

Relations entre le coefficient de
généralisabilité absolu et les indices
Rhô carré et Oméga carré

Gianreto PINI

Novembre 2010

L'auteur remercie tout particulièrement Jean Cardinet et Daniel Bain pour leur disponibilité et leurs précieux conseils durant l'élaboration et la rédaction de ce travail.

Introduction

L'objectif de ce texte est d'illustrer quelques caractéristiques du coefficient de généralisabilité et de montrer les relations que ce coefficient entretient avec d'autres indices couramment utilisés en statistique (Rhô carré et Oméga carré notamment). Développé dans le cadre de la théorie de la généralisabilité, le coefficient du même nom présente en effet de nombreuses analogies avec d'autres indices, élaborés principalement dans le cadre de l'analyse de la variance et dont le but est d'exprimer l'intensité de l'effet qu'un facteur ou une interaction entre facteurs exercent sur la variabilité totale des résultats.

Avant d'illustrer les relations et les analogies qui viennent d'être mentionnées, nous allons préciser d'abord deux points importants et quelques questions de terminologie.

Le coefficient de généralisabilité

Dès son apparition au début des années 1960, la théorie de la généralisabilité a introduit un indice nouveau pour évaluer les qualités métriques d'un dispositif d'évaluation ou de mesure. Conformément à une tradition déjà bien établie dans le cadre de la psychométrie classique, cet indice exprime par une valeur numérique comprise entre 0 et 1 la fiabilité (la précision) des résultats que ce dispositif produit. Il s'agit du coefficient dit de généralisabilité, qui, au cours du développement de la théorie, a rapidement été conçu sous deux formes différentes: un coefficient relatif et un coefficient absolu. Dans sa forme générale, ce coefficient peut être considéré comme le rapport de deux variances: la variance décrivant les différences entre les individus ou les objets soumis à la mesure (variance vraie ou variance de différenciation: S_D^2) et la somme de cette variance avec celle qui affecte la précision de la mesure elle-même (variance d'erreur ou variance d'instrumentation: S_I^2).

On a donc (Coef_G désigne le coefficient de généralisabilité):

$$\text{Coef}_G = \frac{S_D^2}{S_D^2 + S_I^2}$$

La différence entre le coefficient relatif et le coefficient absolu réside essentiellement dans la manière de définir la variance d'erreur (d'instrumentation). Dans le cas du coefficient relatif, on considère comme variance d'erreur celle qui est associée aux interactions entre la (ou les) facette(s) de différenciation et la (ou les) facette(s) d'instrumentation aléatoire(s). Dans le cas du coefficient absolu, en revanche, l'erreur est définie en considérant toutes les sources aléatoires de variation (facettes ou interactions entre facettes) autres que celle(s) qui figure(nt) sur la face de différenciation.

Pendant longtemps, et pour des raisons essentiellement historiques, le coefficient relatif a été considéré comme le seul indice permettant véritablement d'exprimer la fidélité d'un dispositif d'évaluation ou de mesure: du moins selon le sens que ce terme de fidélité avait acquis dans le cadre de la psychométrie classique et du support méthodologique qui lui était sous-jacent: la théorie classique de la mesure (ou théorie des tests). Peu à peu, toutefois, ce point de vue s'est modifié, et on peut raisonnablement considérer qu'il n'est plus aujourd'hui partagé par la totalité des spécialistes de la discipline. Deux raisons au moins sont à l'origine de cette évolution.

D'une part, le coefficient absolu s'est progressivement révélé comme étant particulièrement utile et efficace pour traiter un grand nombre de problèmes auxquels sont confrontés les praticiens de l'évaluation ou de la mesure. En effet, si le coefficient relatif conçoit la précision de la mesure en considérant uniquement la stabilité des positions relatives qu'un ensemble d'objets ou d'individus occupent les uns par rapport aux autres au sein d'une distribution, le coefficient

absolu considère la stabilité des résultats en tant que tels, en fonction de la position que ces résultats occupent sur l'échelle de mesure.

Or, dans le domaine de l'évaluation pédagogique par exemple, une approche de cette nature paraît à bien des égards plus satisfaisante que la précédente: à tel point, d'ailleurs, que les divergences engendrées par les débats autour de cette problématique ont progressivement amené les spécialistes de l'éducation à rejeter (au moins en partie) l'héritage de la psychométrie classique et à fonder une nouvelle discipline (l'éduométrie précisément) consacrée à l'étude des problèmes de la mesure (voir la définition de cette discipline sur le site Internet qui lui est consacré ¹).

La deuxième raison, en revanche, est de nature plus théorique et, de ce fait, plus fondamentale encore. En effet, tant sur le plan conceptuel que d'un point de vue strictement technique et mathématique, il est facile de montrer que le coefficient relatif est en réalité un cas particulier du coefficient absolu, applicable simplement lorsque (pour traiter certains types de problèmes) on considère comme étant sans intérêt - ou sans influence - certaines sources d'erreur.

Précisons d'emblée que les éléments présentés dans ce document **concernent uniquement le coefficient absolu**. Il faut donc que le lecteur s'en souvienne pour éviter des malentendus ou des incompréhensions qui pourraient se révéler fâcheuses.

Les indices mesurant l'intensité de l'effet

Signalons d'abord que, dans la littérature statistique et méthodologique, la question que nous évoquons ici est souvent source d'une certaine ambiguïté, due au fait que la terminologie utilisée n'est pas toujours la même d'un auteur à l'autre. Dans ces conditions, puisque ce texte est rédigé en langue française, il nous semble raisonnable d'avoir recours à la terminologie proposée par un auteur francophone ². Dans l'ouvrage qu'il consacre au traitement statistique des données expérimentales, Abdi présente Rhô carré (ρ^2) et Oméga carré (ω^2) comme des indices évaluant l'intensité d'un effet, et s'appliquant, le premier, lorsque l'analyse de la variance comporte un facteur aléatoire et, le second, lorsque ce facteur est fixé ³.

Par ailleurs, les méthodes de calcul qui interviennent dans chacun de ces deux cas varient selon que les sujets sont nichés dans les modalités du facteur (échantillons indépendants selon une autre terminologie abondamment utilisée) ou que les sujets sont croisés avec les modalités du facteur (échantillons appariés).

Les formules utilisées seront indiquées chaque fois dans le texte, avec la référence exacte de la source. On retiendra toutefois que, de manière générale, ces indices sont toujours conçus comme le rapport de deux variances: la variance associée à la source dont on étudie l'effet et la variance totale. La valeur obtenue peut donc être interprétée comme la proportion (ou le pourcentage) de la variance totale "expliquée" par la source considérée.

Dans la présentation qui suit nous nous référerons donc à la terminologie utilisée par Abdi: on parlera donc de Rhô carré (ρ^2) ou de Oméga carré (ω^2) respectivement lorsque le facteur considéré est aléatoire ou fixé.

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'objectif de ce bref exposé est d'illustrer certaines relations et certaines analogies qui existent entre le coefficient de généralisabilité absolu et les indices classiques exprimant l'intensité d'un effet. Précisons toutefois que le problème ne peut pas

¹ <http://www.irdp.ch/edumetrie/edumetrie.htm>

² Abdi, H. (1987). Introduction au traitement statistique des données expérimentales. Grenoble. Presses universitaires de Grenoble.

³ Certains lecteurs (et notamment les spécialistes de la psychométrie) ont peut-être l'habitude de distinguer deux variantes des indices Rhô carré et Oméga carré, désignés respectivement par les termes d'absolu et de relatif. Signalons à ces lecteurs que les indices dont il sera question dans cet exposé correspondent respectivement à **Rhô carré absolu** et à **Oméga carré absolu**.

être traité en considérant le cas le plus général, englobant toutes les situations que l'on obtiendrait en faisant varier le nombre de facteurs (de facettes) ainsi que leurs caractéristiques (facteurs aléatoires finis, infinis ou fixés) et les relations qui existent entre eux (de croisement ou de nichage). Dans ces conditions, nous nous limiterons dans un premier temps à des plans d'analyse comportant deux facettes seulement.

Dans l'exposé de cette problématique, nous aborderons d'abord le cas de deux facettes croisées, avec une facette de différenciation et une facette d'instrumentation (point 1) et ensuite le cas où la facette d'instrumentation est nichée dans la facette de différenciation (point 2). La dernière partie du texte (point 3) s'efforcera d'élargir quelque peu la perspective pour montrer comment le problème semble se poser lorsqu'on est confronté à des situations plus complexes (avec notamment un nombre de facteurs / de facettes supérieur à deux).

Pour illustrer les relations qui existent entre le coefficient de généralisabilité absolu (Coef_G) et les indices Rhô carré et Oméga carré, nous allons considérer deux cas différents, pour chacun desquels deux situations seront distinguées selon le statut (aléatoire ou fixé) du facteur ou de la facette de différenciation considéré(e). Ces deux cas concernent les points 1 et 2 mentionnés ci-dessus.

Relation entre les facteurs / les facettes:	Statut du facteur dont on étudie l'effet / de la facette de différenciation:	Indice comparé à Coef_G absolu:
<u>Cas 1 :</u> Schéma à mesures répétées (mêmes sujets dans toutes les modalités du facteur). Facette de différenciation et facette d'instrumentation croisées.	Facteur / facette aléatoire	Rhô carré (ρ^2) *
	Facteur / facette fixé(e)	Oméga carré (ω^2) *
<u>Cas 2 :</u> Schéma comportant des sujets différents dans les groupes (modalités du facteur). Facette d'instrumentation nichée dans la facette de différenciation.	Facteur / facette aléatoire	Rhô carré (ρ^2) *
	Facteur / facette fixé(e)	Oméga carré (ω^2) *

*) Les formules pour le calcul des coefficients Rhô carré et Oméga carré auxquelles nous allons nous référer sont présentées (entre autres) dans les ouvrages ci-après. On retiendra également que ces formules diffèrent selon que le schéma d'analyse prévoit les mêmes sujets ou des sujets différents dans les groupes faisant l'objet de la comparaison (cas 1 et 2 ci-dessus).

Abdi, H. (1987). *Introduction au traitement statistique des données expérimentales*. Presses universitaires de Grenoble, pp. 118 – 121; 173; 194 – 195.

Winer, B.J., Brown, Donald R. & Michels, Kenneth M. (1991). *Statistical Principles in Experimental Design*. McGraw-Hill, pp. 125 – 126 ; 274 – 275.

Les formules appliquées ci-après pour le calcul des coefficients de généralisabilité absolus sont celles qu'utilise le logiciel EDUG. Elles ont été reconstituées à partir de l'ouvrage:

Cardinet, J. & Tourneur, Y. (1985). *Assurer la mesure*. Peter Lang.

1. Le cas de deux facteurs / facettes croisé(e)s

La situation:

Soit un tableau croisé comportant n sujets en entrées de lignes et k traitements en entrées de colonnes (tous les sujets sont soumis à tous les traitements).

Face à une situation de cette nature, l'analyse de la variance permet de comparer le niveau d'efficacité des différents traitements (modèle classique pour un schéma à mesures répétées). A partir des résultats obtenus, on peut également estimer l'importance de l'effet dû au facteur Traitement sur la variabilité totale des résultats (calcul de Rhô carré ou de Oméga carré).

Sur un schéma ayant les mêmes caractéristiques, la théorie de la généralisabilité définit deux facettes, croisées l'une avec l'autre: la facette A (Traitements) et la facette B (Sujets). On peut alors envisager une étude de généralisabilité en considérant la facette A comme facette de différenciation et la facette B comme facette d'instrumentation. L'analyse des données peut conduire au calcul de deux coefficients de généralisabilité: l'un absolu et l'autre relatif. Dans le cadre de cet exposé, **seul le premier** sera pris en considération.

La situation qui vient d'être présentée est résumée par le tableau ci-après

		Traitements / Facette A						
		1	2	...	j	...	k	
Sujets / Facette B	1							
	2							
	...							
	i				x_{ij}			m_i
	...							
	n							
					m_j			M

- x_{ij} : score attribué au sujet i sur le traitement j ;
- m_i : moyenne du sujet i pour les traitements de 1 à k ;
- m_j : moyenne du traitement j pour sujets de 1 à n ;
- M : moyenne générale

On peut alors calculer les sommes des carrés, les degrés de liberté et les carrés moyens suivants:

$$SC_{\text{Trait}} \quad \text{ou} \quad SC(A) \quad : \quad n \times \sum_j (m_{.j} - M)^2$$

$$SC_{\text{Suj}} \quad \text{ou} \quad SC(B) \quad : \quad k \times \sum_i (m_i - M)^2$$

$$SC_{\text{Rés}} \quad \text{ou} \quad SC(AB) \quad : \quad \sum_{ij} (x_{ij} - m_i - m_j + M)^2$$

$$SC_{\text{Tot}} \quad \text{ou} \quad SC(\text{Tot}) \quad : \quad \sum_{ij} (x_{ij} - M)^2$$

$$dl_{\text{Trait}} \quad \text{ou} \quad dl(A) \quad : \quad k - 1$$

$$\begin{aligned}
dl_{Suj} \quad \text{ou} \quad dl(B) & : & n - 1 \\
dl_{R\acute{e}s} \quad \text{ou} \quad dl(AB) & : & (k - 1) \times (n - 1) \\
CM_{Trait} \quad \text{ou} \quad CM(A) & : & \frac{n \times \sum_j (m_{.j} - M)^2}{k - 1} \\
CM_{Suj} \quad \text{ou} \quad CM(B) & : & \frac{k \times \sum_i (m_{i.} - M)^2}{n - 1} \\
CM_{R\acute{e}s} \quad \text{ou} \quad CM(AB) & : & \frac{\sum_{ij} (x_{ij} - m_{i.} - m_{.j} + M)^2}{(k - 1) \times (n - 1)}
\end{aligned}$$

1.1 Facteur / facette aléatoire: Rhô carré (ρ^2) et Coef_G absolu

Proposition 1 : La valeur de Rhô carré calculée sur un schéma à mesures répétées avec un facteur aléatoire correspond à la valeur de Coef_G absolu calculé pour deux facettes croisées aléatoires infinies à une seule différence près: dans le cas du Coef_G le terme d'erreur au dénominateur est divisé par n car ce terme estime une variance d'échantillonnage (c'est-à-dire la variance des moyennes d'échantillons aléatoires de n observations).

Démonstration :

a) La formule de Rhô carré ci-après peut subir les transformations suivantes:

$$\hat{r}^2 = \frac{k \times [CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}]}{SC_{Tot} + CM_{Trait} + CM_{Suj} - CM_{R\acute{e}s}}$$

• On remplace SC_{Tot} par les CM correspondants :

$$\frac{k \times [CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}]}{(k - 1) \times CM_{Trait} + (n - 1) \times CM_{Suj} + (k - 1)(n - 1) \times CM_{R\acute{e}s} + CM_{Trait} + CM_{Suj} - CM_{R\acute{e}s}}$$

• $(k - 1) CM_{Trait} + CM_{Trait} = k \times CM_{Trait}$ et $(n - 1) CM_{Suj} + CM_{Suj} = n \times CM_{Suj}$

$$\frac{k \times [CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}]}{k \times CM_{Trait} + n \times CM_{Suj} + (k-1)(n-1)CM_{R\acute{e}s} - CM_{R\acute{e}s}}$$

- $(k-1)(n-1)CM_{R\acute{e}s} - CM_{R\acute{e}s} = [(k-1)(n-1) - 1] \times CM_{R\acute{e}s} = (kn - k - n) \times CM_{R\acute{e}s}$

$$\frac{k \times [CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}]}{k \times CM_{Trait} + n \times CM_{Suj} + (kn - k - n) \times CM_{R\acute{e}s}}$$

- On développe $(kn - k - n)CM_{R\acute{e}s}$

$$\frac{k \times [CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}]}{k \times CM_{Trait} + n \times CM_{Suj} + kn \times CM_{R\acute{e}s} - k \times CM_{R\acute{e}s} - n \times CM_{R\acute{e}s}}$$

- $k \times CM_{Trait} - k \times CM_{R\acute{e}s} = k \times [CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}]$

$$\frac{k \times [CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}]}{k \times [CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}] + n \times CM_{Suj} + kn \times CM_{R\acute{e}s} - n \times CM_{R\acute{e}s}}$$

- On met n en évidence au dénominateur:

$$\frac{k \times [CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}]}{k \times [CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}] + n \times [CM_{Suj} + k \times CM_{R\acute{e}s} - CM_{R\acute{e}s}]}$$

- $k \times CM_{R\acute{e}s} - CM_{R\acute{e}s} = (k-1) \times CM_{R\acute{e}s}$

$$\frac{k \times [CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}]}{k \times [CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}] + n \times [CM_{Suj} + (k-1) \times CM_{R\acute{e}s}]}$$

On divise tous les termes par k :

$\hat{r}^2 = \frac{[CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}]}{[CM_{Trait} - CM_{R\acute{e}s}] + n \times \frac{1}{k} \times [CM_{Suj} + (k-1) \times CM_{R\acute{e}s}]}$	<1>
--	-----

b) La formule de Coef_G absolu ci-après pour le cas de deux facettes aléatoires infinies peut subir les transformations suivantes:

$$\text{Coef}_G = \frac{CM(A) - CM(AB)}{\left[\frac{CM(A) - CM(AB)}{n} \right] + \frac{1}{n} \times \left[CM(AB) + \frac{CM(B) - CM(AB)}{k} \right]}$$

- On multiplie tous les termes par n et on décompose $[CM(B) - CM(AB)] / k$:

$$\frac{CM(A) - CM(AB)}{\left[CM(A) - CM(AB) \right] + \left[CM(AB) + \frac{CM(B)}{k} - \frac{CM(AB)}{k} \right]}$$

- $CM(AB) - CM(AB) / k = [(k - 1) / k] \times CM(AB)$

$$\frac{CM(A) - CM(AB)}{\left[CM(A) - CM(AB) \right] + \left[\frac{CM(B)}{k} + \frac{k-1}{k} \times CM(AB) \right]}$$

On met en évidence $1/k$ au dénominateur:

$$\text{Coef}_G = \frac{CM(A) - CM(AB)}{\left[CM(A) - CM(AB) \right] + \frac{1}{k} \times [CM(B) + (k-1) \times CM(AB)]} \quad <2>$$

Conclusion:

La comparaison des expressions <1> et <2> ci-dessus permet de constater que la proposition est démontrée (QED: Quod erat demonstrandum).

1.2 Facteur / facette fixé(e): Oméga carré (ω^2) et Coef_G absolu

Proposition 2 : La valeur de Oméga carré calculée sur un schéma à mesures répétées avec un facteur fixé correspond à la valeur de Coef_G absolu calculée pour une facette de différenciation fixée et une facette d'instrumentation aléatoire infinie à une seule différence près: dans le cas du Coef_G le terme d'erreur au dénominateur est divisé par n car ce terme estime une variance d'échantillonnage (variance des moyennes d'échantillons aléatoires de n observations).

Remarque: Dans les développements qui suivent, K (majuscule) désigne la taille de la population relative à la facette fixée.

Démonstration :

a) La formule de Oméga carré ci-après peut subir les transformations suivantes:

$$\hat{W}^2 = \frac{SC_{Trait} - (k-1) \times CM_{Rés}}{SC_{Tot} + CM_{Suj}}$$

• On remplace SC_{Trait} **et** SC_{Tot} par les CM correspondants :

$$\frac{(k-1) \times CM_{Trait} - (k-1) \times CM_{Rés}}{(k-1) \times CM_{Trait} + (n-1) \times CM_{Suj} + (k-1)(n-1) \times CM_{Rés} + CM_{Suj}}$$

• $(k-1)(n-1) CM_{Rés} = kn \times CM_{Rés} - k \times CM_{Rés} - n \times CM_{Rés} + CM_{Rés}$

et

$$(n-1) \times CM_{Suj} + CM_{Suj} = n \times CM_{Suj}$$

$$\frac{(k-1) \times [CM_{Trait} - CM_{Rés}]}{(k-1) \times CM_{Trait} + n \times CM_{Suj} + kn \times CM_{Rés} - k \times CM_{Rés} - n \times CM_{Rés} + CM_{Rés}}$$

• $-k \times CM_{Rés} + CM_{Rés} = -(k-1) \times CM_{Rés}$ **et** $kn \times CM_{Rés} - n \times CM_{Rés} = n \times (k-1) \times CM_{Rés}$

$$\frac{(k-1) \times [CM_{Trait} - CM_{Rés}]}{(k-1) \times CM_{Trait} + n \times CM_{Suj} - (k-1) \times CM_{Rés} + n \times (k-1) \times CM_{Rés}}$$

• $(k-1) CM_{Trait} - (k-1) CM_{Rés} = (k-1) \times [CM_{Trait} - CM_{Rés}]$

$$\frac{(k-1) \times [CM_{Trait} - CM_{Rés}]}{(k-1) \times [CM_{Trait} - CM_{Rés}] + n \times CM_{Suj} + n \times (k-1) \times CM_{Rés}}$$

• On met en évidence n au dénominateur :

$$\hat{W}^2 = \frac{(k-1) \times [CM_{Trait} - CM_{Rés}]}{(k-1) \times [CM_{Trait} - CM_{Rés}] + n \times [CM_{Suj} + (k-1) \times CM_{Rés}]}$$

<3>

- b) La formule de Coef_G absolu ci-après pour le cas d'une facette de différenciation fixée et une facette d'instrumentation aléatoire infinie peut subir les transformations suivantes:

$$Coef_G = \frac{\frac{K-1}{K} \times \left[\frac{CM(A) - CM(AB)}{n} \right]}{\frac{K-1}{K} \times \left[\frac{CM(A) - CM(AB)}{n} \right] + \frac{1}{n} \times \left[\frac{K-1}{K} \times CM(AB) + \frac{CM(B) - CM(AB)}{k} + \frac{CM(AB)}{K} \right]}$$

- $[CM(B) - CM(AB)] / k = CM(B) / k - CM(AB) / k$

$$\frac{\frac{K-1}{K} \times \left[\frac{CM(A) - CM(AB)}{n} \right]}{\frac{K-1}{K} \times \left[\frac{CM(A) - CM(AB)}{n} \right] + \frac{1}{n} \times \left[\frac{K-1}{K} \times CM(AB) + \frac{CM(B)}{k} - \frac{CM(AB)}{k} + \frac{CM(AB)}{K} \right]}$$

- Les deux derniers termes dans la deuxième parenthèse au dénominateur s'annulent (k = K):

$$\frac{\frac{K-1}{K} \times \left[\frac{CM(A) - CM(AB)}{n} \right]}{\frac{K-1}{K} \times \left[\frac{CM(A) - CM(AB)}{n} \right] + \frac{1}{n} \times \left[\frac{K-1}{K} \times CM(AB) + \frac{CM(B)}{k} \right]}$$

- On multiplie tous les termes par K (= k) et par n :

$$\frac{(K-1) \times [CM(A) - CM(AB)]}{(K-1) \times [CM(A) - CM(AB)] + (K-1) \times CM(AB) + CM(B)}$$

- On permute les deux derniers termes au dénominateur :

$$Coef_G = \frac{(K-1) \times [CM(A) - CM(AB)]}{(K-1) \times [CM(A) - CM(AB)] + [CM(B) + (K-1) \times CM(AB)]} \quad <4>$$

Conclusion:

La comparaison des expressions <3> et <4> permet de constater que la proposition est démontrée (QED).

2. Le cas de deux facteurs / facettes niché(e)s

La situation:

Soit un plan où n sujets sont nichés dans chacune des k modalités du facteur Traitement: chaque sujet est affecté à un et à un seul traitement (nombre total de sujets: $k \times n$).

Face à une situation de ce genre, l'analyse de la variance permet de comparer le niveau d'efficacité des différents traitements (modèle classique d'analyse pour échantillons indépendants). A partir des résultats obtenus, on peut également estimer l'importance de l'effet dû au facteur Traitement sur la variabilité totale des résultats (Rhô carré ou Oméga carré).

Sur un schéma ayant les mêmes caractéristiques, la théorie de la généralisabilité définit deux facettes: la facette A (Traitements) et la facette B (Sujets). On peut alors envisager une étude de généralisabilité en considérant la facette A comme facette de différenciation et la facette B (nichée dans la facette A: $B:A$) comme facette d'instrumentation. L'analyse des données conduit au calcul du coefficient de généralisabilité absolu ⁴.

La situation qui vient d'être présentée est résumée par le tableau ci-après:

		Traitements / Facette A						
		1	2	...	j	...	k	
Sujets / Facette B	1							
	2							
	...							
	i				x_{ij}			
	...							
	n							
					m_j			M

x_{ij} : score du sujet i appartenant au traitement (groupe) j ;

m_j : moyenne du traitement (groupe) j pour les sujets de 1 à n (appartenant à j);

M : moyenne générale;

n : effectif pour chaque modalité du facteur Traitement / de la facette A.

On peut alors calculer les sommes des carrés, degrés de liberté et carrés moyens suivants:

$$SC_{\text{Trait}} \quad \text{ou} \quad SC(A) \quad : \quad n \times \sum_j (m_j - M)^2$$

$$SC_{\text{Err}} \quad \text{ou} \quad SC(B:A) \quad : \quad \sum_j \left[\sum_i (x_{ij} - m_j)^2 \right]$$

$$SC_{\text{Tot}} \quad \text{ou} \quad SC(\text{Tot}) \quad : \quad \sum_{ij} (x_{ij} - M)^2$$

⁴ Avec une facette d'instrumentation nichée, il n'est plus possible d'estimer séparément la variance entre les modalités de B et la variance de l'interaction AB. Dès lors, seul le coefficient absolu peut être calculé.

$$\begin{aligned}
dI_{\text{Trait}} \quad \text{ou} \quad dI(A) & : & k - 1 \\
dI_{\text{Err}} \quad \text{ou} \quad dI(B:A) & : & k \times (n - 1) = kn - k \\
CM_{\text{Trait}} \quad \text{ou} \quad CM(A) & : & \frac{n \times \sum_j (m_j - M)^2}{k - 1} \\
CM_{\text{Err}} \quad \text{ou} \quad CM(B:A) & : & \frac{\sum_j \left[\sum_i (x_{ij} - m_j)^2 \right]}{kn - k}
\end{aligned}$$

2.1 Facteur / facette aléatoire: Rhô carré (ρ^2) et Coef_G absolu

Proposition 3 : La valeur de Rhô carré calculée sur un schéma comportant un facteur aléatoire correspond à la valeur de Coef_G absolu calculé pour deux facettes aléatoires infinies (facette d'instrumentation nichée dans la facette de différenciation) à une seule différence près: dans le cas du Coef_G le terme d'erreur au dénominateur est divisé par n car ce terme estime une variance d'échantillonnage (variance des moyennes d'échantillons aléatoires de n observations).

Démonstration :

a) La formule de Rhô carré est la suivante:

$$\hat{r}^2 = \frac{CM_{\text{Trait}} - CM_{\text{Err}}}{CM_{\text{Trait}} + (n - 1) \times CM_{\text{Err}}}$$

- Une simple transformation au dénominateur permet d'écrire:

$$\hat{r}^2 = \frac{CM_{\text{Trait}} - CM_{\text{Err}}}{[CM_{\text{Trait}} - CM_{\text{Err}}] + n \times CM_{\text{Err}}}$$

<5>

b) La formule de Coef_G absolu ci-après pour le cas d'une facette d'instrumentation aléatoire infinie nichée dans une facette de différenciation aléatoire infinie peut subir les transformations suivantes:

$$Coef_G = \frac{\frac{CM(A) - CM(B:A)}{n}}{\left[\frac{CM(A) - CM(B:A)}{n} \right] + \frac{1}{n} \times CM(B:A)}$$

• On multiplie tous les termes par n :

$$Coef_G = \frac{CM(A) - CM(B:A)}{[CM(A) - CM(B:A)] + CM(B:A)} \quad <6>$$

Conclusion:

La comparaison des expressions <5> et <6> permet de constater que la proposition est démontrée (QED).

2.2 Facteur / facette fixé(e): Oméga carré (ω^2) et Coef_G absolu

Proposition 4 : La valeur de Oméga carré calculée sur un schéma comportant un facteur fixé correspond à la valeur de Coef_G absolu calculée pour une facette d'instrumentation aléatoire nichée dans une facette de différenciation fixée à une seule différence près: dans le cas du Coef_G le terme d'erreur au dénominateur est divisé par n car ce terme estime une variance d'échantillonnage (variance d'échantillonnage d'une moyenne).

Remarque: Dans les développements qui suivent, K désigne la taille de la population relative à la facette fixée.

Démonstration :

a) La formule de Oméga carré ci-après peut subir les transformations suivantes:

$$\hat{\omega}^2 = \frac{SC_{Trait} - (k-1) \times CM_{Err}}{SC_{Tot} + CM_{Err}}$$

- On remplace SC_{Trait} et SC_{Tot} par les CM correspondants:

$$\frac{(k-1) \times CM_{\text{Trait}} - (k-1) \times CM_{\text{Err}}}{(k-1) \times CM_{\text{Trait}} + (kn-k) \times CM_{\text{Err}} + CM_{\text{Err}}}$$

- $k(n-1) \times CM_{\text{Err}} = kn \times CM_{\text{Err}} - k \times CM_{\text{Err}}$

$$\frac{(k-1) \times CM_{\text{Trait}} - (k-1) \times CM_{\text{Err}}}{(k-1) \times CM_{\text{Trait}} + kn \times CM_{\text{Err}} - k \times CM_{\text{Err}} + CM_{\text{Err}}}$$

- $-k \times CM_{\text{Err}} + CM_{\text{Err}} = -(k-1) \times CM_{\text{Err}}$

$$\frac{(k-1) \times CM_{\text{Trait}} - (k-1) \times CM_{\text{Err}}}{(k-1) \times CM_{\text{Trait}} + kn \times CM_{\text{Err}} - (k-1) \times CM_{\text{Err}}}$$

- $(k-1) \times CM_{\text{Trait}} - (k-1) \times CM_{\text{Err}} = (k-1) \times [CM_{\text{Trait}} - CM_{\text{Err}}]$

$$\frac{(k-1) \times [CM_{\text{Trait}} - CM_{\text{Err}}]}{(k-1) \times [CM_{\text{Trait}} - CM_{\text{Err}}] + kn \times CM_{\text{Err}}}$$

- On divise tous les termes par k :

$$\hat{W}^2 = \frac{\frac{k-1}{k} \times [CM_{\text{Trait}} - CM_{\text{Err}}]}{\frac{k-1}{k} \times [CM_{\text{Trait}} - CM_{\text{Err}}] + n \times CM_{\text{Err}}}$$

<7>

- b) La formule de Coef_G absolu ci-après pour le cas d'une facette d'instrumentation aléatoire infinie nichée dans une facette de différenciation fixée ($K = k$) peut subir les transformations suivantes:

$$Coef_G = \frac{\frac{K-1}{K} \times \left[\frac{CM(A) - CM(B:A)}{n} \right]}{\frac{K-1}{K} \times \left[\frac{CM(A) - CM(B:A)}{n} \right] + \frac{1}{n} \times CM(B:A)}$$

- On multiplie tous les termes par n :

$$Coef_G = \frac{\frac{K-1}{K} \times [CM(A) - CM(B:A)]}{\frac{K-1}{K} \times [CM(A) - CM(B:A)] + CM(B:A)}$$

<8>

Conclusion:

La comparaison des expressions <7> et <8> permet de constater que la proposition est démontrée (QED).

3. Un coin du voile: qu'en est-il des cas plus complexes ?

Les cas que nous avons présentés jusqu'ici se réfèrent aux plans d'analyse les plus simples, même si, dans la réalité de la recherche, ces plans concernent un nombre relativement important de situations. Au point où nous sommes arrivés, il est maintenant naturel de se demander si les relations et les analogies qui viennent d'être évoquées peuvent être généralisées à des plans d'analyse plus complexes. Le but de ce bref chapitre est précisément de lever un coin du voile sur cet aspect du problème. En particulier, nous essaierons de montrer que, dans un certain nombre de cas tout au moins, le parallélisme entre Coef_G absolu et les indices usuels d'intensité de l'effet existe également lorsque l'on considère un plus grand nombre de facteurs (de facettes), ainsi que des modalités variées d'échantillonnages (facteurs fixés ou facteurs aléatoires).

L'étude du phénomène ne pourra toutefois être envisagée que de manière partielle, et ce pour deux raisons principalement. D'une part parce que, comme nous l'avons déjà signalé, il est pratiquement impossible dans le cadre des méthodes classiques⁵ de concevoir un cas général englobant la totalité des situations que l'on obtient en faisant varier le nombre de facteurs, leurs caractéristiques propres ainsi que les relations susceptibles d'exister entre eux. Par ailleurs, une étude comparative des deux approches est difficilement réalisable dans un certain nombre de cas. Parmi les motifs qui sont à l'origine d'une telle situation, nous en signalons trois plus particulièrement.

- La distinction entre facteurs fixés et facteurs aléatoires est souvent traitée dans la littérature consacrée à l'analyse de la variance, avec des développements plus ou moins détaillés concernant les différences qui existent entre ces deux cas, tant sur le plan conceptuel que technique.

En revanche, lorsqu'il est question de facteurs aléatoires, le point de vue implicitement adopté dans la très grande majorité des cas est celui de facteurs dont les modalités proviennent d'un univers (ou population) infini(e), le cas de facteurs aléatoires "finis" étant presque toujours ignoré. Certes, on peut considérer que cette distinction est sans grand intérêt pratique lorsque le facteur comporte un nombre très élevé de modalités possibles (ou, du moins, nettement plus élevé que le nombre de modalités réellement observées). Mais cela n'est pas toujours le cas: par exemple, lorsqu'on sélectionne 5 établissements scolaires parmi les 25 (taille de l'univers) qu'une circonscription comporte.

La théorie de la généralisabilité, en revanche, introduit explicitement la distinction entre facettes aléatoires finies et facettes aléatoires infinies, ayant notamment recours à des méthodes de calcul différentes pour chacun de ces deux cas. Il existe donc une série de situations à propos desquelles les estimations de la variance ne sont pas réalisées de la même manière par l'analyse de la variance classique et par la théorie de la généralisabilité et, de ce fait, les résultats obtenus ne sont pas comparables.

- Dans le cadre usuel d'une analyse de la variance, les sujets (les individus) sont souvent nichés dans l'"intersection" entre les facteurs en présence. En théorie de la généralisabilité cette situation est représentée par l'expression $S:ABC$, où S désigne la facette Sujets tandis que A, B et C sont les facteurs faisant l'objet de l'analyse proprement dite. Ainsi, pour un schéma où A désigne le Sexe (2 modalités), B la Zone géographique d'habitation (rurale ou urbaine: deux modalités) et C l'Origine sociale (3 modalités), le plan d'analyse définira $2 \times 2 \times 3 = 12$ échantillons différents, que l'on qualifie habituellement d'indépendants. Le cas d'échantillons appareillés (sujets croisés avec les modalités d'un ou de plusieurs facteurs) est aussi fréquemment appliqué, mais (mis à part les cas les plus simples traités précédemment: voir point 1 ci-dessus) il est très rare que, pour des situations plus complexes, soient indiqués des indices permettant d'évaluer l'intensité des effets.

⁵ Par méthodes classiques nous entendons celles qui conduisent au calcul de Rhô carré et de Oméga carré ainsi qu'à leur généralisation sur des plans plus complexes.

- Un peu dans le même ordre d'idée, on relèvera que la majorité des plans d'analyse de la variance comportent des facteurs croisés (sauf pour les sujets, nichés dans l'intersection comme nous venons de le voir). Contrairement à une démarche fréquente en théorie de la généralisabilité, le cas de facteurs nichés (par exemple des classes dans des établissements ou des items dans des échelles) sont plutôt rares; de plus on ne trouve généralement aucune trace des algorithmes qui permettraient d'évaluer l'intensité de l'effet dû à un facteur ou à une combinaison de facteurs.

Ayant précisé pour quelles raisons l'analyse comparative présentée ici sera nécessairement limitée à quelques cas particuliers, voici d'abord la situation à partir de laquelle elle a été envisagée.

Le plan d'analyse comporte trois facteurs (A, B et C) croisés entre eux, avec les sujets nichés dans l'intersection des trois facteurs (S:ABC).

Quatre cas seront traités successivement, comportant:

- trois facteurs aléatoires: plan entièrement aléatoire;
- deux facteurs aléatoires et un facteur fixé (C);
- un facteur aléatoire et deux facteurs fixés (B et C);
- trois facteurs fixés (A, B et C).

Puisque la facette Sujets est toujours aléatoire infinie, les trois derniers plans seront qualifiés de mixtes.

Voici les données à partir desquelles ces quatre situations ont été étudiées:

Facteurs	Modalités	Sources	SC	dl	CM
A	3	A	140.365	2	70.183
B	4	B	175.641	3	58.547
C	6	C	232.133	5	46.427
S:ABC	10	S:ABC	742.825	648	1.146
		AB	98.453	6	16.409
		AC	115.500	10	11.550
		BC	92.654	15	6.177
		ABC	162.388	30	5.413
			1759.959	719	

Rappelons d'abord que l'indice évaluant l'intensité de l'effet se présente sous la forme d'un rapport (d'une fraction), dont le numérateur exprime la variance de la source considérée (ou une fonction de cette variance) et varie donc d'une source à l'autre, tandis que le dénominateur (identique pour toutes les sources) est une mesure de la variance totale. Ces deux variances seront désignée respectivement par:

$Var(SV)$: variance de la source de variation considérée;

$Var(Tot)$: variance totale.

Par ailleurs, nous parlerons simplement d'"Indice" pour désigner le rapport lui-même, abandonnant ainsi les dénominations Rhô carré et Oméga carré utilisées précédemment. On aura donc:

$$Indice = \frac{Var(SV)}{Var(Tot)}$$

A partir des résultats qui précèdent, deux démarches peuvent être envisagées.

La première consiste à calculer l'indice évaluant l'intensité de l'effet à l'aide des formules appropriées (ces formules sont reproduites plus loin: pp. 19 à 22). Les numérateurs obtenus sur les données de ce problème [les $Var(SV)$] figurent dans la deuxième colonne des tableaux ci-après, tandis que le dénominateur [$Var(Tot)$] apparaît dans la dernière ligne.

En divisant le numérateur associé à chaque source par le dénominateur, on trouve la valeur de l'indice (multipliée par 100), qui s'interprète habituellement comme le pourcentage de la variance totale "expliquée" par chaque source considérée (3e colonne).

Par ailleurs, ces mêmes données peuvent être analysées avec le logiciel EduG. Dans la partie droite du tableau on trouve les composantes corrigées fournies par le logiciel, avec les pourcentages correspondants (ces résultats figurent dans premier tableau produit par EduG: tableau dit d'Analyse de la variance). Les pourcentages qui apparaissent dans la dernière colonne s'obtiennent simplement en divisant la composante corrigée de chaque source par la somme de ces mêmes composantes (dernière ligne).

Il est alors facile de constater que les deux séries de pourcentages sont rigoureusement identiques. Ceci s'explique très simplement par le fait que les composantes corrigées peuvent aussi être obtenues en divisant chaque numérateur (chaque [$Var(SV)$] ainsi que le dénominateur correspondant [$Var(Tot)$] par le nombre total d'observations (ici: $3 \times 4 \times 6 \times 10 = 720$).

3.1 Plan entièrement aléatoire

Intensité de l'effet (méthodes classiques)			Analyse de la variance (listing EduG)		
Sources	Numérateur: $Var(SV)$	Indice (%)	Sources	Composantes corrigées	%
A	142.90980	7.5	A	0.19849	7.5
B	165.49667	8.7	B	0.22986	8.7
C	204.67560	10.7	C	0.28427	10.7
S:ABC	825.36111	43.3	S:ABC	1.14633	43.3
AB	131.95080	6.9	AB	0.18327	6.9
AC	110.46720	5.8	AC	0.15343	5.8
BC	18.33600	1.0	BC	0.02547	1.0
ABC	307.19509	16.1	ABC	0.42666	16.1
Dénominateur: $Var(Tot)$ 1906.392		100.0		2.64778	100.0

3.2. Plan avec un facteur / facette fixé (C)

Intensité de l'effet (méthodes classiques)			Analyse de la variance (listing EduG)		
Sources	Numérateur: $Var(SV)$	Indice (%)	Sources	Composantes corrigées	%
A	161.32100	8.3	A	0.22406	8.3
B	168.55267	8.7	B	0.23410	8.7
C	170.56300	8.8	C	0.23689	8.8
S:ABC	825.36111	42.4	S:ABC	1.14633	42.4
AB	183.14998	9.4	AB	0.25437	9.4
AC	110.46720	5.7	AC	0.15343	5.7
BC	18.33600	0.9	BC	0.02547	0.9
ABC	307.19509	15.8	ABC	0.42666	15.8
Dénominateur: $Var(Tot)$ 1944.946		100.0		2.70131	100.0

3.3. Plan avec deux facteurs / facettes fixés (B et C)

Intensité de l'effet (méthodes classiques)			Analyse de la variance (listing EduG)		
Sources	Numérateur: Var(SV)	Indice (%)	Sources	Composantes corrigées	%
A	207.10850	10.2	A	0.28765	10.2
B	126.41450	6.3	B	0.17558	6.3
C	174.38300	8.6	C	0.24220	8.6
S:ABC	825.36111	40.8	S:ABC	1.14633	40.8
AB	183.14998	9.1	AB	0.25437	9.1
AC	187.26597	9.3	AC	0.26009	9.3
BC	11.46000	0.6	BC	0.01592	0.6
ABC	307.19509	15.2	ABC	0.42666	15.2
Dénominateur: Var(Tot) 2022.338		100.0		2.80880	100.0

3.4. Plan avec trois facteurs / facettes fixés (A, B et C)

Intensité de l'effet (méthodes classiques)			Analyse de la variance (listing EduG)		
Sources	Numérateur: Var(SV)	Indice (%)	Sources	Composantes corrigées	%
A	138.07233	7.8	A	0.19177	7.8
B	172.20200	9.8	B	0.23917	9.8
C	226.40133	12.9	C	0.31445	12.9
S:ABC	825.36111	46.9	S:ABC	1.14633	46.9
AB	91.57499	5.2	AB	0.12719	5.2
AC	104.03665	5.9	AC	0.14450	5.9
BC	75.45898	4.3	BC	0.10480	4.3
ABC	127.99795	7.3	ABC	0.17777	7.3
Dénominateur: Var(Tot) 1761.105		100.0		2.44598	100.0

Les résultats obtenus pour ces différents exemples conduisent à une seule et même conclusion: les indices habituellement utilisés pour évaluer l'intensité d'un effet semblent coïncider parfaitement avec les pourcentages de variance associés aux différentes sources que l'on retrouve dans la phase initiale d'une étude de généralisabilité.

Comme précédemment, le calcul des coefficients de généralisabilité (et notamment du coefficient absolu) comporte une étape supplémentaire, qui consiste à transformer les composantes corrigées qui figurent sur la face d'instrumentation en variances d'échantillonnage (ou d'erreur). A l'origine, toutefois, les deux approches procèdent d'une même logique générale et appliquent des algorithmes qui conduisent aux mêmes résultats.

Formules utilisées pour calculer l'indice d'intensité

Source: Winer, B.J., Brown, D.R., Michels, K.M. (1991) Statistical principles in experimental design. New York: McGraw-Hill, p. 412.

Remarque: Dans les deux premières colonnes des tableaux ci-après sont indiqués en caractères usuels les facteurs aléatoires et en caractères gras + italiques les facteurs fixés.

Exemple 1: Plan entièrement aléatoire

Facteurs	Sources	Numérateur: Var(S)	Dénominateur: Var(Tot)
A (p)	A	$p \times (CM_A - CM_{AB} - CM_{AC} + CM_{ABC})$	$SC_{Total} + CM_A + CM_B + CM_C - CM_{AB} - CM_{AC} - CM_{BC} + CM_{ABC}$
B (q)	B	$q \times (CM_B - CM_{AB} - CM_{BC} + CM_{ABC})$	
C (r)	C	$r \times (CM_C - CM_{AC} - CM_{BC} + CM_{ABC})$	
S:ABC (n)	S:ABC	$pqrn \times CM_S$	
Entre parenthèses le nombre de modalités que chaque facteur comporte. CM_S est souvent désigné comme le CM d'erreur. C'est le terme qui figure au dénominateur dans le calcul des rapports F.	AB	$pq \times (CM_{AB} - CM_{ABC})$	
	AC	$pr \times (CM_{AC} - CM_{ABC})$	
	BC	$qr \times (CM_{BC} - CM_{ABC})$	
	ABC	$pqr \times (CM_{ABC} - CM_S)$	

Exemple 2: Plan avec deux facteurs aléatoires et un facteur fixé (C)

Facteurs	Sources	Numérateur: Var(S)	Dénominateur: Var(Tot)
<p>A (p) B (q) C (r) S:ABC (n)</p> <p>Entre parenthèses le nombre de modalités que chaque facteur comporte.</p> <p>CM_S est souvent désigné comme le CM d'erreur. C'est le terme qui figure au dénominateur dans le calcul des rapports F.</p>	A	$p \times (CM_A - CM_{AB})$	$SC_{Total} + CM_A + CM_B - CM_{AB} + p \times CM_{AC} + q \times CM_{BC} +$ $+ (pq - p - q) \times CM_{ABC} - pq \times CM_S$
	B	$q \times (CM_B - CM_{AB})$	
	C	$SC_C - [(r-1) \times (CM_{AC} + CM_{BC} - CM_{ABC})]$	
	S:ABC	$pqrn \times CM_S$	
	AB	$pq \times (CM_{AB} - CM_S)$	
	AC	$pr \times (CM_{AC} - CM_{ABC})$	
	BC	$qr \times (CM_{BC} - CM_{ABC})$	
	ABC	$pqr \times (CM_{ABC} - CM_S)$	

Exemple 3: Plan avec un facteur aléatoire et deux facteurs fixés (B et C)

Facteurs	Sources	Numérateur: Var(S)	Dénominateur: Var(Tot)
<p>A (p) B (q) C (r) S:ABC (n)</p> <p>Entre parenthèses le nombre de modalités que chaque facteur comporte.</p> <p>CM_S est souvent désigné comme le CM d'erreur. C'est le terme qui figure au dénominateur dans le calcul des rapports F.</p>	A	$p \times (CM_A - CM_S)$	$SC_{Total} + CM_A + p \times CM_{AB} + p \times CM_{AC} +$ $+ p(q+r-1) \times CM_{ABC} - p(q+r+1) \times CM_S$
	B	$SC_B - (q-1) \times CM_{AB}$	
	C	$SC_C - (r-1) \times CM_{AC}$	
	S:ABC	$pqrn \times CM_S$	
	AB	$pq \times (CM_{AB} - CM_S)$	
	AC	$pr \times (CM_{AC} - CM_S)$	
	BC	$SC_{BC} - (q-1) \times (r-1) \times CM_{ABC}$	
	ABC	$pqr \times (CM_{ABC} - CM_S)$	

Exemple 4: Plan avec trois facteurs fixés (A, B et C)

Facteurs	Sources	Numérateur: Var(S)	Dénominateur: Var(Tot)
A (p) B (q) C (r) S:ABC (n) Entre parenthèses le nombre de modalités que chaque facteur comporte. CM_S est souvent désigné comme le CM d'erreur. C'est le terme qui figure au dénominateur dans le calcul des rapports F.	A	$(p-1) \times (CM_A - CM_S)$	$SC_{Total} + CM_S$
	B	$(q-1) \times (CM_B - CM_S)$	
	C	$(r-1) \times (CM_C - CM_S)$	
	S:ABC	$pqrn \times CM_S$	
	AB	$(p-1) \times (q-1) \times (CM_{AB} - CM_S)$	
	AC	$(p-1) \times (r-1) \times (CM_{AC} - CM_S)$	
	BC	$(q-1) \times (r-1) \times (CM_{BC} - CM_S)$	
	ABC	$(p-1) \times (q-1) \times (r-1) \times (CM_{ABC} - CM_S)$	