de 4ème et une classe de 6ème).

- Autres :

  - Une classe de 6ème a fait une erreur de calcul et est arrivée à la réponse de 40 jours (au lieu de 4 jours, la réponse intermédiaire).

  - Six classes ont donné des réponses erronées avec explications peu claires (trois classes de 4ème, une classe de 5ème et deux classe de 6ème).
  Une classes de 6ème a utilisé le diagramme en arbre et, à un jour près, est arrivée à la même réponse que la classe de Suisse romande, également de niveau 6. Ces deux classes ont en outre construit leur diagramme de la même manière (605).

  - Une classe de 5ème a rendu feuille blanche.

Les classes italiennes ont parfois, pour une même réponse qu'en Suisse romande, utilisé des stratégies différentes :

- 8 jours (deux classes de 6ème) :

  - Les élèves ont commencé par chercher le plus petit multiple commun entre 10 et 20, qui est 20. Puis ils ont divisé 120 par ce multiple commun et ont trouvé 6. Finalement ils ont ajouté aux lieues se trouvant entre le point de rencontre et le château (6), les lieues parcourues par le marchand pour arriver au point de la rencontre : 6 + 2 = 8.

  - La deuxième classe a additionné 2 + 2 + 2 + 2 = 8.
  Quatre fois 2, car dans 120, il y a quatre fois (10 + 20) :

Pa 602

- 7 jours (une classe de 4ème) :

  Nous avons multiplié 10 x 7 et nous avons trouvé les jours parcourus par le marchand, c'est-à-dire 70.
  Puis nous avons fait 20 x 7 et nous avons trouvé les jours parcourus par le carrosse.
  Puis nous avons fait la soustraction 140 - 70 et nous avons trouvé en combien de jours le marchand est arrivé au château[28]*.*

- 6 jours : Deux stratégies différentes ont permis d'arriver à cette réponse.

  - Une classe de 6ème :
    120 : 10 = 12.
    12 : 2 = 6 jours.
    Nous avons fait 12 : 2 parce que 10 est la moitié de 20.
  - Calcul du nombre de jours que mettrait le marchand pour aller à pied au château (12 jours). Puis calcul du nombre de jours que mettrait le carrosse pour parcourir les 120 lieues (6 jours). Donc 12 - 6 = 6 jours (une classe de chaque niveau).

- 12 jours : Plusieurs stratégies différentes ont permis d'arriver à cette réponse.

[28] Traduction.

- Pour deux classes de 6ème :
4 jours pour aller à pied jusqu'à la rencontre + 8 jours en carrosse (le carrosse met 4 jours jusqu'à la rencontre, puis encore 4 jours pour le retour au château).

- Une classe de 6ème a cherché le plus petit diviseur commun entre 10 et 20, ce qui fait 10. Ils ont ensuite divisé 120 par ce 10 pour trouver 12 jours.

- Une classe de 6ème :
120 : 10 = 12 jours que met le marchand pour parcourir 120 lieues.
120 : 20 = 6 jours que met le carrosse pour parcourir 120 lieues.
12 - 6 = 6 jours que mettent le marchand et le carrosse pour se rencontrer.
6 + 6 = 12 jours pour aller ensemble au château.

- <u>10 jours</u> : Une classe de 5ème de Suisse romande a donné cette réponse[29]. Celle-ci n'a pas été décrite dans le deuxième chapitre (analyse des stratégies), car elle a été classée dans les réponses erronées de la catégorie *autres.*
En ce qui concerne Siena et Parma, deux classes de 5ème ont donné cette réponse, mais avec des stratégies différentes :

- L'explication qui accompagne cette réponse n'est pas très claire :
En 10 jours, l'homme arrivera au château en parcourant 55 lieues à pied et 65 lieues en carrosse.
La différence entre les lieues est toujours de 10.

- Les élèves sont arrivés à cette réponse à cause d'une erreur de calcul, en plus d'une erreur d'interprétation :
60 : 10 = 6 jours à pied jusqu'à la rencontre.
120 : 20 = 4 jours en carrosse jusqu'à la rencontre.
6 + 4 = 10 jours en tout.

- <u>3 jours</u> : Une classe de 4ème de Suisse romande a donné cette réponse[30].
Elle n'a pas non plus été décrite dans le deuxième chapitre, car elle a également été classée dans les réponses erronées de la catégorie *autres*.
Pour la région italienne, une classe de 6ème a donné cette réponse avec une stratégie différente :
20 + 10 = 30
120 - 30 = 90
90 : 30 = 3 jours.

Les classes de Siena et de Parma ont en plus donné d'autres réponses qui n'apparaissent pas dans celles données par les élèves de Suisse romande :

- <u>24 jours</u> (une classe de 6ème) :
Les élèves comprennent que le carrosse et le marchand vont à la rencontre l'un de l'autre. Ils additionnent les nombres de jours respectifs que mettent le marchand et le carrosse jusqu'à la rencontre. Ils tiennent compte enfin du retour au château :
120 : 20 = 6 jours que met le carrosse pour rencontrer le marchand.
120 : 10 = 12 jours que met le marchand.
12 + 6 = 18 jours pour le moment de la rencontre.
18 + 6 = 24 jours pour arriver au château.
Nous avons ajouté 6 qui sont les jours que met le carrosse pour retourner au château.

- <u>4 jours et demi</u> (une classe de 5ème) :
30 : 10 = 3 jours pour le marchand à pied

[29] *Il faut diviser 10 par 120 et on obtient 12, donc il fait 12 lieues par jour. Après tu fais 120 par 12 qui nous fait le nombre de jours qu'il marche. Réponse : au bout de 10 jours. 12 x 10 = 120.*
[30] *Le marchand : 6 x 10 = 60, le carrosse : 3 x 20 = 60. 60 + 60 = 120. Il arrivera au château en trois jours. Nous savions que le carrosse devait avoir le double du parcours du marchand et il fallait trouver des calculs égal à 120.*

30 : 20 = 1. Il reste 10, qui sont les jours dont le marchand a besoin pour parcourir les 30 lieues en carrosse.
20 : 10 = 2 (la moitié d'un jour, parcouru en carrosse)
3 + 1 = 4 jours pour parcourir les 120 lieues, plus la moitié de la journée.

Le tableau 5 en annexes résume les différentes stratégies communes à la Suisse romande, Siena et Parma, en fonction du niveau scolaire.

Conclusion

Lorsque nous comparons les stratégies communes entre la Suisse romande, Siena et Parma (tableau 5 en annexes), les pourcentages pour l'ensemble des trois niveaux sont assez proches. Dans les deux pays, les réponses *8 jours* sont majoritaires. Les réponses *12 jours* et *autres* occupent une place importante.

Des divergences apparaissent lorsque nous comparons les degrés scolaires les uns par rapport aux autres.

Dans le quatrième degré, les réponses intermédiaires (*4 jours*), ainsi que les réponses *18 jours* sont plus nombreuses en Italie qu'en Suisse romande, alors que c'est l'inverse pour les réponses *12 jours.* Le nombre des autres réponses est comparable pour les deux pays.

En 5ème, les réponses *8 jours* sont plus nombreuses en Italie qu'en Suisse romande. Ce résultat est dû au nombre important de réponses *8 jours sans justification* pour les italiens, alors que les réponses *8 jours avec justification* sont comparables pour les deux pays.
De même qu'en 4ème, le nombre de réponses *12 jours* est plus important pour la Suisse romande que pour l'Italie.

En 6ème, il y a une inversion de la fréquence des réponses *8 jours*, celle-ci étant plus importante pour la Suisse romande que pour l'Italie. Ce résultat est dû ici à une augmentation des réponses *8 jours avec justification*.
Il y a également une inversion, par rapport aux plus petits degrés, en ce qui concerne les réponses *12 jours*, plus fréquentes pour l'Italie.

Avec le passage d'un degré scolaire à l'autre, le nombre de réponses *8 jours* augmente pour les deux pays lorsqu'on passe de 4ème en 5ème. Avec le passage en 6ème, le nombre des réponses correctes diminue pour l'Italie, alors qu'il continue d'augmenter pour la Suisse romande.
Cette diminution pose question, puisqu'on s'attendrait plutôt à ce que les élèves progressent avec le passage dans un niveau supérieur. Cette baisse du nombre de réponses correctes est due à une diminution des réponses *8 jours sans justification*, ce qui est un résultat attendu compte tenu du passage dans un niveau supérieur. Celle-ci peut inversement être due à un non accroissement des réponses *8 jours avec justification*.
Cette diminution du nombre de réponses correctes pourrait être due au fait que les élèves italiens changent d'établissement et de système scolaire en 6ème. Cela pourrait entraîner une certaine perturbation chez ces élèves, qui doivent apprendre à fonctionner en mathématiques de manière plus abstraite et plus formelle, laissant dans les niveaux précédents la possibilité de fonctionner par essais et tâtonnements.

Il serait intéressant de poursuivre la comparaison avec les autres pays participants afin d'obtenir d'autres informations sur les stratégies utilisées par les élèves, ainsi que sur les relations entre stratégies et systèmes scolaires.

CONCLUSION

Bien que l'analyse a priori soit indispensable pour tout problème de concours, elle ne permet pas toujours de prévoir toutes les réponses et les stratégies de résolution de problème. C'est en particulier le cas pour le "Marchand de soie". Il s'agit en effet d'un problème d'une grande richesse de par la diversité des stratégies utilisées par les élèves. Cette richesse des stratégies se retrouve à Siena et à Parma, ainsi que dans chacun des trois niveaux scolaires.

Face à une telle richesse, nous nous trouvons également devant de grandes incertitudes, celles d'essayer de comprendre ce qui se passe dans la tête des élèves.
Nous avons effectué des entretiens individuels, afin de saisir plus précisément le cheminement qui conduit les élèves à une réponse plutôt qu'à une autre. Face à des réponses écrites et "figées", il nous manque en effet souvent l'histoire de leur élaboration.
Cependant, c'est lorsque nous essayons de creuser plus profondément que nous pressentons des champs de fonctionnement encore plus étendus, auxquels nous ne pouvons que difficilement avoir accès. Nous devons alors nous rendre à l'évidence qu'il est très souvent impossible de tout catégoriser et interpréter.

Parmi ce nombre important de stratégies différentes, il y a de bonnes stratégies alors que d'autres sont inefficaces.
L'explicitation des stratégies erronées permet à l'enseignant de déceler les obstacles qui existent derrière un problème mathématique, obstacles dont nous n'avons pas forcément conscience lorsque nous créons ou proposons un problème aux élèves.
Un obstacle fréquent est la confusion entre les termes "au milieu" et "entre", comme nous l'avons décrit pour la réponse *9 jours* : imaginer que la rencontre a lieu *entre* le navire et le château ne veut pas dire qu'elle a lieu *au milieu*. Beaucoup d'élèves font cette erreur.
Un deuxième obstacle est l'identification de l'élève au marchand, ce qui conduit à la réponse *12 jours* (oubli du carrosse).
Une autre difficulté réside dans la simultanéité des déplacements. Un certain nombre de classes en effet ne tiennent pas compte de cette simultanéité (dans la réponse *12 jours* par exemple).
Enfin, l'obstacle essentiel se trouve dans la notion de vitesse.

Une issue intéressante à une analyse de ce genre serait de réfléchir à l'attitude que l'enseignant pourrait adopter face à ces différentes stratégies et à la manière dont il pourrait exploiter un tableau comme le tableau récapitulatif[31] des stratégies.
Pour essayer de surmonter la difficulté de la simultanéité de deux déplacements qui ne se font pas à la même vitesse, on pourrait par exemple élaborer en classe des jeux de rôles, avec la construction des distances et les déplacements des élèves dans l'espace, afin qu'ils puissent vivre cette simultanéité. Cela permettrait d'assister au cheminement de la réflexion des élèves et de voir si ce moyen aide les élèves à résoudre le problème.

Pour terminer, il nous semble important de souligner deux éléments mis en évidence dans ce travail d'analyse. En premier lieu, les élèves sont tout à fait capables, en situation de problèmes, d'utiliser de nouveaux outils indépendamment du programme scolaire (emploi par exemple de la division en 4ème primaire). Cette observation nous rend attentif aux potentialités importantes des élèves, potentialités parfois occultées par les exigences du fonctionnement scolaire. Deuxièmement, il semblerait que les élèves fournissent de meilleures réponses lorsqu'ils travaillent en groupe qu'en individuel. Cette observation va ainsi dans le sens des nouvelles conceptions préconisées par les réformes pédagogiques actuelles et ne peut que nous encourager à continuer dans cette voie.

[31] Cf. tableau 2 p. 18.

BIBLIOGRAPHIE

Grugnetti, L. & Jaquet, F. (éd.). (1999). *Le Rallye mathématique transalpin : quels profits pour la didactique? : actes des journées d'études, Brigue 1997-1998 = Il Rally matematico transalpino : quali apporti per la didattica? : atti delle giornate di studio, Briga 1997-1998*. Neuchâtel : IRDP ; Parma : Dipartimento di matematica dell'Università

Piaget, J. (1973). *Le développement de la notion de temps chez l'enfant*. Paris : PUF (Bibliothèque de philosophie contemporaine)

7ème rallye mathématique transalpin. (1998). *Math-école*, 184, 6-9

7ème rallye mathématique transalpin, première épreuve. (1999). *Math-école*, 186, 28-33

8ème rallye mathématique transalpin, épreuve I. (2000). *Math-école*, 190, 20-26

8ème rallye mathématique transalpin, épreuve II. (2000). *Math-école*, 191, 23-26

ANNEXES

Tableau 3 - Les différents modes de justification I

réponses	**texte**			**schéma**			**combinaison texte-schéma**		
	niv. 4	**niv. 5**	**niv. 6**	**niv. 4**	**niv. 5**	**niv. 6**	**niv. 4**	**niv. 5**	**niv. 6**
8 jours	**5**	**11**	**4**	**3**	**3**	**3**	**4**	**7**	**16**
avec just.	2	6	2	1	2	1	1	5	12
sans just.	3	5	2	2	1	2	3	2	4
4 jours	**2**	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
6 jours	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
6 + 12 j.	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
9 jours	**5**	**4**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**4**
1	4	2	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0	1	2
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11 jours	**4**	**3**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
7 jours	**2**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
1	2	1	0	0	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
12 jours	**12**	**8**	**3**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	11	7	2	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0
18 jours	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
autres	**8**	**5**	**2**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**2**
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	7	5	2	0	0	1	0	1	2
total	**40**	**40**	**12**	**4**	**3**	**4**	**5**	**10**	**22**

Tableau 4 - Les différents modes de justification II

réponses	tableau			combinaison texte-tableau			texte-schéma-tableau		
	niv. 4	niv. 5	niv. 6	niv. 4	niv. 5	niv. 6	niv. 4	niv. 5	niv. 6
8 jours	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**7**	**1**	**0**	**0**
avec just.	0	0	0	1	0	3	1	0	0
sans just.	1	0	0	0	1	4	0	0	0
4 jours	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
6 jours	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
6 + 12 j.	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
9 jours	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11 jours	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
7 jours	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12 jours	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18 jours	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
autres	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
total	**2**	**0**	**0**	**1**	**2**	**8**	**1**	**0**	**0**

Tableau 5 - Les stratégies communes à l'Italie et à la Suisse romande

réponse	niveau 4			niveau 5			niveau 6			total		
	N (I[32])	% (I)	% (S)	N (I)	% (I)	% (S)	N (I)	% (I)	% (S)	N (I)	% (I)	% (S)
8 jours	**5**	**25.0**	**21.0**	**12**	**63.1**	**40.0**	**16**	**48.5**	**64.4**	**33**	**45.8**	**40.1**
avec just.	1	5.0	8.8	5	26.3	23.6	8	24.3	40.0	14	19.4	22.9
sans just.	4	20.0	12.3	7	36.8	16.4	8	24.3	24.4	19	26.4	17.2
4 jours	**3**	**15.0**	**5.3**	**1**	**5.3**	**7.3**	**2**	**6.1**	**2.2**	**6**	**8.3**	**5.1**
6 jours	**1**	**5.0**	**1.7**	**0**	**0.0**	**0.0**	**0**	**0.0**	**2.2**	**1**	**1.4**	**1.3**
6+12 j.	**0**	**0.0**	**3.6**	**1**	**5.3**	**3.6**	**1**	**3.0**	**2.2**	**2**	**2.8**	**3.2**
9 jours	**2**	**10.0**	**8.8**	**2**	**10.5**	**10.9**	**4**	**12.1**	**8.8**	**8**	**11.1**	**9.6**
1	2	10.0	8.8	2	10.5	3.6	4	12.1	2.2	8	11.1	5.1
2	0	0.0	0.0	0	0.0	5.5	0	0.0	4.4	0	0.0	3.2
3	0	0.0	0.0	0	0.0	1.8	0	0.0	0.0	0	0.0	0.6
4	0	0.0	0.0	0	0.0	0.0	0	0.0	2.2	0	0.0	0.6
11 jours	**1**	**5.0**	**7.0**	**0**	**0.0**	**5.5**	**1**	**3.0**	**0.0**	**2**	**2.8**	**4.5**
7 jours	**0**	**0.0**	**1.7**	**0**	**0.0**	**7.3**	**0**	**0.0**	**0.0**	**0**	**0.0**	**3.2**
1	0	0.0	1.7	0	0.0	5.5	0	0.0	0.0	0	0.0	2.5
2	0	0.0	0.0	0	0.0	1.8	0	0.0	0.0	0	0.0	0.6
12 jours	**3**	**15.0**	**24.6**	**1**	**5.3**	**14.5**	**5**	**15.2**	**6.6**	**9**	**12.5**	**15.9**
1	3	15.0	21.0	1	5.3	12.7	5	0.0	4.4	9	12.5	13.4
2	0	0.0	0.0	0	0.0	1.8	0	0.0	0.0	0	0.0	0.6
3	0	0.0	0.0	0	0.0	0.0	0	0.0	2.2	0	0.0	0.6
4	0	0.0	1.7	0	0.0	0.0	0	0.0	0.0	0	0.0	0.6
5	0	0.0	1.7	0	0.0	0.0	0	0.0	0.0	0	0.0	0.6
18 jours	**2**	**10.0**	**1.7**	**0**	**0.0**	**1.8**	**1**	**3.0**	**0.0**	**3**	**4.2**	**1.3**
autres	**3**	**15.0**	**24.6**	**2**	**10.5**	**9.1**	**3**	**9.1**	**13.3**	**8**	**11.1**	**15.9**
1	0	0.0	5.3	1	5.3	0.0	0	0.0	0.0	1	1.4	1.9
2	0	0.0	3.6	0	0.0	0.0	0	0.0	0.0	0	0.0	1.3
3	0	0.0	1.7	0	0.0	0.0	1	3.0	0.0	1	1.4	0.6
4	3	15.0	14.0	1	5.3	9.1	2	6.1	13.3	6	8.3	12.1
total	**20**	**100.0**	**100.0**	**19**	**100.0**	**100.0**	**33**	**100.0**	**100.0**	**72**	**100.0**	**100.0**

32 *I* pour Italie, *S* pour Suisse romande.